Vous manquez de bases ! dit souvent le professeur.

C'est bien souvent de là que proviennent les échecs aux examens du B.E.P.C. et du BAC : connaissances fragmentaires, ignorance des données de base, difficultés à construire un développement cohérent, une argumentation, un raisonnement.

La collection « Les Bases » se propose, dans chaque discipline et pour chaque classe, d'assurer la formation des élèves.

Elle leur fournit des moyens simples et cohérents pour réussir à leurs examens :

- rédiger avec clarté et pertinence une composition française ou un commentaire de texte,
- traduire intelligemment une version,
- parvenir logiquement à la solution d'un problème.

La collection « Les Bases » :

- **rappel des connaissances de base,**
- **recherche des méthodes de travail simples et efficaces,**
- **entraînement aux exercices et sujets d'examens.**

Un auxiliaire indispensable pour vous assurer LES BASES DE LA REUSSITE.

170307

LES BASES DES MATHS

G. WALUSINSKI

comment réussir

BAC

LES BASES DES MATHS

en classes terminales

FERNAND NATHAN

GILBERT WALUSINSKI

LES BASES DES MATHS

en
classes terminales

FERNAN

Dans la collection « **Les Bases** » :

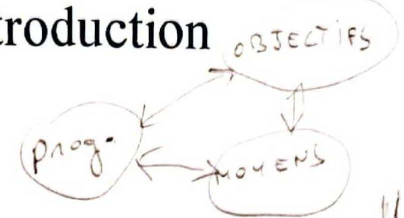
- Les Bases du Français en 2e et 1re, par **B. Lecherbonnier.**
- Les Bases des Maths en 3e, par **Cl. Lassave.**
- Les Bases des Maths en Terminale, par **G. Walusinski.**

Les Bases des bases

c'est le livre que vous avez eu maintenant !

10 ans !

Introduction



« Les terres les plus riches sont celles que l'on n'atteint qu'en dernier lieu et qu'avec le plus grand effort. »

André Gide

Ne cherchez pas, dans ce petit livre, le contenu d'un manuel mais plutôt une méthode susceptible de vous aider dans votre travail :

— **à dégager ce qui est essentiel dans les programmes;** 1
— **à préciser quels peuvent, quels doivent être vos objectifs;** 2
— **à analyser et tester les meilleurs moyens de les atteindre.** 3

Si vous considérez seulement ces pages comme un recueil de recettes qui réussissent, de recettes pour réussir, j'aurai échoué. Si vous parvenez au contraire à y puiser les éléments **d'une pratique intelligente et efficace,** le désir de comprendre et de vous perfectionner par vous-même, alors ces pages n'auront pas été inutiles.

Analysons le sommaire. Vous pouvez y distinguer trois parties :

- **La première** *(page 4)* envisage l'étude mathématique d'un peu haut. On croit peut-être perdre son temps; en réalité, on s'apprête à voyager avec sa tête et pas seulement avec ses jambes. Ici, dans le domaine mathématique, on ne doit pas seulement savoir faire mais *comprendre,* ce qui conduit à savoir comment travailler.
- **La seconde** essaye de fixer quelques règles de conduite, que faut-il **savoir** en mathématiques, comment **bien chercher,** comment **utiliser ses connaissances?** c'est la partie essentielle du livre; il est normal qu'elle soit la plus longue *(page 12).*
- **La troisième** réunit quelques **conseils pratiques,** ou bien pour s'informer, ou bien pour communiquer. *(Page 73.)*

1) Savoir faire – comprendre – comment travailler

2) Règles de conduite
– que faut-il savoir ?
– bien chercher
– utiliser connaissances

3) Conseils pratiques
– info
– communication

« Faire des mathématiques! »

« L'essence des mathématiques est leur liberté. »

Georg Cantor

Au niveau des Terminales, que faut-il entendre par l'expression « faire des mathématiques »?

Pour l'élève cela peut signifier simplement étudier. Dans ce sens, on « fait des mathématiques » comme « on fait du français », comme « on fait de l'anglais » ou « de la physique ». Et personne, parmi nous, ne méprise ce genre d'étude; on n'invente ni Shelley, ni Racine, ni la conjugaison du verbe être ni la formule de cos $(a+b)$. Mais, en ce sens, « faire des math », c'est étudier des mathématiques de confection, faites, construites par d'autres.

Pourquoi n'en construirions-nous pas, nous, c'est-à-dire vous et moi, ou bien vous ou moi? C'est d'ailleurs ce que nous faisons plus ou moins consciemment; on a pu dire que chacun se construit sa propre mathématique, l'élève de maternelle aussi bien que le mathématicien du Collège de France et par conséquent l'élève de Terminale aussi bien.

> Il ne s'agit donc pas de l'étude un peu passive ou contemplative d'une mathématique toute faite mais de l'élaboration personnelle d'une conception mentale.

Avoir une idée de cette activité mathématique nous aidera à « faire des math » au sens restreint d'étudier.

En résumé. 2

Il y a plusieurs acceptions pour l'expression « **faire des math** » : celle d'étudier des mathématiques toutes faites, celle de construire la mathématique dont on a besoin.

1 **Le cycle de l'activité mathématisante** décrit cette construction.

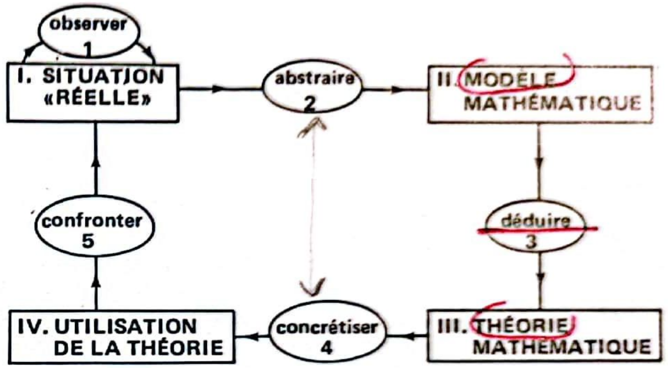
Ce qui permet de comprendre l'expression « faire des math » et pourquoi il est faux d'opposer concret et abstrait, pourquoi il est aussi insensé d'opposer des mathématiques qui seraient classiques à d'autres qui seraient modernes.

2 **La méthode axiomatique** est un exemple typique des conceptions fécondes de la mathématique actuelle.

Ces données établies, nous comprendrons alors ce qu'il faut entendre, effectivement, par « **faire des mathématiques** » **quand on est élève de Terminale.**

Le cycle de l'activité mathématisante

Toute création mathématique peut être décrite comme une succession de cycles tels que celui figuré dans le schéma suivant :



INDUIRE

Commentaire de ce schéma.

Cinq verbes :

1 *observer,*
2 *abstraire,*
3 *déduire,*
4 *concrétiser,*
5 *confronter,*

représentent des actions qui servent de transition entre quatre ÉTATS :

I. situation « réelle »,
II. modèle mathématique,
III. théorie mathématique,
IV. utilisation de la théorie.

Les flèches indiquent le sens de progression. Une fois amorcée à partir d'observations, l'activité est cyclique, elle continue, la confrontation étant une sorte d'observation. Parcourons le cycle en détail.

Au départ, **une situation réelle** (I), c'est-à-dire assez familière pour que celui qui l'observe sache l'appréhender dans son ensemble ou tout au moins l'explorer, l'inventorier, en manipuler les éléments. Vous penserez à des exemples vécus. Par exemple, en Troisième vous avez étudié des fonctions numériques du premier degré. Puis vous avez étudié les fonctions du deuxième degré. A partir de ces exemples familiers, vous avez formé le concept plus général de fonction (pas nécessairement numérique). Dans cette étude, les fonctions les plus simples constituent à vos yeux une « **réalité observable** » (I), à partir de laquelle vous dégagez un concept plus général. D'abord **observer** (1), mais pour **abstraire** (2) c'est-à-dire oublier ce qui paraît secondaire, particulier, propre à tel ou tel exemple de fonction pour ne retenir que l'essentiel, ce qui est jugé tel.

Aboutir ainsi à des définitions simples (si possible), aussi clairement précisées que possible, énoncer des règles qui seront considérées comme vraies pour les éléments de l'ensemble étudié : les axiomes du **modèle mathématique** aussi constitué (II).

Avantage présenté par ce modèle : débarrassé des détails qui font la richesse de la réalité mais aussi l'aspect confus sous lequel elle nous apparaît souvent, le modèle mathématique se prête au raisonnement logique. A partir des définitions posées et des axiomes adoptés, on peut **déduire** (3) des propositions vraies, des résultats nouveaux; on démontre des théorèmes qui sont vrais pour les éléments du modèle si et seulement si les règles de la déduction ont été correctement appliquées. Grâce à un effort d'attention, de rigueur et d'imagination, le mathématicien déjà un peu moins apprenti (bien qu'il le reste toujours) construit un ensemble de résultats vrais pour le modèle considéré, il construit **une théorie mathématique** (III) ou tout au moins il amorce cette construction. En général, de nombreux développements sont possibles, on ne les épuise pas; on pressent des résultats intéressants qu'on ne sait pas démontrer, alors on formule des **conjectures...**

Tout cela est satisfaisant pour l'esprit et, dans beaucoup de cas, les chercheurs en mathématique pure se contentent de poursuivre le développement de la théorie par goût de la recherche et de la théorie abstraite. Mais il est également instructif et attrayant de chercher comment **concrétiser** (4) la théorie, comment en **utiliser** les résultats dans une **situation réelle** (IV). Il arrive qu'une théorie abstraite convienne parfaitement à traduire toute une réalité physique, sociologique ou économique; c'est le vaste domaine des mathématiques appliquées.

Seulement, il arrive aussi souvent que tout ne va pas pour le mieux quand on **confronte** (5) les résultats de ces mathématiques appliquées à la réalité observable. Il y a des résultats qui « collent », d'autres qui s'écartent un peu de la réalité, d'autres enfin qui sont en contradiction avec les résultats des observations. Confronter, c'est d'abord établir cette classification des résultats de la théorie. Alors la réalité observée au départ, s'est enrichie de résultats nouveaux découverts logiquement sur le modèle abstrait et de questions nouvelles.

Sur cette réalité enrichie, un nouveau cycle d'activité mathématisante peut commencer... Vers un nouveau modèle plus complexe, vers une nouvelle théorie plus riche...

Retrouvez, ce schéma de l'activité mathématisante dans l'évolution qu'a suivie votre pensée dans le cours de vos années d'étude. Par exemple, les divers ensembles de nombres : des dénombrements quand vous appreniez à compter aux équations du type $x^2+x+1=0$ à résoudre dans $\mathbb{C}$. Ou bien ce que vous appeliez droite et plan dans une première conception intuitive de la géométrie et ce que vous appelez ainsi, maintenant, dans un espace affine associé à un vectoriel de dimension trois construit sur les réels. Vous réfléchirez à d'autres exemples.

CURIOSITÀ

Une activité complète

Le schéma précédent met en évidence le caractère très complet d'une activité mathématisante : les cinq verbes correspondent à cinq actions qui mobilisent et développent des facultés de l'esprit très différentes les unes des autres.

Observer : il faut être curieux et attentif; il est permis de « manipuler » une certaine réalité, de tâtonner, ...; qualités qui sont celles des sciences expérimentales et des sciences d'observation.

Abstraire c'est aussi inventer; le modèle mathématique est une création de l'esprit.

Déduire, c'est faire fonctionner l'esprit logique; on a confondu souvent « faire des math » et « démontrer des théorèmes » alors que ces démonstrations ne sont qu'un épisode de l'action mathématique; épisode essentiel cependant si on veut bien admettre qu'il n'y a qu'en mathématique qu'on démontre.

Concrétiser est indispensable; les plus belles théories, les plus riches en théorèmes, ne sont pas moins belles quand elles se traduisent en résultats utilisables dans d'autres théories ou dans certaines situations réelles. La mécanique de Newton n'a rien perdu de sa beauté quand, grâce à elle, Clairaut a prévu le retour de la comète de Halley (1758) ou quand Einstein a prévu qu'elle n'expliquait pas des inégalités dans le mouvement de Mercure autour du Soleil (1917) : on a trouvé, à ces occasions, certaines limites de sa validité.

DIMOSTRAZIONE

Confronter les résultats de la théorie aux réalités observés, cela demande du soin d'abord puis une grande rigueur intellectuelle.

Pour toutes ces raisons, « faire des math » participe à la formation de l'esprit.

Reconnaissons aussi qu'une opposition « concret-abstrait » dont on parle souvent (au lieu de dire « tel sujet d'étude est difficile » on a tendance à dire « il est trop abstrait »), que cette opposition *n'a pas de sens.* Pas de mathématique sans abstraction; pas de théorie mathématique sans concrétisation, c'est dans le domaine de l'abstraction que la mathématique se développe mais c'est par la concrétisation qu'elle reprend son inspiration; un peu à la manière d'Antée qui reprenait vigueur en touchant terre.

Profitons de ces remarques pour régler son compte à la soi-disant opposition de mathématiques qui seraient « classiques » et d'autres qui seraient « modernes ». Les premières seraient celles qui étaient enseignées aux niveaux universitaires avant

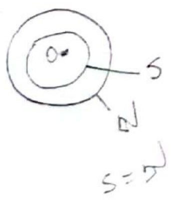
1940, les autres celles qui utilisent explicitement les concepts et le vocabulaire de **la théorie des ensembles** et qui mettent en relief **les structures.** Les modernes seraient plus abstraites que les classiques.

Les mathématiques dites classiques ont constitué la partie forte de la formation des ingénieurs au XIX[e] siècle et au début du XX[e] (« math de Grand'Papa », c'est-à-dire géométrie synthétique ou analytique, calcul différentiel et intégral). Les mathématiques dites modernes attribuent à l'algèbre une place fondamentale qui absorbe la plus grande partie de la géométrie « classique »; les concepts de la topologie englobent ce qui était auparavant approche presque intuitive de l'analyse. Il y a donc réorganisation de l'architecture d'ensemble, non opposition.

Pour conclure, on pourrait dire : les mathématiques sont classiques par leur contenu, modernes par leur présentation, leur construction. **Les mathématiques que nous étudions sont classiques et modernes.**

La méthode axiomatique

Depuis Euclide, l'idée qu'on se faisait des axiomes a évolué. La conception moderne de l'axiomatique illustre la pensée de Cantor placée en épigraphe de ce chapitre : le mathématicien est libre de poser **a priori** tout système d'axiomes pourvu qu'il soit non-contradictoire; la théorie qu'il développe ensuite est celle du **modèle mathématique** défini par ce système d'axiomes. En fait, la liberté de création, d'invention peut être guidée par l'observation d'une certaine situation; ce n'est pas obligatoire; le caractère non-contradictoire du système est au contraire essentiel.



Exemple typique de cette conception, l'axiomatique de Peano dont voici une interprétation dans notre langage usuel :

P1. Zéro est un naturel.
P2. Si a est un naturel, le successeur de a noté $a\cdot$, est un naturel.
P3. Zéro n'est le successeur d'aucun naturel.
P4. Deux naturels qui ont des successeurs égaux sont égaux.
P5. Si zéro est élément d'un sous-ensemble S de naturels, si tout successeur d'un élément de S est élément de S, alors S est égal à l'ensemble $\mathbb{N}$ des naturels (axiome de récurrence).

Peano a montré *(Arithmetics principia novo methodo exposita, Torino 1889)* qu'à partir de ces axiomes et grâce à des définitions simples de l'addition, de la

multiplication et de l'exponentiation, on retrouve toutes les propriétés des naturels. Rappelons la définition de l'addition pour souligner le soin de la construction :

$+ : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$(x,y) \mapsto x+y$
$(x,0) \mapsto x+0=x$

ex : $(1+2)' = 4$
$1+2' = 1+3$

Au couple (x, y) de naturels, l'addition fait correspondre le naturel somme noté $x+y$ tel que :

1. $x+0=x$ (zéro est neutre à droite);
2. si la somme $x+y$ est supposée définie, alors $(x+y)' = x+y'$ (la somme $x+y$ étant supposée définie, le successeur de cette somme est la somme de x et du successeur de y).

On démontre alors pas à pas, ou plutôt petits pas à petits pas toutes les propriétés de l'addition des naturels. De même pour les autres opérations et finalement pour toute l'arithmétique des naturels. Construction méticuleuse et très lente mais rigoureuse à partir des axiomes clairement formulés.

Dans le même esprit, David Hilbert publia en 1899 à Goettingen, son livre *« Grundlagen der Geometrie »* (Les fondements de la géométrie) où, reprenant les livres d'Euclide, il en critiquait la formulation et l'agencement pour en donner un exposé plus rigoureux après formulation explicite d'un système d'axiomes.

Le recours à la méthode axiomatique est un des caractères du style moderne des mathématiques : il consiste à s'efforcer dans un cadre bien précisé, de construire une théorie de manière rigoureuse, sans faute logique.

Impossible, en classe terminale, d'avoir l'ambition de construire (ou de reconstruire) toutes les mathématiques.

Par morceaux, on peut s'approcher de cet idéal.

Exemple : à partir de l'axiomatique de Peano, retrouver les propriétés de l'addition, de la multiplication, de l'exponentiation des naturels.

Autre exemple : connaissant les systèmes d'axiomes des structures algébriques de groupe, d'anneau et de corps, comprendre les raisons qui nous font distinguer les divers ensembles de nombres, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

Autrement dit :

1. **Dans l'étude du cours** c'est-à-dire des grands sujets de nos programmes respectifs (C, D ou E), sachons reconnaître les axiomes posés; les théories prendront ainsi leur cohérence et il sera plus facile d'en mémoriser les principaux résultats.

2. **Dans la recherche des exercices ou des problèmes,** inquiétons-nous d'abord dans le cadre de quelle théorie ils s'inscrivent; cela ne suffit pas à trouver toutes les réponses mais ignorer ces théories interdirait de trouver le moindre résultat.

les groupes
les ensembles
l'algèbre
Analyse

Documents

1. **Sur le mot «démontrer».** Lorsque Cézanne disait : *«Celui qui me démontrera que la Joconde est un chef-d'œuvre, je lui paie un litre!»* n'exprimait-il pas, sous une forme humoristique, ce qui était affirmé plus haut : il n'y a qu'en mathématique qu'on démontre?

2. **Clairaut dans ses Élémens de géométrie** publiés en 1741, écrivait :
«Quoique la géométrie soit par elle-même abstraite, il faut avouer cependant que les difficultés qu'éprouvent ceux qui commencent à s'y appliquer, viennent le plus souvent de la manière dont elle est enseignée dans les Elémens ordinaires. On y débute toujours par un grand nombre de définitions, de demandes, d'axiomes et de principes préliminaires, qui semblent ne promettre rien que de sec au lecteur. Les propositions qui viennent ensuite ne fixant pas l'esprit sur des objets plus intéressants, étant d'ailleurs difficiles à concevoir, il arrive communément que les Commençans se fatiguent et se rebutent, avant que d'avoir aucune idée distincte de ce qu'on voulait leur enseigner.

... Quelques réflexions que j'ai faites sur l'origine de la géométrie, m'ont fait espérer d'éviter ces inconvéniens, en réunissant les deux avantages d'intéresser et d'éclairer les Commençans. J'ai pensé que cette Science, comme toutes les autres, devait s'être formée par degrés, que c'était vraisemblablement quelque besoin qui avait fait faire les premiers pas, et que ces premiers pas ne pouvaient pas être hors de la portée des Commençans, puisque c'étaient des Commençans qui les avaient faits.»

