Rappels & Compléments (GERER)

I PUISSANCES

· Puissance d'un nb

n fois

= 1000 etc...

GERER ABREGE MATH

Rappels & Compléments

t de i facteurs
ls les valeurs
is i = 1 jusqu'à
i = n

Rappels & Compléments (Calcul)

I PUISSANCES

· Puissance d'un nb

Soit a nb algébrique

$\boxed{a \cdot a \cdot a \ldots \text{ n fois}}$

"puissance n^e de a"

a élevé à la puissance n

$\boxed{a^n = a \cdot a \cdot a \ldots \text{ n fois}}$

exposant

$\boxed{a^1 = a}$

. Puis de 10

$10^3 = 1000$ etc...

$$\prod_{i=1}^{i=1} a_i$$

on effectue le produit de i facteurs égaux à a, pr tts les valeurs de i, depuis $i = 1$ jusqu'à $i = n$

1000 exposant puis = nb zéros

1 l H_2O > $\underline{3.10^{22}}$ molec

3 — 22 zéros

· Prod de 2 puis

$a^2 \; a^3$

$a^2 \times a^3 \qquad a^5$

$$\boxed{a^m . a^n = a^{m+n}}$$

$$a^m . a^n . a^p = a^{m+n+p}$$

· Puis d'une puis

$$(a^m)^n = a^{m.n}$$

÷ · $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\quad m > n$

· Puis zéro $\quad \frac{a^n}{a^n} = \boxed{1 = a^{n-n} = a^0}$

$\underline{\underline{\forall a}}$

· exposant négatif

$$\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}$$

$$= \frac{a\cdot a\cdot a}{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a} = \frac{1}{a\cdot a} = \frac{1}{a^2}$$

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

· puiss nég de 10

$$10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

$$10^{-3} = 0{,}001$$

nb de zéros qui précèdent chiffre 1 y compris celui avant virgule

$$0{,}0000\underline{75} = 75\times10^{-5}$$

• Racines

a^n —> inversement

supposons que nous connaissions la puiss n° de a

, soit $a^n = B$

chercher le nb qu'il a fallu x n fois par lui m̂ pour obtenir B

ce nb qui s'écrit a est la racine n° d B

calcule de puiss

$$B = a^n$$

$$\sqrt[n]{B} = a$$

$$\sqrt[n]{B} \cdot \sqrt[n]{B} \cdot \sqrt[n]{B} \ldots n \text{ fois} = B$$

rac élevat puis extract racine

• Si B quelconque, il peut se faire qu'aucun nb entier ou fractionnaire = ~~rationnel~~ ne soit une sol de $\sqrt[n]{B}$

↳ irrationnels $\sqrt{2} \simeq 1{,}414$ | aussi que

$\pi = 3{,}1416$

$e \simeq 2{,}718$

CP $\sqrt[2]{B} = \sqrt{B}$

$$\sqrt{B} \cdot \sqrt{B} = B$$

règle signes $\sqrt{}$ tjs positif

que $\sqrt{B}$ soit lui-même positif ou négatif

=> par conv. nbs positifs ont ses racines carrées

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

$\sqrt{-1}$ imaginaire

$$\sqrt[n]{a^{n}} = \sqrt[n]{a^{n}} \cdot \sqrt[n]{e} \; n \; \underline{\underline{pair}} = a^{n}$$

· exposant fractionnaire

d'après règle + puissance

$$a^{1} = a^{(1/2+1/2)} = a^{1/2} \cdot a^{1/2}$$

mais d'après déf $\sqrt{}$ $a = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a}$

on peut donc écrire

$$\boxed{\sqrt[(2)]{a} = a^{1/2}}$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

$$\sqrt[n]{a^{p}} = (a^{p})^{1/n}$$

$$= a^{p/n}$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

$$\sqrt[n]{a^{p}} = a^{p/n}$$

Conclusion

→ généralité + convention
∀ val entières ou fractionnaires
+^ves ou -^ves sur n

{ → étendue aux val inst de n
a^{π} calcul avec log

II Logarithmes — Gr. illu... géom

D classique notation notion puissance

Supposons que nous connaissions le réel B de la puiss n^e d'un nbre

$$\underline{B = a^n}$$ → logarit de B ds le système base a

$$\underline{n = \log_a B}$$

le log d'un nb ds un sys de base a est donc l'exposant de la puis à laquelle il faut élever la base pr obtenir ce nb.

exposant de la base!

