

CALCULS PROBAS

2 rappels

• Clan C : famille parties E + q

1 $\cup$ 2 parties de E qui sont etas de C
est un E au clan

2 Différence de 2 E s au clan
est un E au clan

Rem Si X et Y E s au clan
Alors

$$X \cap Y = X - Y^c$$

Complémentaire
de Y dans E

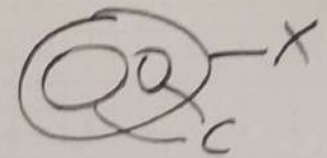
Donc Si X et Y
 E s au clan,
leur $\cap$ est un E au clan

mesure m de Jordan définie sur C

$$C \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$m(X \cup Y) + m(X \cap Y) \\ = m(X) + m(Y)$$

ou alg Boole



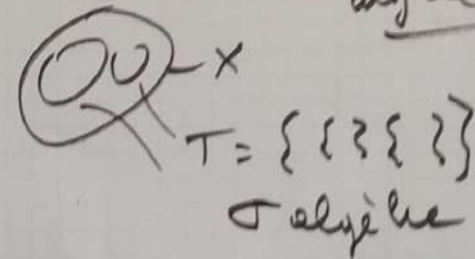
1. $X \in C$

- C stable par $\cap$ passage en $\cap$
 $A \in C \Rightarrow A^c \in C$

$$A, B \in C \Rightarrow A \cup B \in C$$

alg de parties

TRIBU



1 $X \in T$

2 X stable par passage en $\cap$
3 $\cup$ séparable

(X, T) Espace mesurable

$\rightarrow$ stable par $\cap$ séparable

Parties de E "mesurables"

= déterminés par $\mathcal{A}$

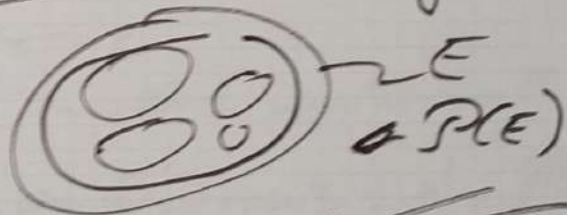
et Tribu = parties mesurables

clan de parties $\mathcal{E}$ sur E

= Anneau de parties

un clan qui $\supset \mathcal{E}$ = algèbre
de parties de E

tribu parties E = σ alg de parties de E



$$P(E) = \{ \emptyset, E \}$$

$\mathcal{B}$ parties non vides de $P(E)$

sur une tribu

Si A la partie $A \in \mathcal{B}$

$$\bar{A} \in \mathcal{B}$$

— suite $(A_n)_{n \geq 0}$

$$\bigcup_{n \geq 0} A_n \in \mathcal{B}$$

$\Rightarrow \bigcap_{n \geq 0} A_n$ aussi Bonel engendrés

$$P(11) = \frac{27}{6^3} = 0,125$$

$$12 \frac{27}{6^3} \approx 0,116$$

③ $A \times 2$
 $A \times 2$ es

$P(A) \neq 0$

Prob B si A est réalisée

"Prob B si A"

Prob conditionnelle

$$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \rightarrow$$

• connue $P(A \cap B) = P\left(\frac{B}{A}\right) \cdot P(A)$

• indépendance

$$P\left(\frac{B}{A}\right) = P(B) \quad \text{ou} \quad P\left(\frac{A}{B}\right) = P(A)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Bayes

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P\left(\frac{B}{A}\right) \cdot P(A)}{P(B)}$$

A_1, A_2 partition de

sur l'univers

$$P\left(\frac{A_1}{B}\right) = \frac{P\left(\frac{B}{A_1}\right) \cdot P(A_1)}{P\left(\frac{B}{A_1}\right) \cdot P(A_1) + \dots + P\left(\frac{B}{A_n}\right) \cdot P(A_n)}$$

100 Gouges Ht

50	A	27%
30	B	60%
20	C	10%

par A
B
C

$$P\left(\frac{M}{A}\right) = 0,27$$

$$P\left(\frac{M}{B}\right) = 0,6$$

$$P\left(\frac{M}{C}\right) = 0,1$$

Bayes schéma
règles mêlées

P mêlée par les ~ de A?

$$P\left(\frac{A}{M}\right) = \frac{P\left(\frac{M}{A}\right) \cdot P(A)}{P\left(\frac{M}{A}\right) \cdot P(A) + P\left(\frac{M}{B}\right) \cdot P(B) + P\left(\frac{M}{C}\right) \cdot P(C)} = \frac{r}{13}$$