3. **Albert Einstein, dans un célèbre discours** prononcé le 27 janvier 1921 devant l'Académie des Sciences de Berlin, énonça cette proposition :

«Pour autant que les propositions de la mathématique se rapportent à la réalité, elles ne sont pas certaines, et pour autant qu'elles sont certaines, elles ne se rapportent pas à la réalité.»

Puis dans le même discours (reproduit dans son livre *«La géométrie et l'expérience»*) il donna cette interprétation moderne de la géométrie et plus généralement de la méthode axiomatique :

«La géométrie traite d'objets qui sont désignés par les termes de droite, point, etc. Aucune connaissance quelconque ou intuition de ces objets n'est supposée; la seule chose qu'on suppose est la validité des axiomes... qui doivent être conçus comme purement formels, c'est-à-dire dépourvus de tout contenu intuitif ou accessible à l'expérience. Ces axiomes sont des créations libres de l'esprit humain. Toutes les autres propositions géométriques sont des déductions logiques des axiomes... Ce sont les axiomes qui définissent en premier lieu des objets dont traite la géométrie...

... Cette conception des axiomes, qui est représentée par l'axiomatique moderne, débarrasse la mathématique de tous les éléments qui ne lui appartiennent pas, et dissipe ainsi l'obscurité mystique qui enveloppait jadis les fondements de la mathématique.

Une telle exposition épurée rend de même évident que la mathématique comme telle est incapable d'énoncer quoi que ce soit, ni sur les objets de la représentation intuitive, ni sur la réalité.»

Quand le lecteur méditera sur le texte d'Alexis Clairaut et sur le texte d'Albert Einstein, il n'oubliera pas que Clairaut veut enseigner la géométrie à des débutants alors que Einstein s'adresse à des savants. D'autre part, en 1921, on n'avait plus de la science en général et de la mathématique en particulier les mêmes conceptions qu'au XVIIIe siècle. Il y a pourtant dans ces deux textes des éléments d'illustration du schéma introduit plus haut.

4. **Une conjecture célèbre.** Pierre Fermat (1601-1665) a énoncé l'assertion suivante : pour n entier supérieur à 2, l'équation $x^n + y^n = z^n$ est impossible dans l'ensemble des entiers et, puisqu'elle est homogène, dans l'ensemble des rationnels. Jusqu'à présent, personne n'a pu démontrer que cette assertion est vraie ou qu'elle est fausse. C'est la conjecture de Fermat. ah bon ok !

Les connaissances indispensables

« Je respecte trop la petite part du savoir que je possède, qui m'a coûté tant de peine à acquérir, pour y introduire des éléments douteux. »

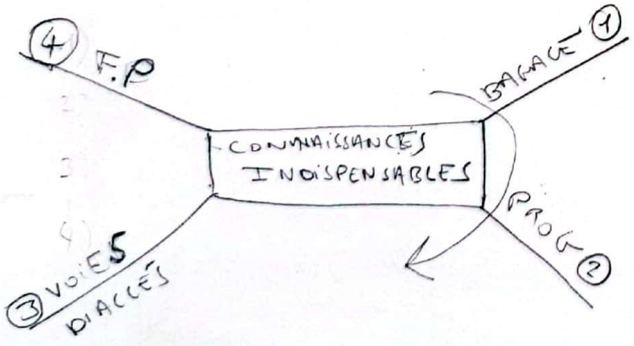
Georges Bernanos

1 Dans ce chapitre, après un temps de réflexion et avant un travail important, nous examinerons des questions d'équipement. Essayons, ensemble, de dresser le tableau des connaissances mathématiques acquises avant la Terminale. C'est **le bagage** indispensable de l'apprenti-mathématicien que vous êtes, ~~élève de Terminale~~.

2 Nous dégagerons ensuite, dans **les programmes** des diverses sections « scientifiques » de cette classe quels sont les points forts; ce qui vous aidera à fixer quels seront vos objectifs dans l'étude détaillée que vous devrez poursuivre.

3 Par quelles **voies d'accès?** S'informer (les cours, les livres) et réfléchir (comprendre, apprendre pour savoir, chercher).

4 Le **fichier personnel**, le F.P., est un outil recommandé pour qui s'engage dans une étude mathématique.



Le bagage

Nous dressons ici un tableau résumé des connaissances acquises avant la Terminale. Je ne peux être dans la tête de chaque lecteur; chacun aura donc la charge de compléter ce que, selon lui, j'omets. C'est dire que je n'écris qu'un minimum, celui que j'estime commun à tous.

Une notation importante : j'utilise le signe $\longmapsto$ pour lier deux propositions synonymes, que l'une soit exprimée en français et l'autre en langage formalisé, ou toutes deux en langage formalisé; $\longmapsto$ signifie donc ici aussi bien : « ... est traduit ... » que : « ... est logiquement équivalent à ... ».
Exemples :

X est l'ensemble vide $\longmapsto$ $X=\varnothing$

$$\neg(p\wedge q) \longmapsto (\neg p)\vee(\neg q).$$

ENSEMBLES

Un ensemble fini :

$$X=\{a,b,c,d\};\ a\in X;\ f\notin X;\ \{a,b\}\subset X.$$

Un ensemble infini $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\dots,n,n+1,\dots\}$; vous notez les deux usages des points de suspension; ce sont les derniers qui expriment qu'il existe une infinité de *naturels*.

$$X\subset E \longmapsto X\in\mathscr{P}(E)$$

on écrit aussi $\mathscr{P}(E)=2^E$, deux notations de l'ensemble des parties de E.

$X\subset E$; $X^c=\{x\in E \mid x\notin X\}$; $X\cap X^c=\varnothing$; $X\cup X^c=E$
$X^c=E\setminus X$

$X\subset E,\ Y\subset E$; $X\cap Y=\{x\in E \mid x\in X \text{ et } x\in Y\}$
$X\cup Y=\{x\in E \mid x\in X \text{ ou } x\in Y\}$
$X\setminus Y=\{x\in E \mid x\in X \text{ et } x\notin Y\}=X\cap Y^c.$

- Formules de De Morgan $(X\cap Y)^c=X^c\cup Y^c$; $(X\cup Y)^c=X^c\cap Y^c$.
- Produit cartésien de deux ensembles, ensemble de couples :

$$E\times F=\{(x,y) \mid x\in E \quad \text{et} \quad y\in F\}.$$

Ensembles et logique

fait tel que important

$$X=\{x\in E \mid p\} \longmapsto$$

X est la partie de E pour les éléments de laquelle la proposition p est vraie.

$$X^c=\{x\in E \mid \neg p\} \qquad Y=\{x\in E \mid q\}$$
$$X\cap Y=\{x\in E \mid p\wedge q\}; \qquad X\cup Y=\{x\in E \mid p\vee q\}.$$

Formules de De Morgan (négation d'une conjonction, négation d'une disjonction) :

$$\neg(p\wedge q) \longmapsto (\neg p)\vee(\neg q);\quad \neg(p\vee q) \longmapsto (\neg p)\wedge(\neg q).$$

Quantificateur universel : $X=E \longmapsto \boxed{\forall x\in X,\ p}$ qui se lit :

« pour tout élément de X p est vraie ».

Quantificateur existentiel : $X\neq\varnothing \longmapsto \boxed{\exists x\in X,\ p}$ qui se lit :

« il existe ~~au moins~~ un élément de X pour lequel p est vraie ».

Négation d'une proposition quantifiée :

$$\neg(\forall x, p) \longmapsto \exists x,\ \neg p\ ;\ \neg(\exists x, p) \longmapsto \forall x,\ \neg p.$$

Implication : $p \Longrightarrow q \longmapsto (\neg p)\vee q$ qui se lit :

« *p implique q* » ou « *si p, alors q* ».

Implications conjuguées : $(p \Longrightarrow q) \longmapsto (\neg q \Longrightarrow \neg p)$ DC

i directe $\longmapsto$ *i* contraposée Ri

$(q \Longrightarrow p) \longmapsto (\neg p \Longrightarrow \neg q)$

i réciproque ou converse $\longmapsto$ *i* inverse

équivalence

Double implication : $(p \Longrightarrow q)\wedge(q \Longrightarrow p) \longmapsto p \Longleftrightarrow q \longmapsto p$ ssi q

ssi se lit « *si et seulement si* » et s'écrit en anglais iff qui se lit « *if and only if* ».

Pratiquement : ssi $\longmapsto \Longleftrightarrow$ ssi $\longmapsto$ ces trois signes ont donc la même signification; selon les circonstances, l'un est plus commode que l'autre. $\Longleftrightarrow$

Déduction : $p\wedge(p \Longrightarrow q) \longmapsto (p \vdash q)$

p vraie et *p* implique *q* signifie « *de p je déduis q* ». VRAI

+ commode gain de temps

cf n40

Fonctions

f, fonction définie dans un ensemble E et à valeurs dans un ensemble F, notée :

$$f: E \longrightarrow F,\quad x \longmapsto f(x).$$

Pour l'**argument** x, il existe une **valeur** $y=f(x)$ au plus. $\mathcal{D}_f$ = domaine ou ensemble de définition de f, sous-ensemble des éléments de E pour lesquels il existe une valeur de f.

On dit alors : f est une application de $\mathcal{D}_f$ dans F (ou vers F).

Image de $f = \operatorname{Im} f = \{y\in F \mid \exists x\in E,\ y=f(x)\}$; l'image de f est le sous-ensemble des éléments de F qui ont des antécédents par f.

f est **injective** ssi $(f(x)=f(x') \Longrightarrow x=x')$. AN (+)

f est **surjective** ssi $\forall y\in F,\ \boxed{\exists x\in\mathcal{D}_f}\ y=f(x) \longmapsto \operatorname{Im} f = F$. AN (−)

f est **bijective** ssi f est injective et surjective.

 3 éléments ordonnés

RELATIONS

Relation $\mathcal{R}=(E,F,G)$, E = ensemble de départ, F = ensemble d'arrivée, $G\subset E\times \cancel{E}$ F = graphe de $\mathcal{R}$:

$$(x,y)\in G \longmapsto x\mathcal{R}y.$$

On peut considérer une relation $\mathcal{R}$ comme une certaine application de E×F dans l'ensemble des valeurs de vérité {vrai, faux}.

$$E\times F \longrightarrow \{\text{vrai, faux}\} = \{1, 0\}$$
$$(x,y) \longmapsto 1 \longmapsto x\mathcal{R}y$$
$$(x,y) \longmapsto 0 \longmapsto \neg\ (x\mathcal{R}y).$$

Relation dans E ssi E = F.

$\mathcal{R}$ est un **préordre** dans E ssi $\mathcal{R}$ est **réflexive** (1) et **transitive** (2) :

(1) $\forall x\in E\quad x\mathcal{R}x$

(2) NB NOTATO $\forall x,\forall y,\forall z\quad x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Longrightarrow x\mathcal{R}z.$

$\mathcal{R}$ définit un **ordre** dans E ssi $\mathcal{R}$ est un **préordre antisymétrique** (3) :

(3) $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Longrightarrow x=y$

$\mathcal{R}$ définit une **relation d'équivalence** dans E ssi $\mathcal{R}$ est un **préordre symétrique** (4) :

(4) $x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x$

$\mathcal{R}$ relation d'équivalence dans E $\longmapsto$ $\mathcal{R}$ définit une partition de E notée $(X_1, X_2 \dots)$, les parties ou classes X_i de la partition vérifiant :

$$X_1\cup X_2\cup\dots\cup X_n = E,\qquad X_i\cap X_j=\varnothing \text{ ssi } i\neq j$$

et pour tout i $X_i\cap X_i\neq\varnothing$

Xi

$x\mathcal{R}y$ ssi $\exists X_i$ telle que $x\in X_i$ et $y\in X_i$.

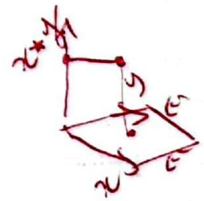
STRUCTURES ALGÉBRIQUES

$(E,\star)$ est un groupe $\longmapsto$ les axiomes I à V suivants sont vérifiés :

I. $E\neq\varnothing$.

II. $\star$ est le symbole d'une loi de composition interne dans E, c'est-à-dire une application de E×E dans E qui s'écrit :

$$\star: E\times E \longrightarrow E,\quad (x,y) \longmapsto x\star y.$$



III. La loi $\star$ est **associative** :

$$\forall x,y,z\quad (x\star y)\star z = x\star(y\star z)$$

donc on peut tolérer l'écriture $x\star y\star z$.

IV. Il existe un élément neutre e pour la loi $\star$:

$$\forall x\quad x\star e = e\star x = x.$$

V. Tout élément du groupe a un inverse :

$$\forall x \ \exists x' \qquad x \star x' = x' \star x = e.$$

Au lieu de noter l'inverse x', on écrit aussi x^{-1}.

Lorsque la loi est notée $+$, au lieu de inverse, on dit symétrique ou opposé.

Remarque : lorsque la loi $\star$ est commutative, le groupe est dit commutatif ou abélien.

$$\forall x, y \qquad x \star y = y \star x. \quad !? \quad x \star y = y \star x$$

On dit que le groupe est fini et d'ordre n si E compte n éléments distincts.

Exemples de groupes : $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}^*, \times)$; il existe deux groupes d'ordre 4, le groupe des rotations du carré et le groupe de Klein dont voici les tables :

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Groupe des rotations du carré ou groupe cyclique d'ordre 4

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Groupe de Klein

Anneau $(E, \star, \perp)$ E est muni d'une structure d'anneau par les deux lois de composition interne notées $\star$ et $\perp$ ssi les axiomes suivants sont vérifiés :

I. $(E, \star)$ est un groupe commutatif.

II. La loi notée $\perp$ est associative.

III. La loi notée $\perp$ est distributive par rapports à la loi notée $\star$, c'est-à-dire :

$$\forall x, \forall y, \forall z \qquad x \perp (y \star z) = (x \perp y) \star (x \perp z).$$

L'anneau est dit **unitaire** ssi il existe un élément neutre f pour la loi notée $\perp$.

L'anneau est dit **commutatif** ssi la loi $\perp$ est commutative.

Exemples d'anneaux : $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif et unitaire; l'ensemble des polynomes à coefficients réels est un anneau pour les lois de l'addition et de la multiplication.

Corps $(E, \star, \perp)$, anneau unitaire dont tout élément, sauf le neutre e pour la loi $\star$, a un inverse (pour la loi $\perp$).

Exemples de corps : le corps des rationnels $(\mathbb{Q}, +, \times)$; le corps des réels $(\mathbb{R}, +, \times)$.

Les deux corps précédents construits sur des anneaux commutatifs sont des corps commutatifs. Il existe des corps non commutatifs, ceux dont la deuxième loi n'est pas commutative (exemple, le corps des quaternions, si vous le connaissez).

Vectoriels $\mathcal{V} = (E, \mathbb{R})$: E est un ensemble dont les éléments sont ici appelés des **vecteurs;** $\mathbb{R}$ est le corps des **scalaires.** (On peut définir des vectoriels sur d'autres corps commutatifs.)

$\mathcal{V}$ est un vectoriel sur $\mathbb{R}$ ssi les axiomes suivants sont vérifiés :

I. E est muni d'une loi additive qui en fait un groupe commutatif. $+$

II. Il existe une loi de composition externe à opérateurs réels telle que :

$E \times \mathbb{R} \to E$

$$\begin{array}{rcl} (E, \mathbb{R}) & \longrightarrow & E \\ (\vec{v}, \alpha) & \longmapsto & \vec{w} = \alpha \vec{v} \end{array}$$

$(\mathbb{R}, +, \times)$

$\mathbb{K}$

et la loi externe est telle que :

$$\begin{array}{lll} & 1\vec{v} = \vec{v} & \\ \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, & \forall \vec{v} \in E, & \alpha(\beta \vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v} \\ \forall \alpha \in \mathbb{R} & \forall (\vec{v}, \vec{v}') \in E \times E & \alpha(\vec{v} + \vec{v}') = \alpha\vec{v} + \alpha\vec{v}' \\ \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, & \forall \vec{v} \in E & (\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}. \end{array}$$

Exemples de vectoriels : $\mathbb{R}^2$ ensemble des couples de réels, $\mathbb{R}^3$ ensemble des triplets de réels.

NOMBRES

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$, l'ensemble des naturels; l'addition et la multiplication sont deux lois de composition interne associatives et commutatives; la multiplication est distributive par rapport à l'addition; la relation « inférieur ou égal à », notée $\leqslant$, munit $\mathbb{N}$ d'un ordre total.

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, l'anneau des entiers (commutatif et unitaire); également ordonné totalement par la relation $\leqslant$.

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ le corps des rationnels; il est partout dense pour l'ordre (si a et b sont deux rationnels distincts et $a < b$, il existe au moins un rationnel x tel que $a \leqslant x \leqslant b$).

$\mathbb{D}$, l'anneau des décimaux, inclus dans le corps des rationnels mais différent de lui (il existe des rationnels non décimaux comme $1/3$).

$\mathbb{R}$, le corps des réels est totalement ordonné et archimédien (quel que soit le réel a, quel que soit le réel b supérieur à zéro, il existe un naturel n tels que $a < nb$).

FONCTIONS NUMÉRIQUES

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Les fonctions du premier degré :

$$\begin{array}{rcl} f_{a,b} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_{a,b}(x) = ax + b. \end{array}$$

M	A	
G	ANI	
A	ANIC	A
C	ANIC	ANI

Si $b=0$, la fonction est dite linéaire de coefficient a.

Si $b\neq 0$, la fonction est dite affine. Le graphique d'une fonction affine est une droite. Toute fonction affine non constante est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Les fonctions du second degré :

$$\begin{array}{lcl} g_{a,b,c} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (a\neq 0) \quad x & \longmapsto & g(x)=ax^2+bx+c. \end{array}$$

Le graphique d'une fonction du second degré est une parabole. g est une fonction à minimum ssi $a>0$, à maximum ssi $a<0$.

Les fonctions homographiques :

$$\begin{array}{lcl} h : \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (c\neq 0) \quad x & \longmapsto & h(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d} \end{array}$$

h est une fonction non définie pour $x=-\dfrac{d}{c}$.

Le graphique d'une fonction homographique non constante est une hyperbole dont les asymptotes sont les droites d'équations :

$$cx+d=0 \qquad \text{et} \qquad cy-a=0.$$

Opérations sur les fonctions : soient f et g deux fonctions définies respectivement sur E et F sous-ensembles de réels. $f+g$, $f\cdot g$ et af (avec a réel donné) sont des fonctions définies les deux premières sur $E\cap F$, la troisième sur E par :

$$\forall x\in E\cap F \quad (f+g)(x)=f(x)+g(x); \qquad (f\cdot g)(x)=f(x)\times g(x)$$
$$\forall x\subset E \quad (af)(x)=a\times f(x).$$

La première et la troisième loi munissent l'ensemble des fonctions numériques d'une structure de vectoriel sur les réels.