Sys base 10 logarit de 1000

c.a.d 10^3 sera 3

$$B = a^n \longleftrightarrow n = \log_a B$$

Rem si nous prenons $\underline{a\ +^{ve}}$

B sera tjs $+^{if}$, m̄ pr les

val $-^{ves}$ de n

Il en résulte que, ds ces conditions,

seuls les nbs $+^{ves}$ auront des logarit

2° $\forall a \quad a^0 = 1$

* → logarit de $\underline{1}$ est zéro quelque soit la base

3° $a = a^1$

* $\underline{\text{logarit (base) tjs}} = 1$ quelque soit la base

∄ syst logarit

∀ nb a + ifs peut servir de base

à un syst logarit.

dominant base 10

"

vulgaire

$\log_{10} = \log$

∀ nb + F ⟷ son log représenté

par N une certaine puissance de 10

$N = 10^x$

$x = \log N$

ln base $e = 2{,}71828$ Naturels

ou hyperboliques

quadratation

Log

"

Ln

L

$N \longleftrightarrow$ Ln representi per uno
certeni punto su e

$$N = e^{x}$$

$$x = \ln N$$

Loi ⟷ neperien

Lirami ℰ ml

- Log 1 produit

$$B = a^{n} \quad n = \log_a B$$

$$C = a^{m} \quad m = \log_a C$$

$$B \cdot C = a^{n} \cdot a^{m} = a^{n+m}$$

$$\log_a B \cdot C = m + n$$

$$\boxed{\log_a B \cdot C = \log_a B + \log_a C}$$

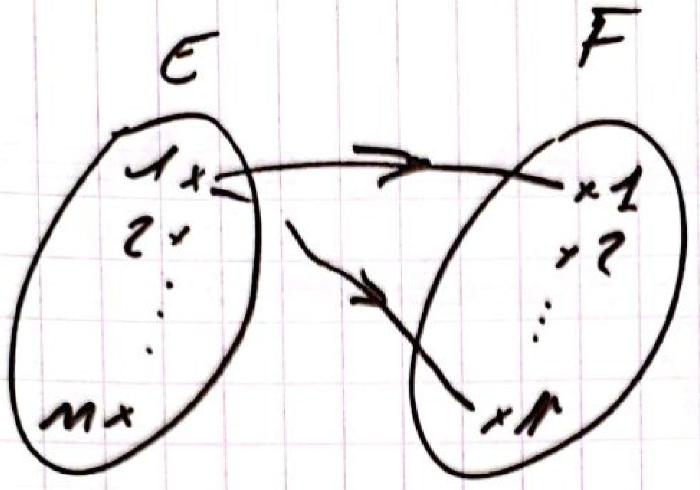
P Log

$\log \frac{A}{B} = \log A - \log B$

$\log 1/B = -\log B$

$\log A^n = n \log A$

$\log \sqrt[n]{B} = \log B^{1/n} = 1/n \log B$



- nb applicat° possibles de E ds F

p^n applications $E \longrightarrow F$

$$\underbrace{p \times p \times \cdots \times p}_{n \text{ termes}}$$

(III) Analyse Combinatoire

dénombrements — P, C, A

card E = n

• Permutations

1	2	3	4	5
a	b	c	d	e

n objets

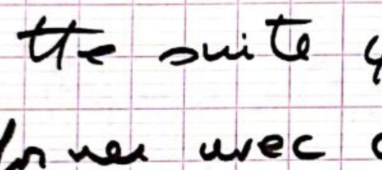
Nb de bij possibles de E sur lui m̂

tte suite que l'on peut former avec ces n objets en modifiant simplement l'ordre de ces objets

a b c d

a c b d

b a c d



reste n-1 objets

Supposons que nous connaissions

P_{n-1}

n'importe lequel des n objets

a, b, c peut être placé dans la case

1 réalisant chaque fois une P

nouvelle.