1) VA

$$X: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Z}^n$$

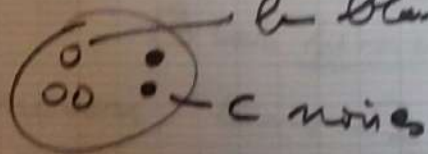
$$A \mapsto X(A) = B$$

est telle que prob de B

$$P(B) = \text{Prob mang rec}$$

EX Bernoulli $B \rightarrow \mathcal{A}$ par une X

le blanch



Si on tire blanc $X=1$
noir $X=0$

n tirages successifs

$$Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$$

nt blanches obtenues en n tirages

$\binom{n}{h}$ nt out de la lettre prise parmi n

Prob de tirer la boule

blanche en n tirages

$$P(X=h) = \binom{n}{h} \alpha^h \beta^{n-h}$$

$$\alpha = P(X=1) = \frac{b}{b+c} \quad \beta = \frac{c}{b+c}$$

38% fument tabac

Prob fumer = 0,38

$$Y = 1 - 0,38 = 0,62$$

sondées 37 personnes

P 13 fument

$$P(Z=13) = \binom{37}{13} (0,38)^{13} (0,62)^{24}$$

PROBAS AX

1° INTRO

meins chiffres plus aléatoires

résultats possibles infini
→ échantillonnage

2° D_S

exer :

- é elem = cas possible
Chaque résultat qui pourrait é obtenu
- é favorable cas —
que on souhaite étudier & obtenir

-  6 cas possibles
situation 1

Si veut étudier situation
résultat impair

3 cas favorables

- Univers Ens Ω ~~est~~ é elem

- é "tout cont" portée de

- $\emptyset$ é impossible
- a 1 élt é elem
- ont parties é
mais certains

Ens é $P(\Omega)$

-  donne cas possible par
situation

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$P(\Omega) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}, \Omega \}$$

elem

$\{1, 3, 5\}$ "situation ab impair"

Ω "situation 1 résultat"

- é incompatibles

$$e_1 e_2 \Leftrightarrow e_1 \cap e_2 = \emptyset$$

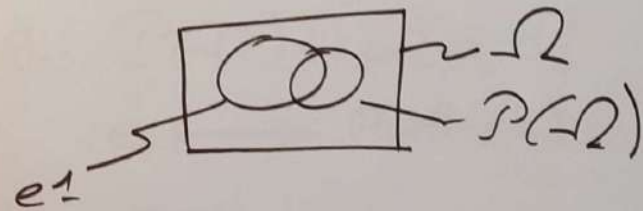
- é équiprobables

$$Prob = \frac{1}{6}$$

- é indépendants

Realiseⁿ un
effort de réalisation entre

3 Notions



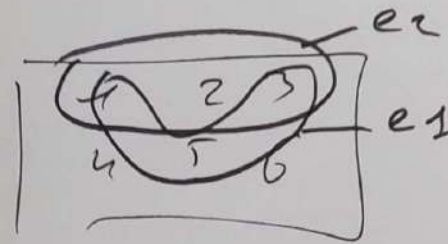
$e_1 \cap e_2$ réalisé ssi e_1 et e_2 réalisés à la fois

~~$e_1 \cap e_2$~~ Suite e_1 seul 
 $\cup$ — 2 —
 — $e_2 \cap e_2$

$\bar{e} = \{e \in \Omega - e\}$
 ssi e pas réalisé

e_2/e_1 e_2 réalisé en supposant que e_1 était réalisé
soit

• $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 $e_1 = \{1, 3, 5\}$ impair
 $e_2 = \{1, 2, 3\}$ pair petit



$$e_1 \cap e_2 = \{1, 3\}$$

$$e_2 \cup e_2 = \{1, 2, 3, 5\}$$

$$\bar{e}_1 = \{2, 4, 6\}$$

e_2/e_1 — unives
 — supposant réalisé
 — cette hypothèse on examine e_2
 — attention à nb petit
 — ces nb sont impair

3 cas possibles (1, 3, 5)
 2 cas favorables (1, 3)

$$\begin{aligned} \text{Prob}(e_2/e_1) &= \frac{\text{Prob}(e_2 \cap e_1)}{\text{Prob}(e_1)} > 1 \end{aligned}$$

4 PROBAS AX

Prob: $P(\Omega) \rightarrow [0, 1]$

$P \quad e \mapsto \text{Prob}(e)$

2 axiomes

- ~~Prob~~ $P(\Omega) = 1$
- $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } e_1 \cap e_2 = \emptyset \\ \text{Alors } P(e_1 \cup e_2) = P(e_1) + P(e_2) \end{array} \right.$
↓ 100% Glu incomp. d'él.