$h : E \longrightarrow F$
$x \longmapsto h(x)$

Homomorphismes

h est un homomorphisme du groupe $(E,\star)$ dans le groupe $(F,\perp)$ ssi h est une application de E dans F telle que :

$$h(x\star y)=h(x)\perp h(y).$$

Image de $h=\operatorname{Im} h=\{t\in F \mid \exists x\in E \quad t=h(x)\}$.

Noyau de $h=\operatorname{Ker} h=\{x\in E \mid h(x)=f\}$ où f est le neutre du groupe $(F,\perp)$.

Isomorphisme = homomorphisme bijectif.

Endomorphisme = homomorphisme dans lequel $E=F$.

Automorphisme = endomorphisme bijectif.

Formes bilinéaires dans le vectoriel $\mathbb{R}^2$

Forme bilinéaire alternée : $\varphi(\vec v,\vec v\,')=\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}=xy'-yx'$

$\vec v$ et $\vec v\,'$ sont linéairement indépendants ssi $\varphi(\vec v,\vec v\,')\neq 0$.

Forme bilinéaire symétrique ou produit scalaire : BOURBAKI

$$\vec v\cdot\vec v\,'=(\vec v \mid \vec v\,')=xx'+yy'.$$

Norme euclidienne de $\vec v=\|\vec v\|=\sqrt{(\vec v\mid\vec v)}=\sqrt{x^2+y^2}$

$$\|\vec v\|=0 \text{ ssi } \vec v=\vec 0; \quad \|\lambda v\|=|\lambda|\times\|v\|.$$

Formule de Schwarz : $|(\vec v\mid\vec v\,')|\leqslant\|\vec v\|\cdot\|\vec v\,'\|$.

Formule de Minkowski : $\|\vec v+\vec v\,'\|\leqslant\|\vec v\|+\|\vec v\,'\|$.

Endomorphisme de $\mathbb{R}^2$

h est une application linéaire ou un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ ssi

$$\forall\vec v,\forall\vec v\,' \quad h(\vec v+\vec v\,')=h(\vec v)+h(\vec v\,'); \quad \forall\lambda\in\mathbb{R} \quad h(\lambda\vec v)=\lambda h(\vec v)$$

(i,j) base canonique de $\mathbb{R}^2$: et

$$\forall\vec v,\ \exists!(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad \vec v=x\vec\imath+y\vec\jmath$$

h est complètement déterminée par $h(\vec\imath)=a\vec\imath+b\vec\jmath$ et $h(\vec\jmath)=c\vec\imath+d\vec\jmath$.

Alors on peut écrire matriciellement :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{ce qui signifie} \quad \begin{cases} x'=ax+cy \\ y'=bx+dy \end{cases}$$

h est un automorphisme ssi $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}\neq 0$.

Composition des endomorphismes h et k de matrices m et μ : matrice de

$$k\circ h=\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha a+\gamma b & \alpha c+\gamma d \\ \beta a+\delta b & \beta c+\delta d \end{pmatrix}.$$

Automorphismes orthogonaux ssi $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=\varepsilon$ où $\varepsilon\in\{+1,-1\}$

$\varepsilon=+1$ rotation vectorielle de matrice

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$\varepsilon=-1$ symétrie vectorielle de matrice

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Remarque très importante :

Voir dans la nomenclature précédente seulement un aide-mémoire pour élève de Terminale serait une grave erreur; seul le fichier personnel dont la constitution est expliquée plus loin peut jouer ce rôle. On s'est contenté de rappeler ici ce qui doit être connu du lecteur, à charge pour lui, s'il a des doutes, de se reporter à son cours de Seconde ou de Première.

Incidemment, cela nous a aussi permis de préciser des notations qui seront employées dans la suite.

Le programme

Bien sûr, aucune partie du programme d'une section n'est à négliger : c'est le propre d'un programme (tout au moins dans la conception actuelle des programmes de mathématiques) d'énoncer ce qui doit être étudié. Surtout dans une classe d'examen. Aussi parce que la bonne connaissance du programme au niveau n facilite en principe et souvent en pratique l'étude au niveau $n+1$.

Cependant, il y a dans tout programme un squelette ou si vous préférez un noyau autour duquel l'ensemble s'organise. Dégager des programmes de chaque section C, D ou E, ce noyau ou si vous préférez encore les lignes de force, tel est le but de ce paragraphe.

En Terminale C

Neuf chapitres importants.

1. Arithmétique : à partir de la division euclidienne de a par b ($a=bq+r$ et $r \leqslant b-1$), on définit les congruences d'*entiers* (vive l'arithmétique dans $\mathbb{Z}$!); d'où la théorie de la divisibilité et des éléments de la « théorie des nombres ».

Rangeons aussi dans ce chapitre quelques éléments de combinatoire c'est-à-dire des dénombrements.

2. Calcul des approximations : on doit très bien savoir calculer avec des réels et, en particulier leurs approximations décimales.

3. Les complexes : leur définition à partir des matrices à coefficients réels de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$; ce qui conduit à leur interprétation géométrique (grâce à la géométrie des angles et à celle des similitudes planes); les angles, vive la trigonométrie. Remarque : l'utilisation géométrique des complexes est la source de très nombreux exercices.

4. Fonctions d'une variable réelle : limites, différentielles et dérivées; étude de nombreuses fonctions algébriques; extension à des fonctions vectorielles (dérivée vectorielle). Donc application à la cinématique.

5. Calcul intégral et application à des calculs d'aires et de volumes; de moments d'inertie aussi, pourquoi pas?

6. Fonctions logarithmiques et exponentielles qui conduisent à de nombreux exercices sur des limites, des dérivations et des intégrations.

7. Le calcul barycentrique et ses nombreuses applications.

8. Éléments de géométrie analytique plane : les droites, les transformations (isométries et similitudes), quelques notions sur les coniques.

9. Espaces probabilisés finis : variables aléatoires; épreuves répétées.

Insistons sur les chapitres 1, 3, 4 et 6. Pour remarquer aussi que si 3 paraît être un chapitre d'algèbre, beaucoup d'exercices s'y rapportant auront une allure géométrique : un des avantages de ce programme est d'apprendre à se méfier des classifications trop strictes. D'autre part, dans le « noyau » ainsi résumé, l'expression « espace vectoriel » ne figure pas; elle est pourtant présente dans presque tous les chapitres et en particulier 4, 7 et 8.

En Terminale D ou E

Dans les sections D ou E, le « squelette » précédent est à peu de choses près le même, à quelques vertèbres près. Je dis bien, le « squelette », non la « musculature » qui ne se développe pas de la même façon dans les trois sections : l'hygiène des exercices et les horaires varient.

En section D, on a le droit d'être moins exigeant sur la rigueur des constructions alors qu'on l'est tout autant sur la précision des applications. Supprimer du « squelette » les chapitres 1 et 8 au bénéfice d'une étude plus lente et plus complète des chapitres 3, 4, 5 et 6.

En section E, remplacer le chapitre 1 par un assez gros appendice au 8 : des éléments de géométrie descriptive.

Les voies d'accès et le fichier personnel

Chargé de votre bagage de connaissances (ou grâce à lui, allégé dans votre démarche), ayant une idée au moins approximative de vos objectifs, votre étude mathématique s'engage. Étudier au niveau qui est le vôtre c'est d'abord s'informer (certains disent « apprendre ») et réfléchir pour, finalement, augmenter votre savoir.

S'informer. D'abord en suivant des cours; vous y prenez des notes qui sont des repères pour les idées enrichissantes que vous retenez du cours ou des exercices faits en classe. (Voir page 74, quelques conseils sur la « prise de notes ».) Vous vous informez aussi en lisant des livres; des manuels qui vous sont spécialement destinés et alors vous devriez pouvoir assimiler facilement leur contenu; d'autres livres écrits pour un public plus large ou plus savant que celui des élèves de Terminale et la lecture est alors plus difficile (voir page 75, quelques conseils sur la lecture).

Réfléchir. Vous ne pouvez vous contenter d'une compréhension superficielle. Savoir, en mathématique, c'est d'abord comprendre et par conséquent être capable d'utiliser à bon escient les notions qu'on a comprises. Toute réflexion sur telle ou

CJ < cours / lectures / exos > F.P

telle partie du cours conduit donc à se poser des questions, à chercher des exercices, peut être même des problèmes complexes. De façon paradoxale (en apparence), savoir en mathématique est attesté par une certaine aptitude ou un certain entraînement à chercher : voir notre chapitre page 25, essentiel.

Notes de cours et notes de lectures, il y aurait intérêt à ne pas les éparpiller. Jointes à des exercices d'entraînement, elles forment la trame d'un **cahier-journal** (C.J.) dans lequel se suivent tous vos travaux. L'ordre est chronologique et rappelé par les dates écrites en marge. Le C.J. est donc le reflet de votre activité mathématique. C'est aussi à partir de son contenu que vous élaborerez votre fichier personnel, (le F.P.).

Le fichier personnel est un bon moyen, à la fois par sa fabrication que par son utilisation de savoir avec certitude sans avoir appris par cœur à la manière perroquet. Cela tient au caractère fantasque de cette qualité intellectuelle qu'est la mémoire et aussi à la nature logique des mathématiques.

On a beau se dire : « Inutile de retenir par cœur cette rengaine », on la garde en mémoire; « il faut que je retienne cet important théorème » et on l'oublie. C'est un peu comme si la mémoire aimait désobéir à celui qui se croit son maître. En réalité, elle ne veut pas être contrainte, c'est elle qui est « maîtresse à bord ».

On s'approche d'elle par des détours et la constitution d'un F.P. en est un que je recommande : il est particulièrement adapté aux mathématiques (même s'il est valable pour d'autres connaissances). Œuvre essentiellement personnelle : vous choisissez ce qui est digne d'y figurer et en rédigeant une fiche à votre façon vous commencez à la mémoriser; en la consultant, en l'enrichissant, en la corrigeant vous continuez à apprendre en profondeur. Vous n'avez plus à vous dire : « il faut que je retienne » puisque la fiche est là qui contient les résultats à retenir. A force de consulter cette fiche, vous en retenez le contenu (sa forme venant en renfort de votre mémoire visuelle).

A condition, bien sûr, que le F.P. devienne votre outil familier, votre compagnon de tous les jours.

Quelques notes sur **la fabrication** *pratique du F.P.* C'est une œuvre de longue haleine : au fur et à mesure de vos études, de vos recherches, vous fabriquez une nouvelle fiche. Ce qui justifie le choix du support : des fiches de bristol de 15 sur 10 cm, peu encombrantes et qui peuvent être rangées dans tel ordre que vous voudrez.

Voici, par exemple, une fiche sur la divisibilité dans l'anneau des entiers.

Vous y remarquerez : un titre lisible (sur un sujet réduit), la date où elle a été écrite, un contenu lisible usant de symboles dont vous comprenez le sens. Enfin, il y a de la place pour toute addition ultérieure qui vous paraîtra utile.

L'utilisation fréquente du F.P. vous fera comprendre que certaines fiches font double emploi, que d'autres finissent par ne plus rien vous apprendre puisque vous en savez tout le contenu. Le F.P. aura tendance, après avoir beaucoup grossi, à diminuer de volume. Le temps viendra où vous n'en aurez plus besoin...

CJ
FP

date 30 avril 2006!

thématique

14.10.76 **DIVISIBILITE dans Z**

□ a divise b ⟼ $a \mid b$ ⟼ $a \neq 0$ $\exists q \in \mathbb{Z}^*$ $b = aq$

□ $a \mid b$ ⟼ $b \equiv 0$ $[a]$ (b congru a zéro modulo a)

□ $a \mid b$ ⟼ $b\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z}$ ($a\mathbb{Z}$ = ensemble des entiers multiples de a)

$f : E \to F$

fondamental

Voici enfin quelques remarques supplémentaires qui vous permettront de constituer avec utilité et précision votre fichier personnel.

● Un exemple de ce qui peut constituer **l'enrichissement d'une fiche.** Vous avez appris ce qu'est la réciproque d'une bijection donnée. Voici l'extension de la notion à une fonction quelconque.

Si f est une fonction non injective définie sur un ensemble E et à valeurs dans l'ensemble F, désignons par $\mathrm{Im} f$ le sous-ensemble de F constitué par les éléments de F qui ont au moins un antécédent par f dans E.

A chaque élément de $\mathrm{Im} f$ correspond un sous-ensemble de E, celui de ses antécédents; l'ensemble de ces sous-ensembles constitue une $\boxed{\text{partition}}$ de E. On appelle **fonction réciproque de** f, cette application de $\mathrm{Im} f$ dans l'ensemble des parties de E.

On peut dire que f réalise une sélection dans F et, par voie de réciprocité, définit une partition de E donc réalise un classement dans E. L'analyse de cette situation du point de vue des dénombrements est une des clés de la combinatoire.

$f : E \to F$

● **Ne pas se contenter de ces fiches formulaires.** Il est intéressant de réunir sur une même fiche des formes différentes de la définition d'une même notion. Par exemple, en consultant divers manuels ou dictionnaires, vous reproduisez leurs façons de définir l'antisymétrie d'une relation. Ce faisant, vous apprenez ce qu'est cette antisymétrie (si vous ne le saviez pas déjà) et en même temps vous apprenez à lire d'un œil critique.

● Quand vous aurez réuni dans le F.P. un certain nombre de fiches **comparez-le avec un aide-mémoire imprimé.** Éventuellement, vous corrigerez ainsi des fautes dans votre F.P. et puis, vous apprécierez le fruit de votre effort personnel.

● Personne ne pensera qu'il est utile d'apprendre par cœur les tables d'addition et de multiplication des naturels écrits dans un système de numération de base sept. A titre d'exercice, **complétez donc les deux tables esquissés ci-dessous :**

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	10
2	2	3	4	5	6	10	11
3	3	4	5	6	10	11	
4	4	5	6	10	11		
5	5	6	10	11			
6	6	10	11				

×	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	11	13	15
3	0	3	6	12	15	21	24
4							
5							
6	0	6	15	24	33	42	51

● Vous avez fait une fiche sur les diverses opérations, sur les parties d'un ensemble, puis vous avez fait une autre fiche sur l'algèbre des événements préparatoire à l'axiomatique des probabilités. Vous comparez ces deux fiches. Ont-elles toutes les deux leurs raisons d'être? Ou bien une seule fiche suffirait-elle?

Quelques principes pour la recherche

ESSENTIEL

« ... à condition d'être vaillants et de ne pas nous décourager dans la recherche. »

Platon

Pour les Stoïciens, c'est devant l'obstacle que l'homme révèle sa valeur. C'est devant le problème, c'est dans la recherche que le mathématicien, expert ou apprenti, forge la sienne.

Mais il y a problèmes et problèmes; ce qui est problème pour un élève de Terminale ne l'était pas pour Hilbert; pour vous qui étudiez, tel exercice d'entraînement ne doit pas être confondu avec un problème d'examen. Il y a donc intérêt à classer les divers genres de problèmes.

Dans tous les cas, il faut d'abord lire attentivement **l'énoncé;** le lire, le relire, le comprendre, condition indispensable si l'on veut traiter le sujet...

Dans quelles conditions matérielles organiser la recherche? l'entourage, le bruit, l'éclairage ne sont pas indifférents; l'outillage non plus : quel papier, quelle encre; et puis, cherche-t-on en solitaire ou en équipe?

Quel est **le climat de la recherche?** Comment se préparer moralement et intellectuellement à chercher?

Les épisodes de la recherche : du déroulement normal, c'est-à-dire bousculé de brusques avances, de stagnations et de reculs à la joie de Christophe (qui aperçoit la terre) en passant par l'exploitation des fautes et le désespoir d'un blocage temporaire.

Les rédactions : ce qu'apporte la première, provisoirement définitive; la véritable mise au point.

L'épreuve de contrôle ou d'examen, ses conditions particulières, ses exigences : le temps limité, la recherche en solitaire, la rédaction.

Qu'est-ce qu'un problème?

En 1900, David Hilbert, au cours d'une célèbre conférence, énonça les vingt-trois grands problèmes que les mathématiciens du XXe siècle devaient se poser; cela allait depuis « établir la transcendance ou au moins l'irrationalité de certains nombres » jusqu'à « axiomatiser les sciences physiques dans lesquelles les mathématiques jouent un rôle important». Il est évident que pour vous, élève de Terminale, ce ne sont pas ces problèmes là qui se posent. Cependant, à un changement de niveau près quant aux connaissances et à l'expérience acquise, dans la mesure où, élève, vous êtes apprenti mathématicien, vous *vous* posez des questions; ne serait-ce qu'en reprenant les questions qu'exercices et problèmes *vous* proposent.

La grande différence entre les problèmes de Hilbert et les vôtres, c'est qu'au moment où il les formulait, le grand savant ne savait pas, pour la plupart, quelle en serait la solution ni même si la solution pouvait être trouvée. Pour les exercices ou problèmes qui vous sont proposés, vous êtes persuadés a priori qu'une solution existe. Un peu comme le détective qui recherche l'assassin et qui est assuré par la constatation du crime que l'assassin existe.

A cet égard, la position de l'apprenti-mathématicien n'est donc pas celle du mathématicien-chercheur. Certains puristes voient même un abus de langage dans l'emploi du mot «problème» pour les seulement «exercices» proposés aux élèves. Cependant, dans la recherche des solutions de ces exercices, ce sont les mêmes méthodes, les mêmes qualités de l'esprit qui sont mobilisées chez le chercheur comme chez l'apprenti. Vous pouvez donc conserver sans inquiétude le mot «problème» : tout exercice méritera d'autant mieux d'être appelé problème que dans sa formulation ou dans la situation de recherche où il vous met, il se rapproche plus d'un vrai problème de mathématiciens.

Car il y a, au niveau de la Terminale, maintes catégories d'exercices. On peut les classer d'après les objectifs qu'on choisit en vous les proposant (j'adopte ici la classification proposée par l'IREM de Strasbourg dans son étude sur les problèmes). En voici la liste avec les abréviations :

— (EE) **Exercices d'exposition;** ils ont pour but de vous faire acquérir des connaissances, par exemple en complétant un cours oral ou un chapitre du manuel;

— (P) **Problèmes proprement dit;** ils vous font beaucoup chercher, les solutions qu'ils comportent ne font pas nécessairement intervenir les derniers chapitres étudiés;

— (ED) **Exercices didactiques;** une fois acquise telle théorie, des exercices de ce genre ont pour but de vous familiariser avec les notions nouvelles, de vous entraîner à appliquer les résultats, les théorèmes démontrés dans la théorie;

— (ETT) **Exécution de tâches techniques;** ici, la difficulté est de savoir organiser son travail et d'avoir la persévérance de le mener à son terme;

— (A) **Exercices d'application;** comment transférer vos connaissances théoriques dans un autre cadre, celui des sciences physiques ou celui des sciences de la nature ou celui des sciences humaines;

— (M) **Exercices de manipulation,** où, dans une situation matérielle il faudra observer, expérimenter, bricoler, ... Ce qui vous amènera peut-être à enclancher un cycle d'activité mathématisante tel que le chapitre précédent l'a décrit...;

— (T) **Tests** ou tous exercices de contrôle dont le but est évident : vérifier que vous avez acquis des connaissances ainsi que la manière de vous en servir.