donc $P_n = n \times P_{n-1}$

n-1 objets,

$$P_{n-1} = (n-1) P_{n-2}$$

$$P_n = n.(n-1) P_{n-2}$$

$$P_{n-2} = (n-2).P_{n-3}$$

$$P_n = n.(n-1).(n-2).P_{n-3}$$

→ 1 seul objet ou seule case

donc 1 seule P possible

$$P_n = \cancel{1}\, n.(n-1)(n-2), \dots, 3, 2, 1$$

$n! = 1.2.3 \dots n$

$\boxed{P_n = n!}$

• C-A

- Parmi les n objets précédents proposons nous d'en choisir $r < n$
- Tout groupe de r objets ≠, tq par ex (en supp^T $r=3$) abc bcd que l'on peut former à partir des n objets ~~[illegible]~~ présents est une C de n objets pris r à r
- chacun des groupes de r objets peut ê rangé à son tour suivant un ordre donné des cases numérotés de 1 à r

abc < abc, bac, bc. ordre A des n objets pris r à r

- nb A ← C n'est pas autre chose que le nb de P possibles avec r sont P_r
- On pourra en faire bien autant en tant qu'il y a de C

$$\longrightarrow \boxed{A_n^r = C_n^r \times P_r}$$

· Calcul de A_n^r elts pris parmi

[nb injectives possibles $n \longrightarrow r$]

- choisissons premier objet a.
il en reste n-1 parmi lesquels nous devons choisir r-1 objets
- Supp que ns con A_{n-1}^{r-1}
- choix 1er objet peut se faire de n façons ≠ $A_n^r = n A_{n-1}^{r-1}$

- raisᵗ rᵗ fesgon

$$A_{n-1}^{r-1} = (n-1) A_{n-2}^{r-2}$$

$$A_n^r = n \cdot (n-1) \cdot A_{n-2}^{r-2}$$

$$\boxed{A_n^r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}$$

- Calcul $C_n^r = \dfrac{A_n^r}{P_r}$

nbr parties à r élts ensemble card E = n

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!} \times \frac{(n-r)!}{(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

• Formule du binôme

$(a+b)^n =$

$a^n + k_1 a^{n-1} b + k_2 a^{n-2} b^2 + \dots$

C.A.T.

- tous les possibles des n facteurs en prenant chaque fois un des termes de chaque binôme
- en réalité, parmi ces A_s, P ne nous intéressent pas.
  a^2b ba^2 -> seul C intervient
- coef du terme de rang r sera donné par C_n^r

$= a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^r a^{n-r} b^r + \dots$

Adapt. syn.

$+ b^n$

$$C_n^1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n}{1!}$$

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b \quad \dots \quad + b^n$$

$n \downarrow$ \ $r \to$	0	1	2	3	4
1	1	1			
2	1+2	1			
3		…			
4					

IV Suites Séries Dvp

- Suite

une ... qui se succèdent

suivant une loi ...

... de nombres

- naturelle ... : 1, 2, 3, ... n
- Inverse 1, 1/2, 1/3 1/n
- progression arith = harmonique

  1, 3, 5, 7 raison = 2
- prog géom

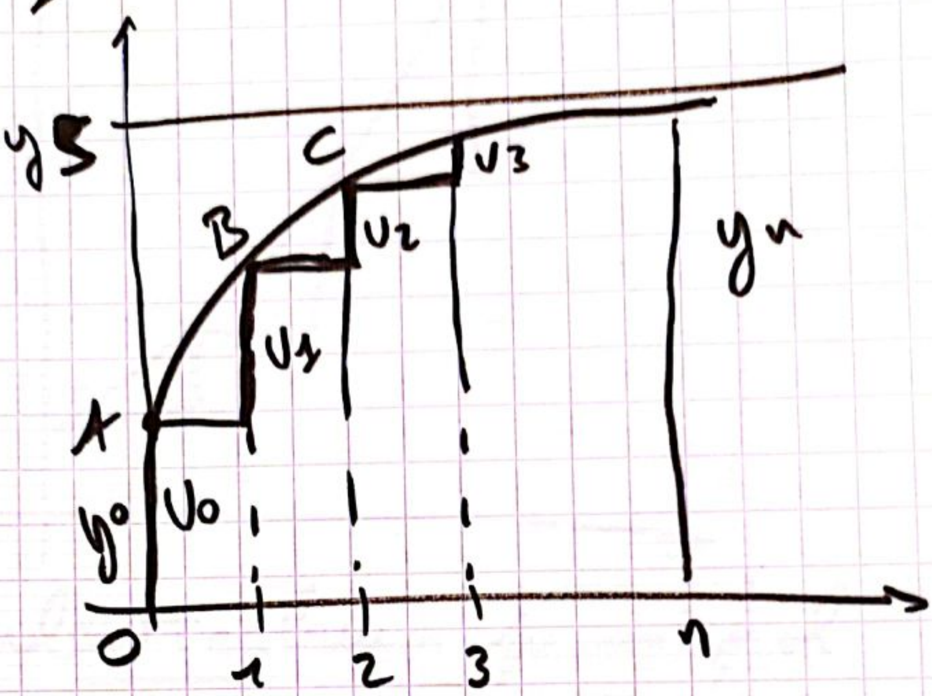
  1, 2, 4, 8 X etc...