"mesures" des chances

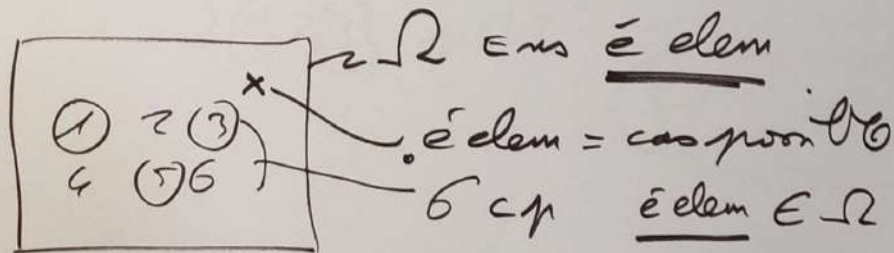
"réelle"

$P(e) = \frac{\text{nb cas favor à } e}{\text{nombre total}}$

PROB AX

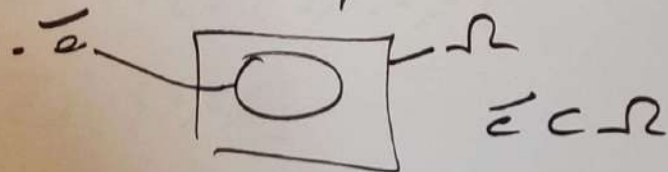
1

2 D



$\emptyset \subset$ possible 1 3 5

$\bar{e}$ possible



$\emptyset$ impossible

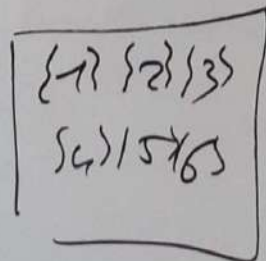
$\{x\}$ $\bar{e}$ elem

unt $\bar{e}$

Ω certain

$P(\Omega)$ niveau

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



$P(\Omega) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \Omega\}$

ens $\bar{e}_s$

$\{2\}$ $\bar{e}$ elem

$\{1, 3, 5\}$ $\bar{e}$

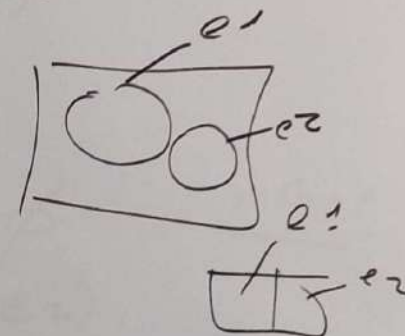
Ω obtention d'un resultat

incompatible

$$e_1 \cap e_2 = \emptyset$$

équiprobables

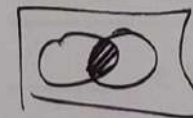
indépendants



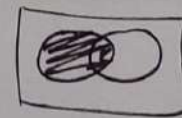
3 Not

à la fois

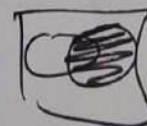
$e_1 \cap e_2$



$e_1 \cup e_2$



Soit



$\bar{e}$ $\Omega - e$ $\bar{e} \in \Omega$

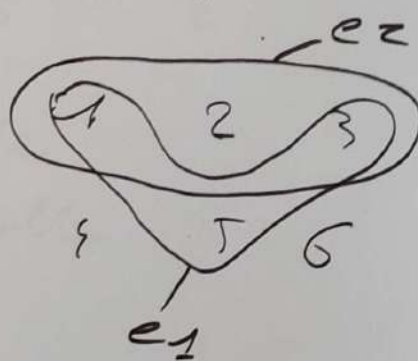
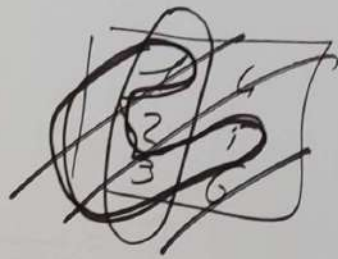
e_2/e_1