Pour les exercices de la catégorie (A), nous y reviendrons plus loin (p. 67). Pour tous les autres, avec des nuances, se posent toujours les mêmes questions : comment organiser la recherche, comment découvrir? Il n'y a pas de réponse miracle qui ferait que tout exercice aurait **automatiquement** sa solution. Heureusement car si cela était, la recherche ne serait plus une aventure ni la découverte un plaisir.

Encore une remarque, pour n'y plus revenir, sur les problème des mathématiciens. Ils cessent d'être problèmes dès qu'une réponse leur a été donnée; de même, une devinette n'en est plus une dès qu'on en connaît la réponse. Ainsi, dans l'histoire des mathématiques, les problèmes insolubles furent-ils les plus instructifs, jusqu'au jour où leur insolubilité a été démontrée ce qui arrêta évidemment toute recherche. Un exemple en est donné par le problème : *« construire avec la règle et le compas les deux demi-droites qui partagent un angle donné en trois angles égaux »*, problème dit de la trisection de l'angle. Posé par les Grecs plus de cinq siècles avant notre ère, sa recherche excita la curiosité de grandes mathématiciens tels que Pappus dans l'Antiquité, les Italiens Tartaglia et Cardano au XVI[e] siècle, Descartes et Roberval au XVII[e]. Sans qu'on résolve jamais le problème dans les conditions imposées par l'énoncé, ces recherches furent l'occasion d'inventions de courbes nouvelles ou d'études plus approfondies de courbes déjà connues. Ceci jusqu'en 1837 où le mathématicien Wantzel *démontra* que la construction n'est pas possible avec la seule utilisation de la règle et du compas (voir le détail de cette histoire dans *Mathématiques et Mathématiciens* par Dedron et J. Itard, p. 393-402).

Revenons aux exercices ou problèmes de Terminale.

L'énoncé

Dans le cas général, vous n'avez pas formulé vous-même l'énoncé, celui-ci vous est donné. La règle du jeu consiste à le prendre tel qu'on vous le donne, même si, ultérieurement, vous trouvez de bonnes raisons d'en critiquer le fond ou la forme.

Vous n'en êtes pas là. Il faut d'abord *le lire.* Complètement, même s'il comporte une suite numérotée de questions. But de cette première lecture : avoir une vue globale, panoramique de l'exercice à étudier.

Il est rare que cette première lecture soit suffisante. Relire posément en soulignant les passages importants ou obscurs (ce qui revient au même : s'ils sont obscurs pour vous, ils deviennent importants à vos yeux puisque votre travail est d'éclairer complètement la situation qui vous est proposée par l'énoncé en clair-obscur).

Avant toute recherche, vous vous efforcez de comprendre les mots ou les phrases qui vous ont parus compliqués. Vous pouvez alors analyser l'énoncé, distinguer comment ses diverses questions s'articulent entre elles. Essayons de faire cela ensemble sur les cinq exemples suivants :

Énoncé 1. Sachant qu'un naturel non nul n a pour factorisation primaire $n = p^{\alpha} q^{\beta} r^{\gamma}$, on désigne par f l'application de $\mathbb{N}^*$ dans l'ensemble des parties de l'ensemble des nombres primaires tels que :

$$n \longmapsto f(n) = \{p^0, p, p^2, \ldots, p^{\alpha}, q, q^2, \ldots, q^{\beta}, r, r^2, \ldots, r^{\gamma}\}.$$

Étudier cette fonction f.

Énoncé 2.
1. Soit F la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_1^{1+x^2} \operatorname{Log} t \, dt$$

(le symbole Log désigne le logarithme népérien.)

Calculer la dérivée $F'(x)$ de F au point x, en considérant F comme la fonction composée de la fonction $g : x \longmapsto 1+x^2$ et de la fonction $h : X \longmapsto \int_1^X \operatorname{Log} t \, dt \ (X>0)$.

2. Calculer, en intégrant par parties, l'intégrale $\int_1^X \operatorname{Log} t \, dt \ (X > 0)$. Exprimer alors $F(x)$ sans utiliser le signe d'intégration et retrouver l'expression de $F'(x)$.

(Baccalauréat C, juin 1975, Paris.)

Énoncé 3. On considère le nombre complexe :

$$z = \frac{1}{2}[\sin\varphi + i(1+\cos\varphi)]$$

où φ désigne un nombre réel variable, différent de π, appartenant à l'intervalle $[0, 2\pi]$.

1. Calculer en fonction de φ le module et l'argument de chacun des nombres z et $z' = -\frac{1}{z}$.

2. On désigne par M et M' les images respectives de z et z' construites dans le plan euclidien rapporté au repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$: déterminer l'ensemble (Γ) des points M et (Γ') l'ensemble des points M' lorsque φ varie.

(Baccalauréat, E. 1974, Rennes.)

Énoncé 4. « A propos du mot distance. » Dans le plan euclidien P rapporté au repère orthonormé (A, B, C), on pose $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On appelle distance euclidienne de deux points M et M' et on note $d(M, M')$

$$d(M, M') = \|\overrightarrow{MM'}\| = \sqrt{(\overrightarrow{MM'} \mid \overrightarrow{MM'})} = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}.$$

1. Vérifier que d est une application de $P \times P$ dans $\mathbb{R}^+$ qui vérifie les trois axiomes des distances :

(I) $\quad d(M, M') = 0$ ssi $M = M'$ et $d(M, M') > 0$ ssi $M \neq M'$

?x=)

(II) $\quad d(M, M') = d(M', M)$

(III) $\quad \forall M, M', M'' \quad d(M, M'') \leqslant d(M, M') + d(M', M'')$.

2. Le disque de centre $J \in P$ et de rayon $\rho \in \mathbb{R}^+$ est l'ensemble des points M de P tels que $d(J, M) \leqslant \rho$. Équation du cercle qui est le bord de ce disque. La bande d'axe D et de largeur 2ρ est l'ensemble des points M de P tels que $d(M, D) \leqslant \rho$ (D est une droite donnée dans le plan P); équation du bord de cette bande.

3. Soit [EF] un segment de bord $\{E, F\} \in 2^P$. Étudier le bord de l'ensemble des points M du plan situés à une distance de [EF] inférieure ou égale à ρ ; tracer ce bord.

4. On définit l'application e de $P \times P$ dans $\mathbb{R}^+$ par :

$$e(M, M') = \sup(|x - x'|, |y - y'|).$$

Montrer que e vérifie les axiomes des distances. Se poser pour la e-distance les questions posées en 2 et 3 pour les d-distances.

5. On définit l'application f de $P \times P$ dans $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(M, M') = |x - x'| + |y - y'|.$$

Montrer que f vérifie les axiomes des distances. Se poser pour la f-distance les questions posées en 2 et 3 pour les d-distances.

6. Étudier les ensembles des points M de P tels que, E et F étant deux points donnés du plan :

(I) $\quad d(M, E) = d(M, F)$;

(II) $\quad e(M, E) = e(M, F)$;

(III) $\quad f(M, E) = f(M, F)$.

Comparer les trois ensembles ainsi obtenus. Peut-on tirer de cette comparaison une conclusion sur les topologies du plan P définies à partir des distances d, e ou f ?

Énoncé 5. Dans le plan euclidien rapporté au repère orthonormé (A, B, C), M, M' et M'' étant trois points de ce plan, (x, y), (x', y') (x'', y'') leurs coordonnées on pose :

$$m(M, M', M'') = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x'-x & x''-x \\ y'-y & y''-y \end{vmatrix}$$

$m(M, M', M'')$ est appelée la « masse » du triangle MM'M''.

1. R, S, T étant trois points non alignés, r, s, t étant trois réels donnés supérieurs à zéro, il existe un point M et un seul dans le plan tel que $r\overrightarrow{MR} + s\overrightarrow{MS} + t\overrightarrow{MT} = \vec{0}$. Étudier la position de M par rapport au triangle RST. Comparer les masses des triangles MST, MTR et MRS aux réels r, s, t.

2. Le plan affine étant muni de la norme euclidienne, étudier l'application g du plan dans l'ensemble des réels telle que :

$$P \longmapsto g(P) = r\|\overrightarrow{PR}\|^2 + s\|\overrightarrow{PS}\|^2 + t\|\overrightarrow{PT}\|^2.$$

Vous relisez ces énoncés; pour chacun vous vous interrogez : est-ce que je comprends bien ce qui est demandé? Et avant cela, est-ce que je comprends tous les mots utilisés?

Sur l'énoncé 1. Peut-être l'expression « factorisation primaire » ne vous est-elle pas familière, non plus que « nombre primaire ». Ne vous inquiétez pas : l'énoncé vous en donne discrètement la signification; « factorisation primaire » pour « décomposition d'un naturel en produit de facteurs premiers », « nombre primaire » pour « puissance à exposant entier positif d'un naturel premier ». Voilà pour les mots. La formulation du travail à effectuer manque de précision : « étudier la fonction f »; c'est donc à vous de vous poser des questions; par exemple : f est-elle injective? f est-elle surjective? L'ensemble de départ, les naturels différents de zéro, étant totalement ordonné par la relation « inférieur ou égal à », que dire de $f(x)$ et $f(x')$ lorsque $x \leqslant x'$? L'ensemble des naturels non nuls étant aussi ordonné par la relation de divisibilité (mais ici c'est un ordre partiel) on peut aussi se demander : si x divise x', que dire de $f(x)$ et $f(x')$? Cet énoncé paraît à ranger dans la catégorie (EE).

Sur l'énoncé 2. Il s'agit d'une fonction définie par une intégration et du calcul de sa dérivée par deux procédés distincts. Quelles sont les connaissances requises? La dérivation d'une fonction composée puis la dérivation d'une fonction définie par une intégration. Pour le 2° la formule de l'intégration par parties. Les deux parties de l'exercice sont indépendantes l'une de l'autre; la seconde pourrait être traitée avant la première sans le moindre inconvénient; la solution de l'une sert de vérification à la solution de l'autre. En passant, vous notez que, dans cet exercice d'examen, on ne vous laisse aucune initiative. Exercice à ranger dans la catégorie (T) d'après son origine, dans la catégorie (ED) d'après sa forme.

Sur l'énoncé 3. Aucune difficulté ici dans la compréhension des mots. La première ligne déclenche un réflexe, les formules de trigonométrie : $1+\cos\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2}$ qui fait penser à $\sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$ puis à la mise en facteur de $\cos\frac{\varphi}{2}$; puisque $\varphi \in [0, 2\pi]$, le signe de $\cos\frac{\varphi}{2}$ n'est pas invariable et il faut distinguer les deux cas. La deuxième question de l'exercice est liée à la première. C'est encore un exercice (T), une épreuve d'examen d'ailleurs, mais qui pourrait aussi être assimilée à un exercice (ETT) en raison du soin exigé par la discussion dans la solution complète du 1°.

Sur l'énoncé 4. Le texte est long, une relecture est indispensable. Vous vous intéressez d'abord aux trois premières questions. Les notations vous surprennent; elles sont pourtant explicites : A est l'origine des axes de coordonnées, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont unitaires et orthogonaux. Puisque $\|\overrightarrow{MM'}\|$ désigne classiquement la norme du vecteur $\overrightarrow{MM'}$, $(\overrightarrow{MM'} \mid \overrightarrow{MM'})$ désigne le produit scalaire (c'est une notation de Bourbaki). La première question, une simple vérification, vous rappelle les trois axiomes qui définissent le mot « distance »; la troisième, appelée « inégalité triangulaire » vous fait penser à la formule de Cauchy-Schwarz qui est vraie dans tout vectoriel normé :

$$\forall\, M, M', M'' \quad |(\overrightarrow{MM'} \mid \overrightarrow{MM''})| \leqslant \|\overrightarrow{MM'}\| \times \|\overrightarrow{MM''}\|.$$

Les questions 2 et 3 définissent des ensembles à partir d'inégalités. Si un ensemble est défini par une relation $\leqslant$, le bord est défini par la relation $=$.

Pour comprendre la question 4, il faut connaître la signification de la notation *sup* : ici, $e(M, M')$ est égale *au plus grand* des deux nombres $|x-x'|$ et $|y-y'|$. Quelques essais avec des points particuliers vous montrent que, si M est fixé, le calcul de $e(M, M')$ dépend de la position de M′ dans l'un ou l'autre des quatre quadrants découpés dans P par les droites de pente $+1$ ou -1 passant par M. De ce fait, pour vérifier l'inégalité triangulaire, si on se donne M et M′ il y a neuf cas à considérer pour M″ (l'intersection des quatre quadrants relatifs à M avec les quatre quadrants relatifs à M′ définissent neuf régions au plus).

Les remarques sur la question 4 sont valables à quelques modifications près pour la question 5.

Dans la question 6, on distingue la définition et la recherche des d-médiatrice, e-médiatrice, f-médiatrice d'un segment donné. En modifiant la donnée du segment, comment varient ces diverses médiatrices? Reste la question difficile sur la comparaison de trois topologies : il faut se rappeler qu'une topologie est définie par celle de ses ouverts; or, pour définir une « boule ouverte », on utilise soit la distance notée d soit celle qui est notée e soit celle qui est notée f; on peut se demander par exemple « est-ce qu'un d-ouvert est aussi un ouvert pour e ? »

Énoncé de la catégorie (P); mais il se rapproche de (EE) à son début; en raison des nombreux cas particuliers que nous serons amenés à examiner, ne serait-ce que pour nous familiariser avec ces distances e et f peu usuelles, on pourrait dire aussi exercice (M). Par son étendue, c'est bien un problème. Et rien ne s'oppose à ce que, au terme de la recherche sur les questions posées, vous ne vous en formuliez d'autres...

Sur l'énoncé 5. L'expression « masse du triangle » ne peut vous inquiéter puisque l'énoncé en donne une définition. Vous notez cependant qu'un déterminant est une forme (un nombre réel) bilinéaire (linéaire par rapport aux deux vecteurs dont les coordonnées forment la première et la seconde colonne du déterminant) alternée (l'échange des colonnes change le signe).

Dans la suite de l'énoncé vous reconnaissez la définition du barycentre des points R, S, T affectés des coefficients réels r, s, t. Il faudra commencer par calculer les masses des trois triangles MST, MTR et MRS.

La seconde question fait inmanquablement penser au théorème de Leibniz.

Exercice 5 à ranger dans la classe E. D.

Remarque. L'analyse de ces cinq énoncés vous conduit déjà à certaines conclusions pratiques. Des exercices d'examen peuvent servir à l'entraînement. Des exercices tels que 1, 4 et 5 auront plus de poids dans la formation mathématique en profondeur. S'en tenir à des énoncés d'examen, ne traiter que ce genre d'exercices serait donc pernicieux, n'en traiter jamais serait imprudent. Pour éviter au candidat un blocage qui lui ferait remettre copie blanche, on a la bonté de le guider; l'énoncé 2 est vraiment très directif; trop peut-être : si on ne vous disait pas d'intégrer par parties, n'y auriez-vous pas pensé?

Ces cinq exemples ne donnent pas des spécimens de tous les exercices possibles. A propos d'autres énoncés, lecture et première analyse conduiraient sans doute à bien d'autres observations.

Cadre et climat de la recherche

L'organisation du travail, on a fini par s'en rendre compte, a beaucoup d'influence sur le rendement du travail. Puisque vous souhaitez, évidemment, une recherche fructueuse, il faut vous placer dans des conditions propices.

Un premier choix dont vous n'êtes peut-être pas libre : chercherez-vous seul (c'est bien sûr le cas d'un test ou d'un examen) ou bien en équipe (c'est souvent le cas pour des exercices cherchés en classe). Cependant, même pour le travail en équipe, si vous souhaitez vraiment contribuer à la recherche commune, cela vous ramène à savoir comment travailler seul; nous discuterons ensuite des corrections à apporter au travail en solitaire pour en faire une bonne participation à un travail d'équipe.

Il y a d'abord des conditions d'environnement favorable : un certain calme, le silence autant qu'on puisse le réaliser dans des habitations collectives ou dans une salle de classe (mais je ne parviens pas à croire qu'un fond sonore, bruit de la rue ou chansons de la radio, ne finisse à la longue par fatiguer ou distraire), éclairage suffisant sans excès.

L'énoncé est devant vous, sur la table; vous pouvez le lire et le relire, voire y porter quelque annotation. Les feuilles ou fiches pour la rédaction définitive sont provisoirement en réserve. Pour la recherche elle-même, ou bien c'est un exercice d'entraînement, d'apprentissage et vous avez avantage à écrire sur votre cahier-journal; ou bien c'est une épreuve de test ou d'examen, vous utilisez des feuilles de format 21/29,5 cm quadrillées au demi centimètre et vous n'écrivez qu'au recto en numérotant les feuillets; au recto seulement, il est ainsi plus facile de conserver sous les yeux l'ensemble de vos essais (y compris les essais infructueux car s'ils l'ont été, ils vous apportent, de ce fait, une certaine information, celle d'une voie à ne pas suivre). Vous écrivez lisiblement; c'est comique de voir quelqu'un incapable de se relire, mais c'est un comique peu favorable à la découverte. Si vous avez besoin de dessiner des figures, que ce soit de préférence sur feuillet séparé et que les feutres de couleur soient mis à contribution pour rendre les dessins très explicites (du bon usage de la couleur; ça s'apprend!). Au fur et à mesure de l'utilisation de feuillets séparés, ceux-ci sont numérotés. Vous écrivez de façon aérée pour que des corrections soient faciles; ce qui s'avère être faux, vous le barrez sans cacher ce qui est faux; le principe étant de tout conserver, car tout, vrai ou faux, est une contribution directe ou indirecte à la découverte finale.

Tenez compte aussi du «climat», j'entends les conditions psychologiques dans lesquelles vous vous trouvez avant de chercher et pendant la recherche. Bien sûr, le succès dépend pour beaucoup de vos connaissances, de votre expérience qui vous permet de bien utiliser ces connaissances et aussi de bonnes méthodes de recherche sur lesquelles nous allons revenir page 37. Mais il ne faut pas négliger le climat, l'ensemble des sentiments et des impressions conscientes ou inconscientes qui font de vous, chercheur impassible que vous croyez être, le jouet de passions plus ou moins prévisibles et presque toujours troublantes.

Or la sérénité serait une meilleure disposition pour l'esprit : débarrassé de toute pensée parasite, de toute pensée relative à d'autres objets pour avoir l'esprit ouvert à tout ce qui importe pour le problème considéré. La sérénité n'est pas, cependant, l'état naturel dans lequel vous vous trouvez pas plus que la mer n'est jamais parfaitement calme. Il y a un peu de vent, quelques vagues ou même une houle très régulière. Alors accommodez-vous d'avoir à chercher un problème tout en étant traversé par moments d'idées parasites ou d'émotions étrangères au problème. Sachez seulement, ou bien en tirer profit (par exemple pour alimenter votre aspiration à la découverte), ou bien les maintenir comme à distance respectueuse : **maintenir à tout prix le minimum de concentration indispensable.**

Mais concentrer son attention fatigue. Si la découverte tarde, on peut se lasser. Il y a un moment où la persévérance dans l'effort, de vertu qu'elle était, devient faute; on perd sa lucidité, on s'embrouille, on mélange diverses idées déjà essayées sans succès, on n'est plus capable de tirer profit de ses fautes ou de ses errements (ce qui est justement la clé du succès). Autant se reposer; Bossuet disait «faire oraison»; j'ajouterai : «respirer profondément!»