Chaque terme affecté un n° ordre = rang

T ou U

$T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$

• int^{n} géom



$y_0 = U_0$

$y_1 = U_0 + U_1$

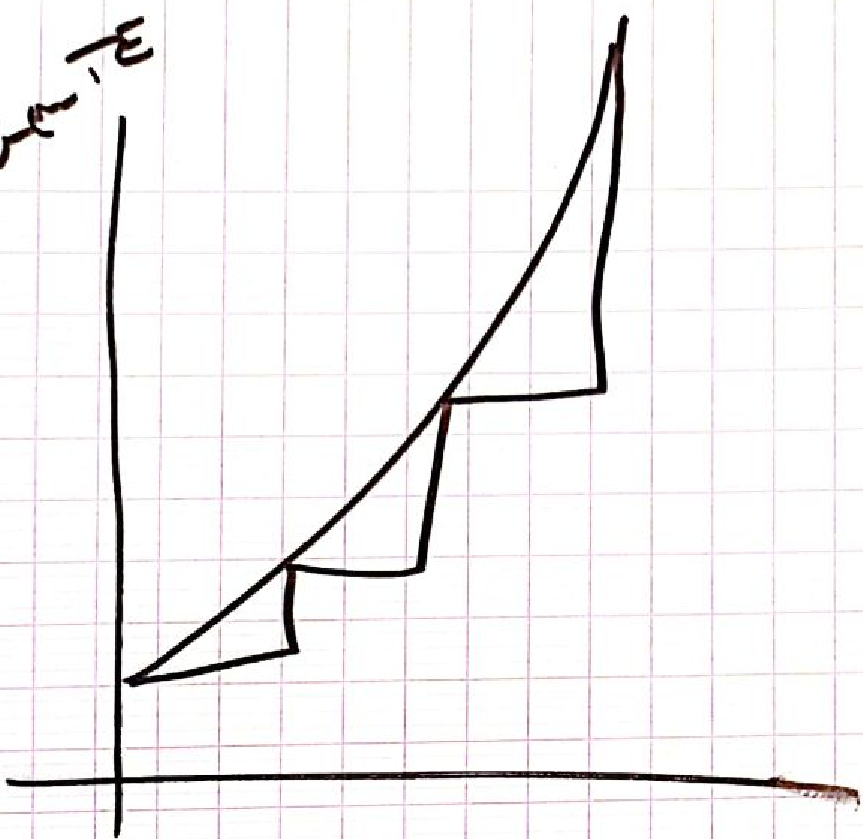
$y_2 = U_0 + U_1 + U_2$

$\vdots$

$y_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$

série convergente en ordonnée yS
en représente la lim

DIVERGENTE



- <u>Formule Maclaurin pr un pol</u>

on montre qu'il est possible sous certaines conditions, de mettre un pol $f(x)$ sous la forme d'une <u>suite</u> dont termes successifs sont représentés par les dér suc f' f'' f'' de $f(x)$.

- Soit en effet

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n$

$f'(x) = 0 + a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + n a_n x^{n-1}$

$f''(x) = 0 + 0 + 2a_2$

$f^n(x) = \dots\dots + \dots + n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1.a^n$

Cherchons ce que deviennent ces expressions pour la val $x = 0$

$f(0) = a_0$

$\vdots$

$f^n(0) = n(n-1)(n-2)\dots a_n = a_n . n!$

$a_0 = f(0) \quad a_1 = \frac{f'(0)}{1!} \quad a_n = \frac{f^n(0)}{n!}$

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^n(0)$$

Suite termes succ

. Formule Maclaurin proprement dite

f quelconque
à condition qu'elle soit déf., cont
et indéfiniment dérivable
sur un int comprenant le réel
0 ou la variable