réalisée en supposant que e_1 était réalisée

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$e_1 = \{1, 3, 5\} \text{ "impair"}$$

$$e_2 = \{1, 2, 3\} \text{ "petit"}$$



$$e_1 \cap e_2 = \{1, 3\}$$

$$e_1 \cup e_2 = \{1, 2, 3, 5\}$$

$$\bar{e}_1 = \{2, 4, 6\}$$

e_2/e_1 s'agit supposer e_1 réalisée,
 or à cette étape on examine e_2
 et l'on a le nb "petit" de la case
 où on a nb impair

$$3 \text{ cas } (1, 3, 5)$$

$$2 \text{ cas } (1, 3)$$

$$e_1 \cap \Omega$$

4 PAX

$$P: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$$

$$e \mapsto P(e)$$

$$1. P(\Omega) = 1$$

$$2. \text{ Si } e_1 \cap e_2 = \emptyset \quad \text{incompatible}$$

$$\text{Alors } P(e_1 \cup e_2) = P(e_1) + P(e_2)$$

P "naturelle"

$$P(e) = \frac{\text{nb CF à } e}{\text{CP}}$$

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$e = \{1, 3, 5\} \quad P(e) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(1) = \frac{1}{6} = P(2)$$

6 résultats équiprobables

$$P(1 \text{ et } 2) = 0 \quad \text{incompatibles}$$

$$P(1 \text{ ou } 2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$A \times 2$

$$P(\Omega) = \frac{6}{6} = 1 \quad CF = CP$$

$$P(\emptyset) = 0$$

Propriétés



$$P(e_1 \cup e_2) = P(e_1) + P(e_2) - P(e_1 \cap e_2)$$

And or the two

$$P(\emptyset) = 0$$

$$P(\bar{e}) = 1 - P(e)$$



$$\begin{aligned} P(e_1 \cap e_2) &= P(e_1) \times P(e_2 | e_1) \\ &= P(e_2) \times P(e_1 | e_2) \end{aligned}$$

$$S1 \quad P(\emptyset) = 0 \text{ or } P(\Omega) = 1$$

et val P strictement compris en 0 et 1

E_1 indep

$$e_1 e_2 \Leftrightarrow P(e_2 | e_1) = P(e_2)$$

$$\text{ou } \underline{P(e_1 \cap e_2) = P(e_1) \times P(e_2)}$$

Relative

5 Compléments

$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est probalisable

! P définit ...

$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est "probalisable"

"naturelle" quelque

Cas général

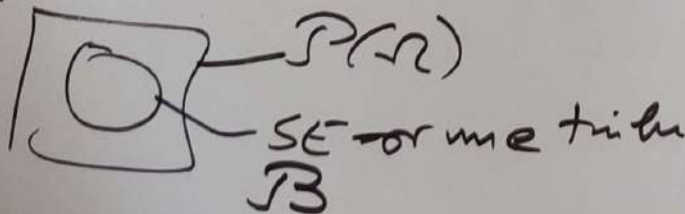
Si étudie qu'une certaine catégorie é
interne qu'a certaines parties

notion En parties possible

certaines P_S (ou un modèle ou P_A

P_S de TRIBU

~~$P(\Omega)$~~



Loi

1) $\Omega \in \mathcal{B}$

2) $\forall e \in \mathcal{B}: \bar{e} \in \mathcal{B}$

3) $\forall e, e' \in \mathcal{B}: e \cup e' \in \mathcal{B}$

$(\Omega, \mathcal{B})$

tribu de $\mathcal{P}(\Omega)$

"le + possible"

$(\Omega, \mathcal{B}, P)$

1 $\mathcal{B}$ tribu de $\mathcal{P}(\Omega)$

2 $P: \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$

$e \mapsto P(e)$

$\forall e \in \mathcal{A}$

$P(\Omega) = 1$

$e_1 \cap e_2 = \emptyset$

$\Rightarrow P(e_1 \cup e_2) = P(e_1) + P(e_2)$

ex $\mathcal{B} = \{ \emptyset, \underbrace{\{1, 3, 5\}}_{e_1}, \underbrace{\{2, 4, 6\}}_{e_2}, \Omega \}$

$P(\emptyset) = 0$

$P(e_1) = P(e_2) = \frac{1}{2}$ $P(\Omega) = 1$

Probabilité qui concerne pairs
en bloc

pairs ou impairs