Les épisodes de la recherche

Aussi expérimenté qu'on soit, aussi riche en science et en méthodes de travail, le déroulement d'une recherche est rarement uniforme; ou alors on se trouve devant un exercice facile et il faut s'appliquer à en fignoler la solution. Ce qui sera normal, sauf peut-être pour les génies que nous ne sommes ni vous ni moi, ce sera une succession de phases plus ou moins heureuses, plus ou moins malheureuses. Il y a des avances tellement rapides que la plus timide vérification y fait apparaître ou bien des fautes grossières ou bien des insuffisances notoires. Alors on revient en arrière, on s'aperçoit qu'on a confondu vitesse avec précipitation.

La découverte d'une solution fait penser à l'apparition d'une photographie dans le bain révélateur; alors que rien n'était visible, certaines parties commencent à foncer; arbre ou visage, on ne saurait encore le dire, c'est seulement quand les régions foncées se rejoignent qu'un profil se dessine; le moment vient où toute l'image apparaît mais en regardant de tout près, on voit encore se dessiner de très fins détails qui donnent à l'ensemble sa perfection. De même, pour la solution du problème, une fois trouvée l'idée qui éclaire la recherche, le fignolé des détails donne à la solution son fini.

Il faut revenir sur les fautes. Les petits élèves de Sixième voient rarement leurs propres fautes de calcul ou de raisonnement; ils s'en remettent au professeur de les leur signaler : conduite très naturelle mais puérile. Au niveau de la Terminale, vous devez vous efforcer de dépister vous-même vos propres fautes. Le procédé : **multiplier les vérifications, utiliser des contre exemples,** etc. Si un calcul vous a fourni une expression qui dépend d'un paramètre, en donnant à celui-ci quelques valeurs particulières des invraisemblances peuvent apparaître. Si, par exemple, vous avez trouvé que la limite de la fonction f pour x tendant vers plus l'infini est moins l'infini et que le calcul de la dérivée de la fonction montre f' positif pour x assez grand, il y a contradiction; la révision de la limite *et* de la dérivation s'impose. **Tout calcul numérique exige des vérifications multiples;** ne pas vérifier un calcul, c'est cela la faute impardonnable. Les autres fautes, quand on les décèle soi-même, conduisent à la découverte.

En effet, les fautes décelées, corrigées ont une grande vertu heuristique; elles limitent le champ de la recherche en indiquant ce qu'il ne faut pas faire.

A ce sujet, je vous conterai une anecdote personnelle : une faute que j'ai commise et que j'ai mis très longtemps à comprendre. C'était sur le « **Problème de l'ours :** *un ours sort de sa tanière pour chasser; il fait 10 km vers le Sud sans rien trouver; il tourne à gauche, marche 10 km vers l'Est, toujours rien; il tourne à gauche, marche 10 km vers le Nord, toujours sans rien trouver; il en est désespéré car au terme de ce périple, il se retrouve devant sa tanière. Question : quelle est la couleur de cet ours désespéré?* » Je croyais avoir trouvé LA solution : l'itinéraire de l'ours sur la sphère terrestre est un triangle sphérique bi-rectangle et la tanière est au pôle Nord, l'ours est donc blanc. Tu as raison, me dit un ami, mais il y a d'autres itinéraires possibles selon l'énoncé et tu n'en as trouvé qu'un. J'acceptais son avis car je reconnais la compétence de ce savant ami (et en cette circonstance j'étais dans la même attitude que celle de l'élève de Sixième devant son professeur) mais je ne voyais pas ma faute (ne trouver qu'une solution quand il y en a d'autres, une infinité peut-être, c'est une fameuse faute!). Mon ami n'ayant pas voulu m'indiquer où était l'origine de ma faute (en quoi il avait pédagogiquement raison), j'étais réduit à la trouver seul. J'y suis parvenu, mais après de longs errements : l'itinéraire trouvé en forme de triangle sphérique m'incitait à n'envisager d'autre solution que sous la même forme. J'oubliais qu'il y a des parallèles (au sens de la géographie) qui ont 10, 5, 10/3, ... ou $10/n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) km. Et le plus curieux, c'est qu'ayant trouvé la solution avec un itinéraire vers l'Est qui est un parallèle de 10 km de long, je ne pensai pas aussitôt aux autres parallèles qui seront parcourus deux, trois, ... n fois pour faire 10 km. Oui, il y a bien une infinité de solutions (mais tous ces itinéraires entourent le pôle Sud et il n'y a pas d'ours dans l'Antarctique!).

Fautes, manque de savoir ou de méthode, il arrive qu'on n'avance plus; blocage : « je sèche ». D'abord, je ne crois pas qu'il soit bon de se répéter cette dernière phrase jusqu'à s'en persuader. Mieux vaut prendre conscience du blocage, soit, mais savoir qu'il y a très probablement des remèdes. L'un, immédiat, est de reprendre tout ce qui a été fait *à partir d'une relecture attentive de l'énoncé;* on peut déceler des défauts et y remédier; ou simplement relire la solution trouvée d'un œil neuf. Si cette révision

ne donne pas l'élan attendu, s'appliquer à rédiger ce qui peut l'être; la mise au point des détails peut être éclairante.

Si ces efforts immédiats restent infructueux, je conseillerai le repos. Dans le cas d'une recherche personnelle en temps libre, une nuit de bon sommeil porte d'excellents conseils. Dans une recherche en temps limité, il ne peut en être question mais un recueillement de dix minutes en fermant les yeux sans penser au problème parfois suffira.

Les rédactions et l'épreuve d'examen

Deux remarques : 1. **Le dernier chapitre traite de la communication et traitera donc aussi de la rédaction d'une solution de problème. Ici, l'acte de rédiger est considéré comme partie de l'action de chercher. 2. Le titre insiste, par son pluriel, sur l'intérêt de plusieurs rédactions successives.**

A propos du blocage dans la recherche, j'ai déjà conseillé une première rédaction partielle. C'est la rédaction-ébauche; elle est personnelle et vous pouvez donc vous permettre toutes les abréviations que vous voudrez (pourvu que vous soyiez capable de vous relire). Dans cette étape, il n'est pas indispensable de suivre l'ordre des questions de l'énoncé : si la solution du 3° vous paraît réalisable, vous l'ébauchez, les résultats ainsi précisés peuvent éclairer d'autres questions. Si, au cours de la rédaction-ébauche, vous pouvez mettre au point des figures ou des tableaux de valeurs numériques, réalisez donc ces figures ou ces tableaux sur feuillets distincts et numérotez-les pour y faire facilement référence dans la rédaction définitive.

On voit trop souvent des élèves rédiger directement et définitivement à partir de « brouillons » informes? Ces élèves s'imaginent que Cicéron improvisait ou que Voltaire a écrit *Candide* au courant de la plume.

D'abord les brouillons ne devraient pas être « informes »; tout écrit réalisé pendant la recherche doit être clair. Si l'on y décèle des fautes, ne pas les effacer, barrer, corriger clairement de façon que la faute reste visible (une façon de s'en prémunir). Tous ces textes, et en particulier celui de la rédaction-ébauche vont fournir les matériaux pour la rédaction définitive.

Dans un examen, dans une épreuve de contrôle, il y a deux aspects particuliers au sujet desquels on peut faire des réflexions de genres très différents : 1. le temps dont on dispose pour la recherche et la rédaction est strictement limité; 2. l'épreuve est faite en vue d'une notation qui exprime *une sorte de « mesure »,* l'expression soulignée et les guillemets voulant exprimer une certaine réserve sur la signification des mots employés.

L'épreuve de mathématiques au baccalauréat ne compte que 4 heures en sections C, D, ou E. Travailler quatre heures de suite avec un bon « rendement » exige une bonne organisation du travail et un certain entraînement. L'une et l'autre auront été obtenues en pratiquant de telles recherches en quatre heures au cours de l'année.

Épreuves au cours desquelles vous aurez expérimenté les stratégies qui vous conviennent le mieux. En voici une que je vous propose :

1. Lecture assez rapide de l'énoncé en entier (dix minutes environ).
2. Recherche du premier exercice ou du second et rédactions (25 + 15 = 40 minutes).
3. Recherche du second ou du premier exercice et rédactions. Au total, 90 minutes. Il reste 2 h 30 pour le problème.
4. Relecture attentive de l'énoncé du problème (dix minutes).
5. Étude du problème; s'il comporte trois parties (par exemple) évaluer l'importance respective de chacune pour se fixer un programme raisonnable. Sachant qu'il faut se réserver vingt minutes à la fin pour une révision générale de la copie et un fignolage de la rédaction.
   N. B. Ne pas oublier que toute rédaction doit être soigneusement relue.

En général, les énoncés proposés sont calibrés pour que l'épreuve soit traitée en entier par un élève moyen. On se fixera donc l'objectif de tout traiter. Cependant, mieux vaut laisser une question que bâcler une pseudo solution qui ne fera illusion à personne. Enfin, dans la présentation, tenir compte des recommandations développées dans le dernier chapitre.

Quelques techniques de recherche

« Une branche de la science est pleine de vie tant qu'elle offre des problèmes en abondance; le manque de problèmes est signe de mort. »

David Hilbert

S'il est possible de formuler quelques principes sur la recherche (page 25), le moment est venu de passer à l'action. Y a-t-il des « recettes », des « trucs »? Peut-être, mais mieux vaut réfléchir à des techniques sérieuses, à des méthodes éprouvées c'est-à-dire testées sur des exemples.

Savoir d'abord ce que vous cherchez et vous tenir à une **ligne de conduite.**

Pour cela dégager hypothèses et conclusions supposées.

Savoir recourir à des **souvenirs.**

Transformer un énoncé qui paraît mystérieux en un énoncé qui le serait moins tout en étant **équivalent** au premier.

Il y a des cas où « **l'idée géniale** » permet de sortir d'une recherche bloquée.

Transformations géométriques et invariance de certains caractères offrent des voies intéressantes à la recherche.

L'étude des **fonctions** est un bon exemple d'une recherche méthodique.

Mais ces quelques exemples n'épuisent pas un sujet aussi vaste. Il y a le cas important des calculs... et tous les exemples qui ne peuvent être examinés en quelques pages.

Avoir une ligne de conduite

Dans la recherche en commun de toute une classe, le professeur intervient initialement en posant une question; il relance la recherche quand celle-ci s'égare en posant d'autres questions. Dans la recherche solitaire, on dialogue avec soi-même, dans la recherche en équipe, avec ses compagnons. Depuis Socrate, qui appelait « maïeutique », cet art d'accoucher les esprits et depuis le récit que Platon nous en donne dans *Ménon*, que ce soit dans une séance d'enseignement ou de recherche, on mobilise ses connaissances, on concentre son esprit par un jeu de questions. Si elles sont de plus en plus serrées, ajustées sur ce qui fait problème, elles nous aident à trouver une réponse ou une solution.

Cela ne signifie pas, comme le pensait Socrate, que *« chercher et apprendre sont, en leur entier, une remémoration »*, que toute connaissance serait innée, qu'il n'y aurait qu'à *« accoucher les esprits »*. Mais il n'est pas besoin d'adopter complètement cette opinion de Socrate pour reconnaître une certaine efficacité à sa méthode et nous l'appliquer à nous-mêmes.

Quoi que nous fassions dans la suite d'une recherche, ménageons-nous des pauses de réflexion et alors demandons-nous : « Pourquoi fais-je ce calcul? Pourquoi cette figure plutôt que telle autre, pourquoi ce mode de raisonnement? » **Quand on cherche on n'est jamais seul :** il y a cette partie de vous qui cherche et cette autre partie de vous qui vous observe cherchant; entre ces deux parties de vous, le dialogue doit être possible. Il n'y a pas Socrate et l'esclave, il y a le Socrate qui est en vous qui questionne habilement l'esclave ignorant qui est aussi en vous, ou l'esclave enchaîné au problème. **Ce dialogue intérieur est la voie de la libération.**

Pour commencer, vous analysez l'énoncé. Vous l'avez lu et même relu. **Vous savez que, dans ses phrases, il y a, mêlées, des données, des affirmations supposées vraies, les hypothèses et des questions** auxquelles vous devez trouver réponse. Distinguer dès l'abord le connu de l'inconnu : c'est à partir de ce qui est connu que vous parviendrez à découvrir ce qui ne l'est pas.

Pratiquez donc pour commencer l'inventaire des hypothèses. Je dis l'inventaire, l'énumération complète; d'abord en relisant l'énoncé une fois de plus, puis en les notant sur C.J. ou feuillet de recherche. S'il y a une figure dans l'énoncé ou si le texte vous suggère d'en dessiner une, vous le faites en respectant scrupuleusement toutes les hypothèses.

Recensement fait des hypothèses, vous vous posez la question : qu'est-ce exactement ce qu'on me demande? Est-ce la démonstration d'un fait affirmé ou la découverte d'un ensemble inconnu?

Une précaution à prendre aussi dès le début : *les notations à employer.* Sont-elles imposées par l'énoncé lui-même, alors vous vous y conformez (en principe, si l'énoncé est bien rédigé, les notations qu'il propose ne sont pas mauvaises). Si, au contraire, l'énoncé n'en suggère aucune particulièrement, vous les choisissez en notant bien que plus tard, dans la rédaction définitive vous devrez les préciser de la façon la plus explicite. Autant le faire tout de suite sur C.J. ou feuillet n° 1.

Tous ces préliminaires semblent du temps perdu aux gens pressés. Mais la recherche n'est pas une course de vitesse, c'est une épreuve de fond. Avant d'avoir à fournir un effort d'attention prolongé, c'est au contraire du temps gagné que cette lente et sûre approche de l'énoncé.

Exemple, la première question de l'énoncé 3 (voir p. 28) : vous notez $\varphi \in [0, 2\pi]$ et $\varphi \neq \pi$ ce que vous écrivez aussi $\varphi \in [0, 2\pi] \setminus \{\pi\}$ ou $\varphi \in [0, \pi[\cup]\pi, 2\pi]$, trois façons équivalentes d'écrire cette hypothèse restrictive sur φ; c'est bien le diable si vous oubliez dans la suite que φ ne peut être égal à π; il est même probable que, dès le début, cette restriction éveille votre curiosité; vous pensez : $\sin \pi = 0$, $\cos \pi = -1$, $\operatorname{tg} \pi = 0$.

Voyons donc ce qu'on demande : calculer le module et l'argument du complexe z; on ne vous impose aucune notation; vous pensez à $z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$ qui ressemble à la notation donnée; par quelques transformations vous calculerez le module ρ et l'argument θ en fonction de φ. La suite vient toute seule : si $z' = -1/z$ soit $zz' = -1$ il en résulte $\rho\rho' = 1$ (le produit des modules) et $\theta + \theta' \equiv \pi [2\pi]$ (la somme des arguments). L'exercice n'est pas résolu, mais vous savez ce qu'il faut faire pour le résoudre.

Les souvenirs

Quand vous abordez une recherche, quel qu'en soit l'énoncé la lecture de celui-ci et son analyse projettent votre conscience dans ce que Marcel Proust appelait « l'édifice immense du souvenir ». Mais alors que c'est la saveur d'une madeleine trempée dans le thé qui réveillait en lui des souvenirs d'enfance selon un processus assez mystérieux, ici, c'est l'énoncé qui vous entraîne dans tel domaine de vos connaissances mathématiques d'une façon très naturelle.

Rien de surprenant si *l'énoncé 3* fait penser à maints exercices du même genre que vous avez traités pour servir d'illustration à l'étude des complexes. Pas de surprise non plus si *l'énoncé 5,* à cause du déterminant, vous fait penser à l'indépendance linéaire dans le vectoriel $\mathbb{R}^2$.

Il y a aussi des associations d'idées qui sont, dans la recherche mathématique, d'autant plus facilement conçues que le bagage des connaissances est relativement réduit : pour celui qui en saurait beaucoup plus que vous, il y aurait peut-être l'embarras du choix entre les idées qui lui viendraient à l'esprit. Pour vous qui êtes débutant, c'est peut-être un avantage d'en savoir si peu; profitez-en, ça ne durera pas. !

Vous êtes sans doute étonné de la place que je semble attribuer à la mémoire dans le travail de recherche. N'est-ce pas en contradiction avec le caractère propre des mathématiques qui ne sont pas une collection de théorèmes? Je ne le crois pas. Il est vrai qu'une mathématique bien construite est un édifice logique où tout se tient et dans lequel on devra donc atteindre n'importe quelle chambre, aussi haut placée qu'elle soit dans l'édifice, pourvu qu'on ouvre les portes qui y mènent avec les clés de la logique. Mais ces itinéraires assurés ne se révèlent pas immédiatement, la complexité de l'édifice est trop grande. Il peut y avoir des sortes de raccourcis, on pressent qu'un chemin mène au résultat; un souvenir vient renforcer cette intuition, l'analogie entre telle question étudiée antérieurement et celle qui est maintenant proposée vous apparaît. Il faut tirer profit de cette idée.

Un exemple. A, B, C sont trois points non alignés affectés de coefficients égaux; le barycentre de ces trois points affectés de ces coefficients est le point de concours des médianes du triangle. Ce résultat classique rappelé, on demande de trouver le barycentre d'une plaque triangulaire homogène. Par analogie avec le calcul de l'aire d'une surface par le procédé du calcul intégral (le découpage de la surface en bandes parallèles à un axe de coordonnées) on détermine d'abord le barycentre d'une telle bande, assimilable, si elle est assez étroite, à un rectangle : son barycentre est « au milieu ». Le barycentre de la plaque est obtenu par « composition » des barycentres de toutes les bandes. Si ces bandes sont parallèles à un côté du triangle, les milieux sont alignés sur la médiane relative à ce côté, donc le barycentre de la plaque homogène est le même point que le barycentre des trois masses égales placées aux sommets.

Par analogie, n'en induisez-vous pas que le barycentre d'un tétraèdre homogène est le même point que le barycentre de quatre masses égales disposées aux sommets du tétraèdre? Voir dans le livre de Polya à qui j'emprunte cet exemple le développement qu'il consacre au raisonnement par analogie.

Équivalence

Remplacer l'énoncé qui vous est proposé par un énoncé équivalent, d'abord savez-vous bien ce que cela signifie.

Dans le calcul des propositions, en logique, deux propositions notées p, q sont dites logiquement équivalentes (ou simplement « équivalentes »), ce qui est noté ($p \longmapsto q$) ou encore ($p \iff q$) ou encore (p ssi q), ssi étant l'abréviation de « si et seulement si », lorsque les deux propositions sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses, elles ont la même table de vérité (ou encore : il est impossible d'avoir simultanément l'une vraie et l'autre fausse).

Remplacer une proposition énoncée en français par sa traduction en anglais devrait être une équivalence. C'est vrai et facilement vérifiable pour des phrases telles que : « $\mathbb{Z}$ est l'anneau des entiers » et « $\mathbb{Z}$ is the ring of integers ». Pour des propositions plus compliquées, c'est souvent impossible; la traduction d'une langue idiomatique dans une autre est un art et les traductions en français de Shelley ou de Keats n'ont pas la saveur des textes originaux.