~~Condit~~ Hyp complétée par

$$\left[x^{n+1}/(n+1)!\right] \cdot f^{n+1}(\theta x)$$

"terme complémentaire"

aussi petit
que l'on ~~veut~~ voudra

$\longrightarrow 0$ en int. lorsque x

$\rightarrow$ forme générale

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^n(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(\theta x)$$

Dvpt d'une f en série entière

-> permet donc de mettre sous forme

de pol une f quelconque pourvu

qu'elle soit déf, cont et indéfiniment

dér sur un int autour de la

valeur 0 de la var:

On dit alors qu'on a développé

cette f en série entière autour de

la val 0 de la var

- Intérêt cette transformation

vient de ce que les pol ont des manières

en part facile les dériver, sols

intégrer alors que ñ forme ...

D'autre part, il sont possible

d'écrire -> pol approche approche

aussi près que ~~po~~ désiré
"approche f par un pol"
et par suite de la calculer
avec tte approx^n désiré
— En théorique il conviendrait
de prouver à chaque fois que la
série est bien Cvr et que Σ
série est bien = à f ∀x
compris ds l'int de convergence
• Dvpt en série de sin x et cos x
$\sin' x = \cos x \quad \cos' x = -\sin x$
$\overline{\text{Dvpt}}$ sin x ↓

$f(x) = \sin x \;,\; f(0) = 0$
$f'(x) = \cos x \;,\; f'(0) = 1$
$f''(x) = -\sin x \;,\; f''(0) = 0$
$f^5(0) = 1$

pt départ

au ordre pairs sont nulles
impairs elt + +1 ou −1

en reportant ces val ds formule
Maclaurin

$$\sin x = 0 + \frac{x}{1!} + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} \dots$$

$$= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots$$

intérêt x suff^t petit

négligeons certains termes

~~cos~~ $\cos \alpha \# 1 - \frac{\alpha^2}{2}$

voisin de zéro

• Dvpt $1/(1+x)$ & $\frac{1}{1-x}$

$$1 - x + x^2 - x^3 \ldots \qquad 1 + x + x^2 + x^3 \ldots$$

donc possible pr petits val de x de remplacer $1/(1+x)$ ~~ex~~ par $1-x$
$1+x$

• Dvpt e^x

$$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \ldots$$

pr $x = 1 \rightarrow e^x = e$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \ldots$$

• Séries de Fourier — dvpt en série fonctions périodiques

T période

ν fréquence $= \frac{1}{T}$

f sinusoïdale $\frac{T}{T}$ ν

T/2 T/3 egalement période T

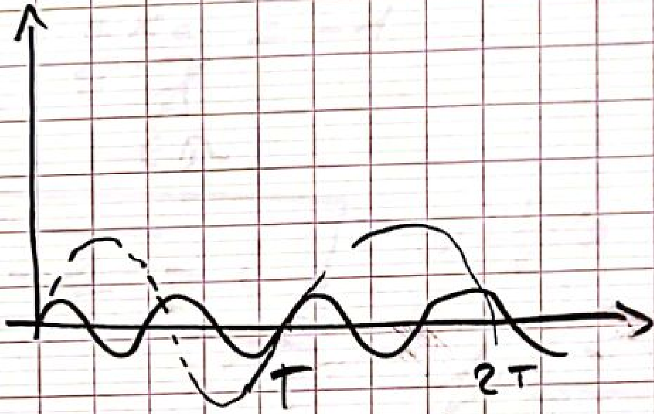
ν FNALE FONDAMENTALE

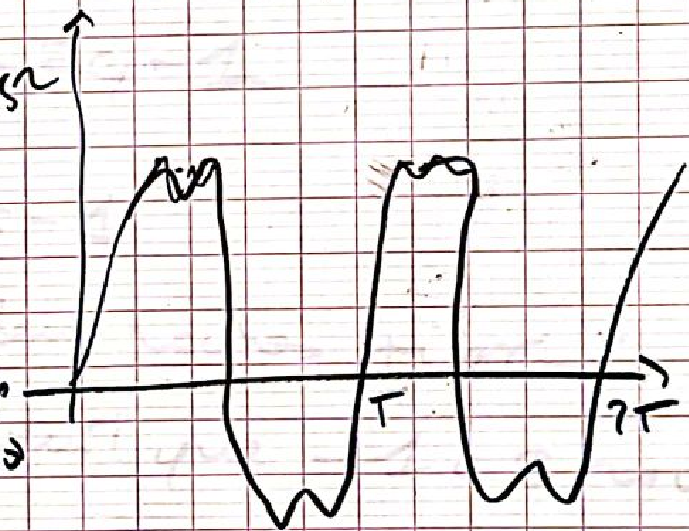
f sin freq 2ν 3ν

= harmoniques successifs de la freq fond

Si on superpose plus fs sinus.