En mathématique, il y a équivalence lorsque la traduction est parfaitement fidèle. Exemple : **Proposition I :** « Dans le plan euclidien, si un point M est équidistant de deux autres points A et B, alors M est situé sur la médiatrice du segment AB »; **Proposition II :** « Dans le plan euclidien, si un point M n'est pas situé sur la médiatrice du segment AB, alors M n'est pas équidistant des points A et B. »

La vérification de l'équivalence des propositions I et II est facile par la comparaison de leurs tables de vérité. J'en profite pour rappeler ci-dessous quelques éléments de calcul des propositions en logique, et en particulier ce qui concerne les implications.

r et s représentent deux propositions. Dans l'exemple proposé, on peut prendre pour s « M est situé sur la médiatrice de AB et pour r la proposition « M est équidistant de A et B ». Chacune des propositions r, s peut être vraie ou fausse (ce qui sera noté 1 ou 0). On note $\neg r$ la négation de r, $r \wedge s$ la conjonction des propositions r, s et $r \vee s$ leur disjonction. Tables des valeurs de vérité :

1 Vrai 1
0 Faux.

r q

r	s	$\neg r$	$r \wedge S$	$r \vee S$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	0

L'implication notée $r \Longrightarrow s$ n'est autre que la disjonction ((non r) ou s).

Si $r \Rightarrow s$ est dite *implication directe*, les *implications conjuguées* sont :

l'implication *contraposée :*

$$\neg s \Longrightarrow \neg r$$

l'implication *réciproque* (ou converse) :

$$s \Longrightarrow r$$

l'implication *inverse :*

$$\neg r \Longrightarrow \neg s.$$

Voici les tables des quatre implications :

r	s	$r \Rightarrow s$	$\neg s \Rightarrow \neg r$	$s \Rightarrow r$	$\neg r \Rightarrow \neg s$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1

directe contraposée réciproque inverse

Elles montrent que la directe et la contraposée sont équivalentes, que la réciproque et l'inverse sont équivalentes.

Quant à la *double implication*, conjonction de la directe et de la réciproque on l'écrit $r \Longleftrightarrow s$ et elle a la même signification que $r \longmapsto s$ ou que (r ssi s) qui se lit facilement « r si et seulement si s ».

SUR UNE FAÇON DE PARLER.

Reprenons l'exemple de la médiatrice d'un segment AB dans le plan euclidien. L'expression : « Un point M du plan est équidistant de A et B si et seulement si M est situé dans la médiatrice de AB » est correcte et sans ambiguïté. On exprime encore la même idée par la phrase : « Pour que le point M du plan soit équidistant de A et B, il faut et il suffit que M soit situé sur la médiatrice de AB. » Si l'idée est la même, la formulation est fâcheuse; le « il faut » correspond à la condition nécessaire, ici $r \Longrightarrow s$, ou encore **condition nécessairement vérifiée si M est équidistant de A et B;**

le « il suffit » correspond à la condition suffisante, ici $s \implies r$, ou encore **condition suffisante pour que M soit** équidistant de A et B. L'emploi du raccourci « il faut et il suffit » entraîne l'emploi d'un subjonctif qui est justifié pour la condition suffisante mais qui est intempestif pour la condition nécessaire.

Conclusion pratique : je vous recommande d'user du « si et seulement si » et de son abréviation si parlante ssi avec laquelle vous ne risquez jamais d'oublier qu'il y a deux implications réciproques l'une de l'autre démontrées ou à démontrer quand on l'emploie.

ÉQUIVALENCES ET ÉQUATIONS.

Dans la résolution des équations ou des inéquations ou des systèmes d'équations ou d'inéquations, on pratique le plus souvent par équivalences : on remplace le système A par un système B qui est dit équivalent à A si et seulement si l'ensemble des racines de A est égal à l'ensemble des racines de B. Voici quelques exemples.

Exemple 1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}^+$ des réels positifs l'équation :

$$x+2=\sqrt{x+5}$$

$x+5 \geq 0$
$x \geq -5$

ce qui signifie, préciser, si possible en les explicitant, tous les réels positifs tels que l'égalité précédente soit vraie. Voilà la suite des équivalences :

$$\begin{aligned}(x+2=\sqrt{x+5}) &\iff ((x+2)^2=x+5)\\ &\iff (x^2+3x-1=0)\\ &\iff x=\frac{-3+\sqrt{13}}{2}.\end{aligned}$$

Au contraire si l'énoncé avait dit « résoudre dans les réels » sans préciser que ceux-ci dussent être positifs, on aurait eu la suite d'équivalences :

$$\begin{aligned}(x+2=\sqrt{x+5}) &\iff ((x+2)^2=x+5 \quad \text{et} \quad x+2\geqslant 0)\\ &\iff (x^2+3x-1=0 \quad \text{et} \quad x\geqslant -2)\\ &\iff x=\frac{-3+\sqrt{13}}{2}.\end{aligned}$$

L'identité des conclusions ne doit pas cacher la différence importante des équivalences intermédiaires; oublier la condition $(x\geqslant -2)$ dans le deuxième cas serait **une faute grave.**

Exemple 2. Calculer l'aire de la surface E des points M de coordonnées (x, y) du plan qui vérifient le système suivant :

$$(x\geqslant 0) \quad \text{et} \quad (y\geqslant 0) \quad \text{et} \quad (x+2y\geqslant 25) \quad \text{et} \quad (x+y\leqslant 15) \quad \text{et} \quad (7x+y\leqslant 63).$$

Je signale tout de suite une faute fréquente : puisque $x+y\leqslant 15$, la dernière relation s'écrivant $6x+(x+y)\leqslant 63$, on en déduit $6x\leqslant 63-15$ soit $6x\leqslant 48$ et $x\leqslant 8$. Mais réfléchissez à ce que signifie ce calcul : si deux inégalités sont de même sens, telles que $A\leqslant B$ et $C\leqslant D$, on en déduit évidemment $A+C\leqslant B+D$. Par contre si on retranche membre à membre, il faut prendre garde que $C\leqslant D$ est équivalente à $-D\leqslant -C$ ce qui permettra d'écrire $A-D\leqslant B-C$.

Dans ce problème l'usage d'équivalences inexactes fausse toute la solution. Qui est bien plus simple : chaque inégalité donnée définit un demi-plan; la conjonction des cinq inégalités définit l'intersection de ces cinq demi-plans. Je laisse au lecteur le soin de le dessiner. Puis de calculer son aire.

L'idée « géniale »

Vous comprenez tout de suite que les guillemets s'imposent : aucun de nous ne se prend pour Gauss! Et pourtant...

Il y a des problèmes qu'on ne sait par quel bout prendre. Nous sommes d'autant plus embarrassés que l'énoncé ne paraît présenter aucune difficulté spéciale. On se lance alors dans toutes sortes de directions, sans succès, jusqu'à l'intervention d'une idée « géniale » ou qui nous semble telle parce qu'elle nous permet de sortir d'une situation qui paraissait sans issue.

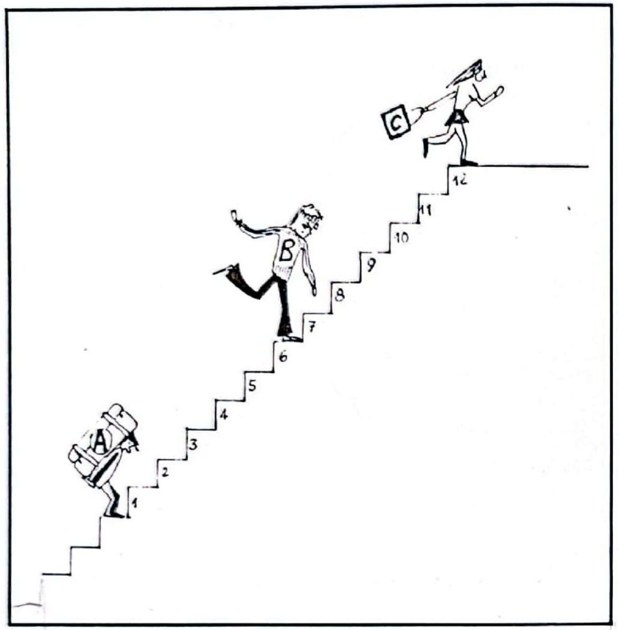
Je me permettrai de vous conter ici un souvenir personnel. Un ami m'avait posé le problème suivant : *« Un habitué d'une station de métro a remarqué que s'il marchait à une certaine allure sur l'escalier mécanique, il comptait huit marches avant d'arriver à la sortie; s'il marchait deux fois plus vite (en montant deux marches là où auparavant il en montait une), il comptait douze marches avant d'arriver à la sortie; ne peut-il pas en déduire la hauteur de l'escalier (exprimée en marches)? »*

Je ne voulais pas m'astreindre à écrire des équations ni même à utiliser une feuille de papier. Puisque c'est un problème d'escalier mécanique, il doit être possible, me disais-je, de le résoudre à l'occasion d'une sortie de métro sur un escalier mécanique. Ce qui ne devait pas être tout à fait vrai car je restai longtemps « dans la nuit » ou si vous préférez, « dans le tunnel ».

Jusqu'au jour où, sans doute pris dans la foule du métro, j'imaginai trois hommes sur cet escalier : le premier A se laisse porter en restant immobile sur une marche, le second B monte des marches à la petite allure indiquée par l'énoncé, le troisième C monte des marches à l'allure rapide. Imaginons alors la situation des trois voyageurs, qui sont partis en même temps du bas de l'escalier, au moment où C arrive en haut de l'escalier. C est à douze marches au dessus de A, à 6 marches au-dessus de B. Or B aura compté huit marches quand il arrivera en haut de l'escalier, par conséquent l'escalier monte de 6 marches pendant que B en monte deux. La hauteur totale de l'escalier est :

$$8\times 3=24 \text{ marches}$$ *(figure page suivante).*

Je vous ai raconté cette « devinette » afin que vous réfléchissiez à l'origine de l'idée « géniale ». Dans l'énoncé il n'est question que d'un voyageur; dans la solution présentée, il y a triplement de la personnalité. Évidemment, j'ai été aidé par le fait que dans le métro il y a beaucoup de monde! Surtout, j'ai imaginé une expérience et j'en ai fait une « photographie » mentale assez voisine de la figure dessinée.



Le moment est donc venu de livrer à votre méditation cet extrait d'une lettre du grand Archimède à son ami Ératosthène (dont vous connaissez le « crible » pour trouver les nombres premiers et peut-être aussi sa merveilleuse mesure du rayon de la Terre) :

*« Souvent, en effet, j'ai découvert par la mécanique des propositions que j'ai ensuite **démontrées** par la géométrie, la méthode en question ne constituant pas une démonstration véritable, car il est plus facile, une fois acquise par cette méthode une certaine connaissance des questions, d'en trouver ensuite la démonstration que si l'on cherchait celle-ci sans aucune notion préalable. »*

L'idée a été reprise et exploitée par un pédagogue Suisse, J.-L. Nicolet qui, par des films de dessins animés, stimulait l'intuition géométrique de ses élèves. Une leçon dont nous pouvons tous profiter.

Transformations et invariance

Dans l'énoncé 5, le point M est défini comme barycentre de trois points R, S, T non alignés affectés des coefficients réels supérieurs à zéro r, s, t. Les « masses » des triangles MST, MTR, MRS sont des formes bilinéaires alternées. Pour traiter ce problème de géométrie affine, il ne peut être question de faire intervenir des notions métriques.

Écrivons $m(\mathrm{M},\mathrm{M}',\mathrm{M}'')=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x'-x & x''-x \\ y'-y & y''-y \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\varphi(\overrightarrow{\mathrm{MM}'},\overrightarrow{\mathrm{MM}''})$ où φ désigne la forme bilinéaire alternée à partir de la convention $\varphi(\vec{i},\vec{j})=1$ pour la forme bilinéaire alternée définie sur les vecteurs de la base canonique (ce qui revient à un certain choix de l'unité de « masse »). Puisque cette forme est bilinéaire :

$$\begin{aligned}\varphi(\overrightarrow{\mathrm{MS}},\overrightarrow{\mathrm{MT}}) &= \varphi\left(\overrightarrow{\mathrm{MS}},-\frac{r}{t}\overrightarrow{\mathrm{MR}}-\frac{s}{t}\overrightarrow{\mathrm{MS}}\right)\\ &= -\frac{r}{t}\varphi(\overrightarrow{\mathrm{MS}},\overrightarrow{\mathrm{MR}})\\ &= \frac{r}{t}\varphi(\overrightarrow{\mathrm{MR}},\overrightarrow{\mathrm{MS}}).\end{aligned}$$

Autrement dit $\dfrac{m(\mathrm{MST})}{r}=\dfrac{m(\mathrm{MTR})}{s}=\dfrac{m(\mathrm{MRS})}{t}$.

Les trois « masses » sont proportionnelles aux coefficients r, s, t.

En utilisant encore la bilinéarité, je vous laisse démontrer :

$$m(\mathrm{MST})+m(\mathrm{MTR})+m(\mathrm{MRS})=m(\mathrm{RST})$$

soit la relation finale :

$$\frac{m(\mathrm{MST})}{r}=\frac{m(\mathrm{MTR})}{s}=\frac{m(\mathrm{MRS})}{t}=\frac{m(\mathrm{RST})}{r+s+t}.$$

Vous savez que la position du barycentre M dépend des trois coefficients r, s, t à un facteur multiplicatif près; donc on ne peut aller plus loin dans la détermination des « masses » des triangles.

(*Remarques :* Je n'ai pas insisté sur la démonstration évidente que M est à l'intérieur du triangle RST; par contre la forme φ étant alternée,

$$m(\mathrm{MST})=-m(\mathrm{MTS})$$

il faut prendre garde à l'**orientation** des triangles. Notons bien aussi que toutes les considérations précédentes ressortissent des axiomes de la géométrie affine).

Dans la seconde question de l'énoncé 5, les notations étant les mêmes que dans le début mais le plan affine étant maintenant muni de la norme euclidienne, il faut étudier l'application g du plan dans l'ensemble des réels telle que :

$$\mathrm{P}\longmapsto g(\mathrm{P})=r\,\|\overrightarrow{\mathrm{PR}}\|^2+s\,\|\overrightarrow{\mathrm{PS}}\|^2+t\,\|\overrightarrow{\mathrm{PT}}\|^2.$$

La question est d'ordre métrique : ou pense aussitôt à utiliser le théorème de Leibniz.

Pour reprendre une expression du Professeur Bouligand, il y a intérêt à distinguer les « domaines de causalité ». Ou, ce qui revient au même, à tenir compte de la classification des propriétés (par exemple en géométrie) d'après le groupe des transformations qui les conservent : des droites parallèles restent parallèles dans toute transformation affine, des distances égales restent égales dans toute isométrie.

Inversement, on connaît bien les quatre axes de symétrie d'un carré. Que deviennent-ils dans un parallélogramme quelconque. Il y a des propriétés conservées (parallélismes, milieux de segments) et d'autres qui ne le sont pas (l'orthogonalité).

Transformer apporte une information précieuse lorsque, parmi les objets transformés, apparaît *ce qui demeure*, ce qui est *invariant*.

Et puisque le mot « invariant » vient d'être prononcé, jetons un nouveau coup d'œil à la seconde question de l'énoncé 3 (pages 28 et 38) : connaissant les coordonnées de M, soit $x = \cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}$ et $y = \cos^2\frac{\varphi}{2}$ on cherchait quelle combinaison entre ces deux coordonnées serait indépendante du paramètre φ, serait invariante lorsque ce paramètre varierait. Algébriquement parlant, on élimine φ ; on cherche un invariant.

Dans le plan affine rapporté à un repère (A, B, C), la forme bilinéaire alternée $\varphi(\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{RT}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$ où x, y et x', y' sont respectivement les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{RT}$ exprime une mesure de l'aire du parallélogramme RSVTR construit sur $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{RT}$ (l'aire de ABDCA étant prise pour unité). Changeons de repère; soit (A, B', C') le nouveau, défini par $\overrightarrow{AB'} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AC'} = c\overrightarrow{AB} + d\overrightarrow{AC}$. Les nouvelles coordonnées X, Y d'un vecteur sont liées aux anciennes par :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \text{est la matrice de passage.}$$

Comparez alors la nouvelle forme :

$$\Phi(\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{RT}) = \begin{vmatrix} X & Y' \\ Y & Y' \end{vmatrix}$$

à $\varphi(\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{RT})$. Vous trouverez :

$$\Phi(\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{RT}) = \frac{\varphi(\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{RT})}{\varphi(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AC'})}.$$

Changement de repère, conservation d'une forme à un coefficient près.

Fonctions

Étudier une fonction est une question qui se pose souvent; on peut en dégager les grandes lignes puis illustrer ce plan de quelques exemples.

1. La fonction est-elle définie?

C'est évidemment la première question à se poser. Il ne suffit pas de désigner la fonction par f ou même d'écrire : « soit f la fonction $f : x \longmapsto f(x) = x + 2$ »; il est indispensable de préciser ce que x représente : un réel, un entier? Surtout quand on sait qu'il n'existe pas que des fonctions numériques.

Pour toute fonction on doit préciser son **domaine de définition,** l'ensemble E décrit par **l'argument** x auquel correspond, par un procédé bien défini **la valeur** correspondante, notée $f(x)$ [qui se lit « f de x »], élément de l'ensemble F d'arrivée.

Notation :

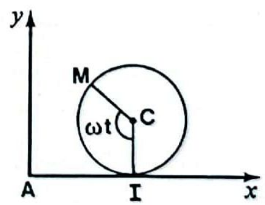
$$f : E \longrightarrow F$$
$$x \longmapsto f(x).$$

E = domaine de définition
F = ensemble d'arrivée
A l'argument x correspond la valeur de f notée $f(x)$.
On dit : La fonction f est définie sur E et à valeurs dans F.

Dans **l'énoncé 1** (cf. p. 28), la fonction est définie sur $\mathbb{N}^*$ (l'ensemble des naturels non nuls) et à valeurs dans l'ensemble des parties de l'ensemble des nombres primaires; l'argument est un naturel non nul, la valeur est un sous-ensemble de nombres primaires.

Dans **l'énoncé 5** (p. 29), la fonction g est définie sur le plan euclidien et prend ses valeurs dans l'ensemble des réels; on la dit aussi fonction numérique de point; elle fait penser à ce qui sera dit champ numérique en physique; par exemple, en tout point de la surface de la Terre, il y a une valeur de l'accélération de la pesanteur; dans ce dernier exemple, l'argument est un point de la surface de la Terre, la valeur est un nombre réel.

Voici maintenant un exemple de fonction vectorielle à argument réel. **Cinématique :** le cercle C roule sans glisser sur l'axe Ax et tourne avec une vitesse angulaire constante ω; soit $\theta = \omega t$ l'angle dont la roue a tourné depuis l'instant initial $t = 0$. A chaque instant t correspond un vecteur $\overrightarrow{AM}$ où A est l'origine des coordonnées et M le point fixe sur le cercle qui était au contact avec Ax en A à l'instant initial; on pose r = rayon du cercle.



Le roulement sans glissement se traduit par l'égalité des longueurs $\overline{AI}$ et $\overline{MI}$, la seconde étant celle d'un arc de cercle; par suite :

$$\overline{AI} = r\omega t.$$

En projetant sur les axes l'égalité $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CM}$, vous trouvez les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$:

$$x = r\omega t - r\sin\omega t \quad ; \quad y = r - r\cos\omega t.$$

Soit Φ la fonction vectorielle à argument réel t qu'on écrira :

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \overrightarrow{\Phi(t)} = \begin{pmatrix} r\omega t - r\sin\omega t \\ r - r\cos\omega t \end{pmatrix} \end{array}$$

(le calcul est fait pour $t \in [0, \frac{2\pi}{\omega}[$, c'est-à-dire pour l'intervalle de temps correspondant au premier tour de roue).

Remarques : Les formules restent valables pour toute valeur réelle de l'argument, par exemple t négatif (avant l'instant considéré arbitrairement comme « initial »). Vous avez reconnu dans cet énoncé le problème classique de la cycloïde (on lira avec profit ce que Pascal écrivait dans son traité sur la « roulette », édition de la Pléïade, p. 176 et sq.).

L'énoncé 2 (voir p. 28) propose une fonction définie par une intégrale :

$$x \longmapsto F(x) = \int_1^{1+x^2} \operatorname{Log} t \, dt \quad (\operatorname{Log} = \ln = \text{logarithme népérien})$$

qui est un exemple de fonction composée :

$$f : x \overset{g}{\longmapsto} X = g(x) = 1 + x^2 \overset{h}{\longmapsto} h(X) = \int_1^X \operatorname{Log} t \, dt \quad \text{qui s'écrit } F = h \circ g.$$

2. La fonction est-elle injective, est-elle surjective?

La question manque d'intérêt dans un exemple comme celui de la cycloïde : Φ est évidemment injective et non surjective. Au contraire, dans l'énoncé 1 (voir p. 28) répondre à cette question est essentiel (d'ailleurs quelle autre question pourrait-on se poser?).

A l'unicité de la factorisation primaire d'un naturel non nul n correspond l'unicité de l'ensemble des diviseurs primaires de n : donc f est injective. f n'est pas surjective : $\{1, 5, 5^2, 5^3, 5^4\}$ est la valeur $f(625)$, $\{1, 5, 5^3\}$ n'est pas une valeur de f puisqu'un naturel divisible par 5^3 le serait par 5^2.

Dans **l'énoncé 5** (voir p. 29), la formule de Leibniz permet d'écrire g (P) sous la forme suivante, M étant le barycentre des points R, S, T affectés des coefficients r, s, t :

$$g(P) = (r+s+t)\|\overrightarrow{MP}\|^2 + r\|\overrightarrow{MR}\|^2 + s\|\overrightarrow{MS}\|^2 + t\|\overrightarrow{MT}\|^2.$$

Il en résulte : $g(P) = g(P')$ ssi $\|\overrightarrow{MP}\| = \|\overrightarrow{MP'}\|$; par conséquent g n'est pas injective; il existe dans le plan des lignes iso-g, ensembles des points P qui donnent la même valeur à g : des cercles de centre M et, en ce point M, la fonction g est minimum : $\forall P, g(M) \leq g(P)$.

Autre exemple très usuel : h est **un homomorphisme du vectoriel E dans le vectoriel F**, c'est-à-dire une application de E dans F telle que quels que soient les vecteurs v et w dans E, quel que soit le réel λ :

$$h(v+w) = h(v) + h(w) \quad \text{et} \quad h(\lambda v) = \lambda h(v).$$

On sait que h est un homorphisme injectif si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul :

$$h \text{ injectif ssi } \operatorname{Ker} h = \{\overrightarrow{O_E}\}.$$

On sait que h est un homomorphisme surjectif si et seulement si son image est égale au vectoriel d'arrivée :

$$h \text{ surjectif ssi } \operatorname{Im} h = F.$$

Bien entendu, ces résultats n'ont de sens que si vous savez bien ce que sont noyau et image de h. Rappelons une nouvelle fois que le noyau est l'image réciproque du vecteur nul $\overrightarrow{O_F}$ du vectoriel-arrivée; et que Ker h est un sous-vectoriel du vectoriel-départ. Que l'image de l'homomorphisme est le sous-ensemble des vecteurs de l'arrivée qui ont un antécédent au moins par h; et que Im h est un sous-vectoriel du vectoriel-arrivée, que la dimension de Im h est encore appelée *rang* de l'homomorphisme.

Lorsque h n'est pas injectif, l'image réciproque d'un vecteur de l'image est une variété linéaire du vectoriel-départ et cette variété est une translatée du noyau; l'ensemble de ces variétés est le vectoriel-quotient de E par h et ce vectoriel-quotient est évidemment isomorphe à l'image. D'où la relation entre les dimensions du vectoriel-départ, du noyau et de l'image :

$$\boxed{\begin{array}{c} \dim E = \dim \operatorname{Ker} h + \dim \operatorname{Im} h \\ \operatorname{rang} h = \dim E - \dim \operatorname{Ker} h. \end{array}}$$

Bien entendu, pour prouver que la fonction f *n'est pas* injective, il suffit d'exhiber une paire d'arguments a et b $(a \neq b)$ tels que $f(a) = f(b)$.

Limites.

C'est surtout dans l'étude des fonctions numériques que vous aurez l'occasion d'en rencontrer.

Exemple d'une fonction algébrique et d'une recherche d'asymptotes. La fonction $j : x \longmapsto j(x) = \sqrt{\frac{5x^3}{2x-1}}$ définie pour $x \in \mathbb{R} \setminus]0, \frac{1}{2}]$. Lorsque x tend vers l'infini : ±

$\frac{5x^3}{2x-1}$ tend vers $+\infty$ comme $\frac{5x^2}{2}$; deux cas à considérer pour $j(x)$:

x tend vers $+\infty$, $j(x) = x\sqrt{\frac{5}{2}} \sqrt{\frac{x}{x-\frac{1}{2}}}$ tend vers $+\infty$;

x tend vers $-\infty$, $j(x) = -x\sqrt{\frac{5}{2}}\sqrt{\frac{x}{x-\frac{1}{2}}}$ tend vers $+\infty$.

Le graphique J de la fonction j aura donc deux branches infinies. Existe-t-il des directions asymptotiques? Cela dépend des valeurs limites de $\frac{j(x)}{x}$; vous trouverez :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{j(x)}{x} = \sqrt{\frac{5}{2}} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{j(x)}{x} = -\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Il existe donc deux directions asymptotiques : lorsque x tend vers + l'infini, c'est une direction de pente $\sqrt{\frac{5}{2}}$ et lorsque x tend vers − l'infini c'est une direction de pente opposée.

Existe-t-il des asymptotes? Pour la première direction cela dépend de la valeur limite de $\left(j(x) - x\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ soit ici $\sqrt{\frac{10}{8}}$; pour la deuxième direction, cela dépend de la valeur limite de $\left(j(x) + x\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ soit ici $-\sqrt{\frac{10}{8}}$. Il existe donc deux asymptotes dont les équations sont :

$$y = x\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{10}{8}} \quad \text{et} \quad y = -x\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{10}{8}}$$

la première correspond à la branche infinie pour x positif, la seconde correspond à la branche infinie pour x négatif.

La limite de j lorsque x tend vers $\frac{1}{2}$ par valeurs supérieures ne présente pas de difficulté (on peut poser $x = \frac{1}{2} + t$ et chercher la limite de j lorsque t tend vers zéro par valeurs positives).

Il est plus intéressant d'étudier le graphique pour $x = 0$. En effet, j tend vers zéro lorsque x tend vers zéro par valeurs négatives. Le graphique de j présente donc un *point d'arrêt* à l'origine des coordonnées. Pour préciser la forme du graphique, il faut tracer la tangente en ce point c'est-à-dire calculer la limite de la dérivée de j lorsque x tend vers zéro par valeurs négatives : ici zéro par valeurs négatives, la tangente à gauche au point origine est l'axe des abscisses.

Exemple d'une fonction transcendante. Soit la fonction k définie sur les réels supérieurs à 1 et à valeurs réelles $x \longmapsto k(x) = \frac{\ln(x^4+1)}{\sqrt{x-1}}$ (ln désigne le logarithme népérien).

La limite de k lorsque x tend vers + l'infini s'obtient facilement en écrivant :

$$k(x) = \frac{\ln(x^4+1)}{\ln x^4} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} \times \frac{\ln x^4}{\sqrt{x}}$$

c'est-à-dire en faisant apparaître d'abord deux facteurs qui tendent vers 1 et un troisième facteur se ramenant à la forme $\frac{\ln t}{t}$ en posant $t = \sqrt{x}$; or on sait $\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t} = 0$.

Différentielles et dérivées.

On calcule facilement la fonction dérivée d'une fonction numérique dérivable. L'habitude ancienne de définir la dérivée pour une valeur de l'argument avant de définir la différentielle de la fonction donnée pour cet argument, entraîne une grande méfiance des élèves vis-à-vis des différentielles alors que la même méfiance ne se manifeste pas pour les dérivées. Cela peut paraître étrange quand on pense aux significations géométriques de la différentielle et de la dérivée d'une fonction pour un certain argument x_0 : la tangente au graphique Γ de la fonction γ au point d'abscisse x_0 est le graphique de l'application linéaire tangente pour x_0, c'est-à-dire de la différentielle de γ pour x_0 et c'est la pente de cette tangente qui est la dérivée de γ pour cet x_0. On ne devrait pas pouvoir séparer la formation de ces deux notions distinctes mais étroitement associées, la différentielle et la dérivée, la tangente et sa pente.

Revenons donc sur la définition de la différentielle de la fonction γ pour x_0 comme « application linéaire tangente en x_0 » :

la fonction γ étant définie pour x_0, et $\gamma(x_0)$ étant sa valeur, la fonction γ est différentiable pour cette valeur de l'argument ssi il existe un réel a non nul tel que :

$$\lim_{dx=0}\frac{\gamma(x_0+dx)-\gamma(x_0)}{a\,dx} = 1$$

et alors l'application $d_{x_0}\gamma : dx \longmapsto a\,dx$ est l'application linéaire tangente en x_0, la différentielle de la fonction γ pour x_0; le coefficient a de cette application linéaire est la dérivée de γ pour x_0; on pose (notation de Lagrange) $a = \gamma'(x_0)$ et simplement $d\gamma = \gamma'(x_0)\,dx$.

Exemples d'utilisation de cette notation : ils concernent en particulier le calcul des différentielles et dérivées de fonctions composées lorsque les fonctions composantes sont différentiables.

Soit la fonction m :

$$x \longmapsto m(x) = e^{\cos^2 5x}$$

qui peut s'écrire :

$$x \overset{u}{\longmapsto} 5x \overset{v}{\longmapsto} \cos 5x \overset{w}{\longmapsto} \cos^2 5x \overset{t}{\longmapsto} e^{\cos^2 5x}$$

ou encore $m = t\circ w\circ v\circ u$ avec $u = 5x$, $v = \cos u$, $w = v^2$ et enfin $m = e^w$; alors différentions :

$$du = 5\,dx,\ dv = -\sin u\,du,\ dw = 2v\,dv,\ dm = e^w\,dw$$

et finalement :

$$dm = e^{\cos^2 5x}\, 2\cos 5x\,(-\sin 5x)\, 5\, dx$$
$$dm = -10 \sin 5x \cos 5x\, e^{\cos^2 5x}\, dx$$

la dérivée de m est $m'(x) = -10 \sin 5x \cos 5x\, e^{\cos^2 5x}$.

Autre exemple, déjà cité, l'énoncé 2 (voir p. 28) :

$$F = h \circ g \quad \text{avec} \quad g : x \longmapsto X = 1 + x^2$$
$$dX = 2x\, dx$$
$$h : X \longmapsto F(X) = \int_1^X \ln t\, dt$$
$$dF = \ln X\, dX$$

soit $dF = 2x \ln(1+x)^2 dx$ et $F'(x) = 2x \ln(1+x^2)$.

Encore un exemple d'utilisation de la notation différentielle, cette fois pour le calcul de la différentielle de la bijection réciproque d'une bijection différentiable. Soit Sinus la bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, +1]$ telle que $x \longmapsto \text{Sin}\, x = \sin x$. On sait $d\,\text{Sin}\, x = \cos x\, dx$ et dans cette formule $\cos x = \sqrt{1 - \text{Sin}^2 x}$ puisque si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ alors $\cos x \geqslant 0$.

La bijection réciproque de Sin est Arcsinus qui applique $[-1, +1]$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$.

Évidemment, la composition de Sinus et d'Arcsinus est l'application identique :

$$x \longmapsto y = \text{Sin}\, x \longmapsto x = \text{Arcsin}\, y$$
$$d\,\text{Arcsin}\, y = (\text{Arcsin}\, y)'\, dy$$
$$dx = (\text{Arcsin}\, y)' \cos x\, dx$$

soit $(\text{Arcsin})' \cos x = 1$.

La fonction Arcsinus est donc différentiable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$ seulement, la dernière égalité exige que $\cos x \neq 0$.

$$d\,\text{Arcsin}\, y = \frac{dy}{\cos x} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Il est temps, pour conclure cette partie consacrée aux fonctions de dresser un plan qui résume les questions que vous pouvez vous poser en réponse à l'énoncé « **étudier telle fonction** ».

Plan général de l'étude d'une fonction numérique :

1. Préciser le domaine de définition (priorité absolue), savoir répondre à la question « pour quelles valeurs de l'argument x l'expression $f(x)$ a-t-elle un sens » ?

2. La fonction est-elle injective? Est-elle surjective? (la réponse à cette dernière question permet de préciser l'image de la fonction, sous-ensemble des valeurs de f qui ont un antécédent au moins dans le domaine :

$$\text{Im}\, f = \{y \in F \mid \exists x \in D_f,\ y = f(x)\})$$

f est surjective ssi $\text{Im}\, f = F$
f est injective ssi $f(x) = f(x') \implies x = x'$.

3. Étude de la parité :

f paire ssi $\forall x \in D,\ f(x) = f(-x)$
f impaire ssi $\forall x \in D,\ f(x) = -f(-x)$.

4. Étude de la période : f est une fonction périodique s'il existe un argument T tel que :

$$\forall x \in D,\ f(x+T) = f(x)$$

et si T est le plus petit réel supérieur à zéro vérifiant cette relation alors T est appelé **la période de f.**

(exemple typique $\forall x \in \mathbb{R}$ $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ la fonction sinus est de période 2π).

5. Limites aux bornes des intervalles du domaine de définition ou pour des valeurs particulières de l'argument.

6. Continuité de la fonction; étude particulière des discontinuités.

7. Dérivabilité; si la fonction est dérivable, préciser dans quel intervalle elle l'est; calculer cette dérivée et étudier son signe.

8. Tableau de variation de la fonction sur lequel on inscrit les valeurs limites trouvées au paragraphe 5.

9. Table de valeurs : il y a souvent intérêt à ne pas accumuler sur le même tableau les indications sur les sens de variation de la fonction et les limites avec des valeurs numériques aussi nombreuses que possible pour préciser le tracé du graphique.

10. Graphique de la fonction; dans le cas où certains détails particulièrement intéressants n'apparaissent pas sur le graphique global, on dessine un graphique supplémentaire sur échelle convenable de la partie qu'on veut détailler.

11. On ajoute toute autre remarque intéressante sur la fonction, le graphique, l'application réciproque, etc.

A propos des calculs

« Savoir substituer les idées aux calculs. »

Lejeune-Dirichlet

Dans les quelques exemples de recherche présentés au chapitre précédent, nous avons déjà eu des occasions de calculer. Il est rare qu'une recherche mathématique ne comporte aucun calcul.

Calculer paraît pourtant, très souvent, fastidieux. Alors qu'en réalité un calcul bien préparé, bien conduit est souvent la voie d'une solution claire et précise.

Il faut donc **savoir conduire un calcul;** avec économie et en sachant ce qui en est la raison d'être, l'idée directrice.

Différents styles de calcul seront alors examinés : un **calcul littéral;** un **calcul purement numérique;** un **calcul de traduction.**

Les **problèmes à paramètres** conduisent à des discussions qu'il faut soigneusement organiser.

Des **calculs d'intégration** et quelques aperçus sur les **probabilités** suffiront à illustrer les immenses ressources de ces branches du calcul.

Conduire un calcul

Dans maints problèmes, des calculs interviennent. En un sens, c'est psychologiquement rassurant : si la solution est ramenée à un calcul et si je connais les règles de celui-ci, je peux me dire qu'il suffit des les appliquer et que c'est le calcul qui me conduira au résultat demandé. Avant le calcul j'ai eu un effort de réflexion à faire (par exemple, mettre le problème en équations); maintenant c'est au calcul de me mener au port.

Cette conception du calcul qui mène le calculateur n'est pas sans danger. Bien sûr, il y a des passages où les règles du calcul sont là pour nous guider de même que, dans certains passages difficiles le cavalier juge préférable de laisser la bride au cheval (en application de la règle : en terrain difficile du cheval ou du cavalier, le cheval est le plus intelligent des deux). Mais, pour fixer l'itinéraire, savoir d'où partir, à chaque croisement décider la route parce qu'on doit savoir quel est le but, dans toutes ces circonstances, c'est le cavalier qui décide. De même dans le calcul. **Il y a un équilibre à trouver entre les idées qui doivent guider l'opérateur et les algorithmes, les règles de calcul qui économisent sa peine et, dans une certaine mesure, « pensent pour lui ».** Trouver cet équilibre, c'est tout l'art du calcul.

Tenir compte aussi des conditions matérielles du travail et du moral du calculateur.

Conditions matérielles.

Se méfier comme de la peste des calculs bâclés, écrits à la diable sur n'importe quel bout de papier. Surtout si on ne sait pas à l'avance quel développement peut prendre le calcul, on le commence en haut et à gauche d'une page blanche du C.J. ou en haut et à gauche d'une grande feuille; il est toujours difficile d'aller à la ligne au cours de l'écriture d'une égalité (ou d'une inégalité); alors on écrit le premier membre aussi à gauche que possible et si on ne peut éviter d'aller à la ligne que ce soit avant le signe = ou juste après. Si la place manque, mieux vaut écrire le premier membre (ou le second) sur deux lignes et conserver ainsi la disposition plus suggestive à l'œil « le premier membre à gauche, le second à droite ». Ce qui permet, si des transformations interviennent dans un seul des membres, de ne pas recopier celui qui reste inchangé (recopier comportant des risques de fautes de copie, moins on recopie moins on risque de se tromper).

Mêmes recommandations pour l'écriture des rapports; les « traits de fraction » sont écrits en premier à hauteur normale; on s'efforce d'équilibrer l'écriture.

Exemple :

$$\frac{\dfrac{1+ax}{x-a}-a}{1-a\dfrac{1-ax}{x+a}}=\frac{[1+ax-a(x-a)](x+a)}{[x+a-a(1-ax)](x-a)}$$

$$=\frac{(1+a^2)(x+a)}{(x+a^2x)(x-a)}$$

$$=\frac{x+a}{x(x-a)}.$$

> Lisibilité, clarté de l'écriture sont les ennemis naturels des fautes de calcul.
>
> Équilibre des dispositions, aération des calculs contribuent à l'agrément du calculateur donc au confort de son moral.

Le moral du calculateur.