inversement on montre qu'une f périodique complexe quelconque peut ê décomposée en som de sinus & cosinus portant sur les harmoniques ~~...~~ successifs de la freq fond





$f(x) = a_0 + a_1 \sin x + a_2 \sin 2x$

"série de Fourier"

coef

dont

tels que

en harmoniques

analyse harmonique de la fonction

V imaginaires

. intro hist

règle signes seuls nbs positifs

$- \times - = +$
$+ \times + = +$

pourraient avoir un rac carrée

-1 $\quad a \times a = -1$

$\not\in \mathbb{Z}$

$\in \mathbb{R}$

2e 3e °

$$\boxed{\sqrt{-1} = i}$$

artifice calcul

↓

formule

- Racines de -1

$i^2 = -1$

or a deux racines $+i$ et $-i$

on en déduit que -1 a 2 racines

<u>imaginaires</u> qui sont

$$+i = +\sqrt{-1}$$
$$-i = -\sqrt{-1}$$

- Rac nb négatif a négatif

$$a = -|a|$$
$$= (-1) \times |a|$$

$$\rightarrow \sqrt{a} = \sqrt{(-1) \times |a|}$$
$$= \sqrt{-1} \times \sqrt{|a|}$$

$$= i\sqrt{|a|}$$
$$= -i\sqrt{|a|}$$

tt nb algébrique négatif possède 2 racines imaginaires

- Sol équa° 2nd degré

$ax^2 + bx + c = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

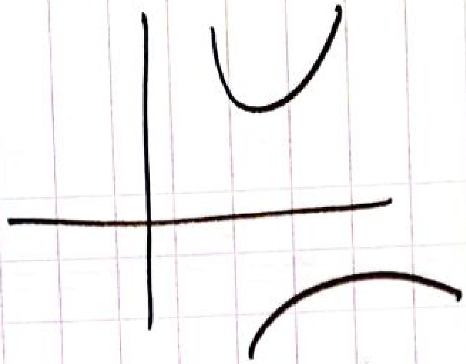
> 0

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

pts intersect° axe des x

$\Delta < 0$



admet 2 rac imaginaires

$+i\sqrt{|\Delta|}$ ou $-i\sqrt{|\Delta|}$

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a}$$

T fond' alg ∀ pol degré n
admet n rac réelles ou imag.
"Alembert"

• Nbs complexes à tort imaginaires

$z = a + ib$

nbs algébriques

• Module $| \ |$ *

$\rho^2 = a^2 + b^2$

dernier cas
$b = 0$

d'où $\rho^2 = a^2$

$\rho = \sqrt{a^2} = |a|$

aussi symbolisé $|\rho|$ $|\rho|$

$|\rho| = \sqrt{a^2+b^2}$

- imaginaire conjugué

$z = a + ib$

$z^* = a - ib$ } même module

- Opérations séparer partie réelle / imaginaire

$z + z' = (a+a') + i(b+b')$

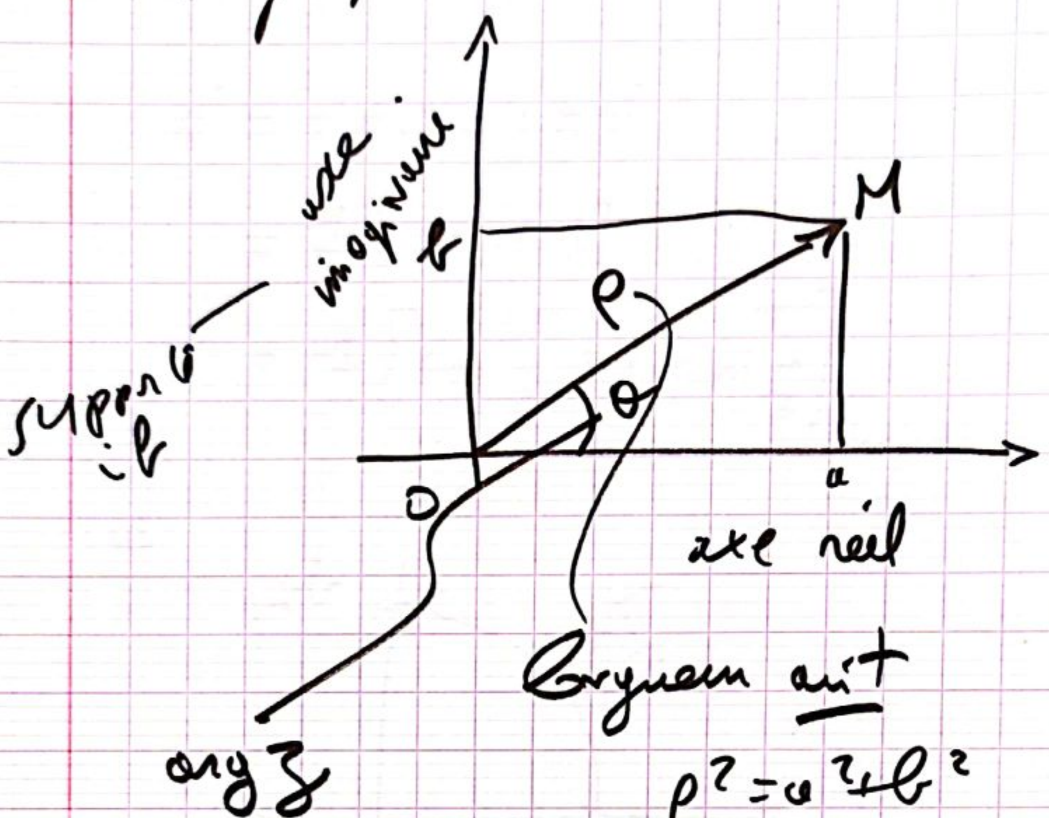
- $-$ $-$ $-$

$\times \; = (a+ib)(a'+ib')$

$z \cdot z' = (aa' - bb') + i(ba' + ab')$ $i^2 bb'$ $= -1$

$z / z' = \left(\frac{aa' + bb'}{a^2+b^2}\right) \left(i \frac{ab' - ba'}{a^2+b^2}\right)$

• Rep^{n} graph



$\rho^2 = a^2 + b^2$

• exp^{n} trigo

$a = OM \cos\theta = \rho \cos\theta$

$b = OM \sin\theta = \rho \sin\theta$

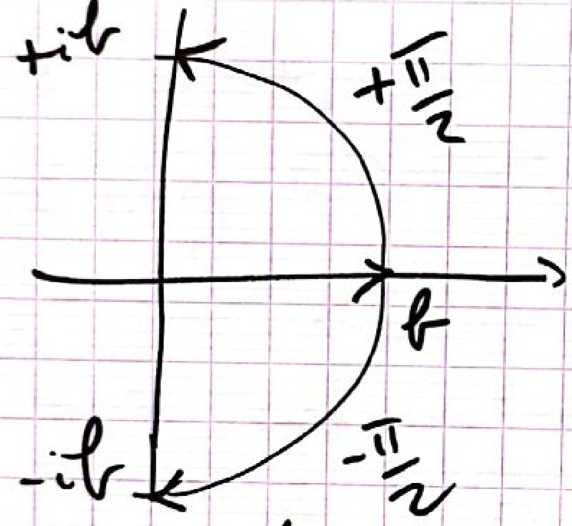
$z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$

• $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$

- Significa° géomé° "imaginaire"

$$i = 1 \times 0 + i \times 1$$
$$= 1\,[0 + i \cdot 1]$$
$$= 1\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right]$$

ex



- exponentielle imaginaire

e^{ix} exp ix

$i^2 \to -1$

$$= 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \dots$$

$$= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \dots$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$ module 1

imaginaire de x — arg x

Simplifier calculs trigo

$y = a\cos x$

$z = y + ai\sin x$

$= a\cos x + ai\sin x$

$= a(\cos x + i\sin x)$

$= a\exp^{ix}$

cos → exp im.

• Sol imag ED 2nd ordre

eq° car r_1 r_2

$\Delta > 0$ cas contraire

$r_1 = -\frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

$r_2 = \quad -$

sin amorti

• aut application