A priori, on pourrait croire qu'il ne joue aucun rôle; le calcul n'est pas le domaine de l'affectivité : « quand on calcule, on ne fait pas de sentiment! » Cela ne doit pas être vrai puisque tout le monde a vu des calculateurs se décourager, s'embrouiller par énervement, se persuader enfin « qu'ils ne s'en sortiront jamais » (sentiment évidemment peu favorable à une issue heureuse). Dans un calcul, comme dans toute recherche, une certaine sérénité, de la confiance en soi faite de vigilance vis-à-vis du calcul et d'indifférence à tout ce qui n'est pas le calcul en cours, sont au bénéfice du calculateur. Contrairement à ce que pensent beaucoup de gens qui n'ont pas la pratique du calcul, on peut aimer calculer, éprouver une véritable satisfaction devant un calcul bien conduit et bien disposé.

La reproduction d'une page de calcul de Le Verrier dans ses travaux qui l'ont conduit à la découverte de la planète Neptune, donnerait une petite idée de ce qu'étaient les calculs des astronomes avant l'utilisation des grands ordinateurs. *« C'est ainsi,* écrivait Arago, *qu'on découvre une planète au bout de sa plume! »*

Peut-on dégager quelques principes pour la bonne conduite d'un calcul? J'en soulignerai quatre :

1. **Préparer le calcul,** le penser en projet avant de l'écrire, en imaginer les phases successives; dans le cas d'un calcul numérique, cette préparation peut aller jusqu'au dessin d'un schéma de calcul avec cases où s'inscriront les données, les résultats intermédiaires, le résultat final.

2. **Développer l'écriture,** en particulier dans tout calcul littéral, de façon claire comme il a déjà été dit et de telle façon qu'à tout moment le calcul puisse être interrompu, vérifié, repris, poursuivi.

3. **Pourchasser, déceler les fautes éventuelles;** malgré l'attention qu'on porte au calcul, des fautes peuvent être commises; il y a des invraisemblances qui, parfois, les décèlent : encore faut-il y penser, à ces invraisemblances (on a vu des étourdis écrire la hauteur de l'échelle est 3724 m, au lieu de 3,72 m ou même $-3{,}7$ m); encore faut-il rester toujours vigilant, ne pas s'endormir au calcul comme d'autres s'endorment au volant : ne jamais oublier pourquoi et pour quoi on calcule.

4. **Présenter le résultat,** le faire clairement apparaître, au besoin grâce à un encadrement au feutre de couleur.

Et puis, j'oubliais, de ces quatre principes, c'est sans doute le cinquième qui est le plus important :

5 Cinquième principe : tout calcul doit être vérifié. Plusieurs fois.

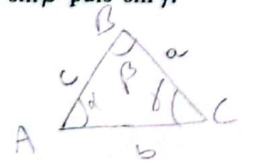
Un calcul littéral

A, B, C sont trois points non alignés du plan euclidien; a, b, c, désignent les distances respectives de B à C, de C à A, de A à B; en désignant par α, β, γ les « mesures » des angles du triangle ABC (α, β, γ sont trois réels de l'intervalle ouvert $]0, \pi[$. Le calcul des normes des vecteurs égaux $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$ donne la relation :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$$

et de même $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos\beta$; $c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos\gamma$. Le problème est de tirer de ces formules les relations entre a, b, c et les sinus de α, β, γ.

L'idée est de tirer $\cos\alpha$ en fonction des côtés et d'en déduire $\sin\alpha$; le passage au carré ($\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$) n'entraînera pas de discussion puisque $\alpha \in]0, \pi[$ entraîne $\sin\alpha > 0$. Le calcul de $\sin\alpha$ suffira : par permutation circulaire sur (a, b, c) on obtiendra $\sin\beta$ puis $\sin\gamma$.



$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2} = \frac{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}.$$

Dans la suite, on exploite plusieurs fois la factorisation de la différence de deux carrés :

$$\sin^2\alpha = \frac{(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)}{4b^2c^2}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{[(b+c)^2-a^2][a^2-(b-c)^2]}{4b^2c^2}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{4b^2c^2}$$

soit en reprenant les notations classiques $a+b+c = 2p$, $b+c-a = 2(p-a)$:

$$\sin^2\alpha = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2}$$

ou mieux :

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{abc}$$

ce qui démontre « la proportionnalité des sinus aux longueurs des côtés ».

Un calcul numérique

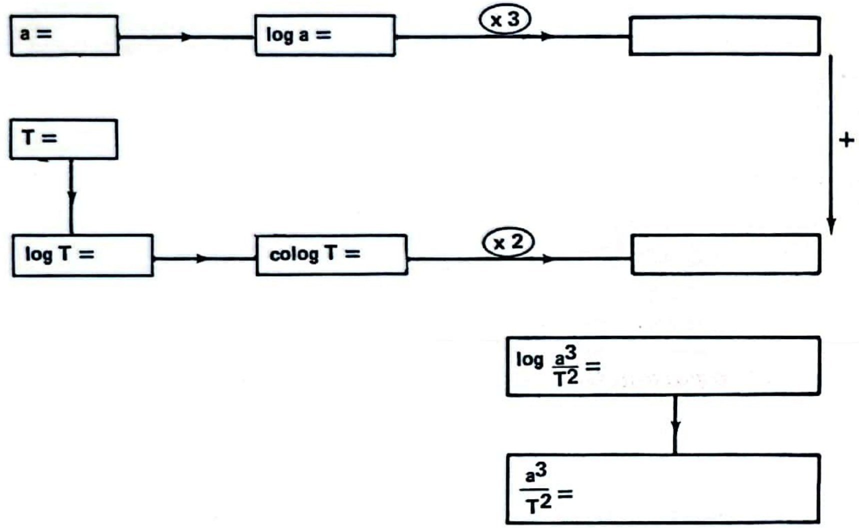
?

A partir des données numériques prises dans un annuaire, vérifier la troisième loi de Kepler pour les six planètes connues à l'époque. Énoncé de cette loi : « le quotient du cube de la distance moyenne de la planète au Soleil par le carré de sa période de révolution est le même nombre quelle que soit la planète ». (C'est une constante qui dépend seulement et des unités choisies pour les distances et les périodes puis de la masse du Soleil et de la constante de la gravitation universelle, mais cela c'est Newton qui l'a démontré et dans le calcul demandé nous n'en avons que faire).

En pratique, nous avons donc le même calcul à faire six fois : une disposition en tableau sera préférable. Pensons cependant pour commencer au calcul pour une seule planète. La manière dont nous l'écrirons dépend du matériel de calcul dont nous nous servons. Supposons que nous disposons d'une table de logarithmes. La formule est :

$$\log\frac{a^3}{T^2} = 3\log a + 2\ \mathrm{colog}\ T.$$

Ce qui conduit au schéma suivant :



Remarque 1 : pour démontrer l'invariance du quotient $\frac{a^3}{T^2}$ quelle que soit la planète, le calcul du logarithme de ce quotient suffit; il est pourtant intéressant d'avoir une valeur de ce quotient et de noter, d'une planète à une autre, de petits écarts qui n'infirment pas la loi énoncée par Kepler dans son *Astronomia Nova* en 1619 (qui était dédiée à Neper car Kepler avait utilisé la toute nouvelle invention des logarithmes pour soulager ses calculs).

Remarque 2 : le schéma du calcul peut être reproduit six fois; on peut aussi se contenter d'un tableau en six colonnes, chaque colonne reproduisant la suite des calculs pour la planète considérée. Alors la dernière ligne du tableau permet la comparaison des résultats et par conséquent la vérification de la loi.

Un calcul de traduction

Dans le calcul des propositions, en logique, deux systèmes de notation sont utilisés; l'un est anglo-saxon (AS), l'autre polonais (P) selon l'origine de leurs inventeurs.

Dans l'écriture AS, les connecteurs logiques à deux places sont écrits entre les propositions qu'ils connectent :

$$p \wedge q; \quad p \vee q; \quad p \Longrightarrow q; \quad p \Longleftrightarrow q$$

et $\neg p$ (pour non p) seul connecteur à une place utilisé.

Dans l'écriture P, tous les connecteurs, qu'ils soient à une ou à deux places s'écrivent avant la ou les propositions connectées :

$$\mathrm{N}p \text{ (pour non } p\text{)}; \quad \mathrm{K}pq; \quad \mathrm{A}pq; \quad \mathrm{C}pq; \quad \mathrm{E}pq.$$

Il résulte de ces conventions d'écriture que les parenthèses dont l'emploi est obligatoire dans l'écriture AS deviennent tout à fait superflues dans l'écriture P. Exemple : l'écriture AS suivante :

$$(p \vee (q \wedge r)) \Longleftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$$

devient en écriture P :

$$\mathrm{EA}p\mathrm{K}qr\mathrm{KA}pq\mathrm{A}pr.$$

Voici deux formules de De Morgan écrites l'une en AS, l'autre en P :

$$\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow ((\neg p) \vee (\neg q)); \quad \mathrm{ENA}pq\mathrm{KN}p\mathrm{N}q.$$

Problème à paramètres

Un exemple nous en est donné par l'énoncé 3 : selon les valeurs de :

$$\varphi \in [0, \pi[\cup]\pi, 2\pi],$$

le calcul du module et de l'argument de z ne se présente pas de la même façon. En effet, on a obtenu :

$$z = \cos\frac{\varphi}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)+i\,\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)\right]$$

dans laquelle on reconnaît l'écriture $z = \rho\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)$ où ρ est le module de z et θ son argument; le module est un réel positif; ici $\cos\frac{\varphi}{2}$ est différent de zéro mais peut être positif ou négatif; alors on distingue les deux cas :

1[er] cas :

$$0 \leqslant \varphi < \pi \quad |z| = \cos\frac{\varphi}{2} \quad \text{et arg } z = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$$

2[e] cas :

$$\pi < \varphi \leqslant 2\pi \quad |z| = -\cos\frac{\varphi}{2} \quad \text{et arg } z = \frac{3\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}.$$

Remarque sur la suite de cet énoncé : quand on a calculé module et argument de z, le module et l'argument de $z' = -\frac{1}{z}$ s'en déduisent facilement. On peut donc être tenté d'utiliser tous ces résultats pour répondre à la deuxième question qui est du domaine géométrique. Or, il est plus simple de remarquer que les coordonnées cartésiennes de M, d'affixe z sont, **quel que soit** φ **:**

$$x = \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$$

et
$$y = \cos^2 \frac{\varphi}{2}$$
(avec x et y différents de zéro) soit par élimination de φ :
$$x^2 + y^2 - y = 0 \quad (x \neq 0 \quad \text{et} \quad y \neq 0).$$
Donc lorsque le paramètre φ varie, M décrit le cercle dont on vient d'écrire l'équation à l'exception du point origine des coordonnées.

Le calcul des coordonnées de M′ conduit au dernier résultat demandé; mais je laisse au lecteur amateur des « belles transformations géométriques » le soin de trouver la transformation qui échange M et M′.

Autre remarque : pour avoir une idée des ensembles décrits par M et M′ on a aussi la ressource de construire avec précision les figures dans deux ou trois cas particuliers. Technique de « bricolage » qui ne donne aucune certitude mais qui permet d'éliminer des idées aberrantes (par exemple, celle que M décrirait une droite ou une portion de droite).

Et s'il y avait plusieurs paramètres? Pour savoir ordonner la discussion, il suffit de rappeler celle de l'équation du premier degré à coefficients réels à résoudre dans les réels :
$$ax + b = 0 \qquad ax = -b.$$
Cas 1: $a \neq 0$, il existe une racine réelle et une seule $-\frac{b}{a}$;

Cas 2: $a = 0$, ce cas se subdivise en :

Cas 2.1. : $b \neq 0$, l'équation n'a pas de solution;

Cas 2.2. : $b = 0$, tout x réel est solution.

Autre exemple : l'endomorphisme f du vectoriel défini par la matrice à coefficients réels $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

Cas 1 : le déterminant $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \neq 0$, alors f est bijectif, c'est un automorphisme; $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$ et $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$.

Cas 2 : $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = 0$ ce qui signifie « les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ de la base canonique sont transformés en les vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ respectivement et l'annulation du déterminant précédent exprime que les deux vecteurs obtenus sont linéairement dépendants; alors trois cas :

Cas 2.1. : aucun des deux vecteurs obtenus n'est nul; l'image de f est la droite vectorielle de vecteur directeur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$; le noyau de f est la droite vectorielle d'équation $ax - cy = 0$ de vecteur directeur $\begin{pmatrix} -c \\ a \end{pmatrix}$.

Cas 2.2. : le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est nul, le vecteur $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ ne l'est pas; l'image de f est la droite vectorielle ayant ce dernier vecteur pour vecteur directeur; le noyau de f est la droite vectorielle d'équation $y = 0$; ce cas 2.2. est donc un cas particulier de 2.1. Il y a un autre cas particulier semblable si $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ n'est pas nul alors que $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ l'est.

Cas 2.3. Si les deux vecteurs sont nuls, c'est-à-dire si les quatre coefficients de la matrice sont nuls, l'image de f est le seul vecteur nul et le noyau de f est le vectoriel tout entier.

Calculs d'intégration

Commençons par deux rappels.

Un *clan* C est une famille de parties d'un ensemble E telle que :

1. La réunion de deux parties de E qui sont éléments de C est un ensemble du clan;
2. La différence de deux ensembles du clan est un ensemble du clan. On remarque alors que si X et Y sont des ensembles du clan $X \cap Y = X \setminus Y^c$ (ou Y^c est le complémentaire de Y dans E), donc si X et Y sont des ensembles du clan, leur intersection est un ensemble du clan.

Une mesure m de Jordan définie sur le clan C est une application de C dans $\mathbb{R}^+$ telle que :
$$m(X \cup Y) + m(X \cap Y) = m(X) + m(Y).$$
A partir des fonctions en escalier, des fonctions affines par morceaux, on définit alors une mesure de Jordan des aires limitées par une portion de l'axe des abscisses, deux droites parallèles à l'axe des ordonnées et un arc du graphique de la fonction f.

On démontre alors (si a et b sont les abscisses des deux droites parallèles à l'axe des ordonnées et si $\forall x \in [a, b]\ f(x) \geqslant 0$, une mesure de la surface ainsi définie est donnée par la formule :
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$
où F est une primitive de f c'est-à-dire $\forall x \in [a, b]\ F'(x) = f(x)$.

Le calcul de l'intégrale définie (la notation précédente) passe donc en général par celui d'une primitive F de la fonction f; cette primitive est encore dite « intégrale indéfinie de f et notée :
$$F(x) = \int f(x)\,dx + k$$
(k constante réelle arbitraire).

Vous aurez donc intérêt à réunir sur une fiche du F.P., sur une colonne des fonctions, sur la colonne de droite leurs dérivées (pour celles qui sont dérivables); en lisant la fiche de droite à gauche, on passe d'une fonction à une de ses primitives.

Exemples :

$$\begin{array}{lll} & \text{fonction} \longrightarrow & \text{dérivée} \\ n \neq 0 & x^n & n x^{n-1} \\ & \sin x & \cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \\ \hline & \text{primitive} \longleftarrow & \text{fonction.} \end{array}$$

Écrire $d \ln x = \frac{dx}{x}$ équivaut à $\int \frac{dx}{x} = \ln x + k$ sachant que l'écriture $\ln x = \operatorname{Log} x$ désigne le logarithme népérien et suppose $x > 0$.

Pour intégrer (calculer une intégrale indéfinie ou finie), en plus de l'utilisation du petit lexique de primitives, vous devez connaître le procédé de l'intégration par parties : puisque, u et v étant deux fonctions différentiables :

$$u\,dv = d(uv) - v\,du, \int u\,dv = uv - \int v\,du + k.$$

L'énoncé 2 (voir p. 28) propose en seconde partie ce mode d'intégration et avec un logarithme sous le signe somme, vous ne disposez pas ici d'autre moyen :

$$\begin{array}{ll} u = \operatorname{Log} t & du = \frac{dt}{t} \\ dv = dt & v = t \end{array}$$

$$\int \operatorname{Log} t\, dt = t \operatorname{Log} t - \int dt + k = t \operatorname{Log} t - t + k$$

$$\int_1^X \operatorname{Log} t\, dt = X \operatorname{Log} X - 1 \cdot \operatorname{Log} 1 - (X-1) = X \operatorname{Log} X - X + 1.$$

J'ouvre ici une parenthèse à ne pas lire si on refuse de jeter le moindre coup d'œil sur ce qui n'est pas le programme de la classe. Par un souci légitime de ne pas surcharger les programmes, on n'y a pas inscrit l'intégration par transformation dite vulgairement « par changement de variable »). Je la donne pourtant ici en pensant qu'elle peut vous aider à sortir d'une situation difficile éventuellement.

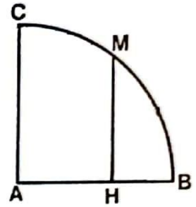
g est une fonction admettant une dérivée continue sur $[a, b]$ telle que $a \leqslant t \leqslant b$ entraîne $A \leqslant g(t) \leqslant B$ où A et B sont deux réels tels que $A \leqslant B$ (g est donc bornée sur l'intervalle considéré); f est une fonction continue sur [A, B]. Alors, pour tout $u \in [a, b]$:

$$\int_{g(a)}^{g(u)} f(s)\,ds = \int_a^u g \circ f(t)\, g'(t)\, dt = \int_a^u f(g(t))\, g'(t)\, dt$$

et en particulier :

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(s)\,ds = \int_a^b f(g(t))\,g'(t)\,dt.$$

Voici un exemple de l'utilisation de cette méthode : calcul de l'aire d'un quart de cercle de rayon r et de centre A.



$\overline{AH} = u\ \overline{HM} = \sqrt{r^2 - u^2}$, aire AHMCA $= \int_0^u \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$, aire ABCA $= \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$

soit posant $x = r \cos t$, $dx = -r \sin t\, dt$:

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 r \sin t\,(r \sin t)\,dt = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt = \frac{r^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t)\, dt = \frac{\pi r^2}{4}.$$

Vous me direz que ça ne vous apprend rien et que vous n'avez pas attendu la lecture de cette page pour connaître la formule de l'aire du cercle. Aussi bien je me dépêche de fermer cette parenthèse et vous me promettez de n'en rien dire à personne!

Calcul des probabilités

Les probabilités constituent un chapitre un peu à part dans les programmes puisque c'est le seul qui, délibérément, traite un sujet de mathématiques appliquées (à moins qu'on ne considère aussi le chapitre de cinématique comme une partie de la mécanique et par conséquent comme des mathématiques appliquées). En tout cas, que ce soit pour cette raison ou pour une autre, les problèmes de probabilités ont mauvaise presse chez les élèves. En fait, il y a toujours un sujet qui fait « croquemitaine ». Jadis, c'était l'arithmétique; aujourd'hui les « probas » ont pris la relève, sans raison véritable : vous savez bien que Croquemitaine est un mythe. Alors, en passant en revue des aspects importants de ces éléments de calcul des probabilités, faisons-le rentrer dans sa boîte!

1. *L'axiome 1.* Dans toute situation qui ressortit au calcul des probabilités, on retrouve : un ensemble d'événements élémentaires ou **épreuves** (qui est un ensemble fini dans les conditions du programme); cet ensemble E est encore appelé **espace des épreuves. Un événement** est une partie de E; **l'espace des événements,** noté $\mathcal{A} = \mathcal{P}(E) = 2^E$, l'espace des parties de E est un clan au sens donné plus haut à ce mot.

NB

L'espace $\mathcal{A}$ des événements est probabilisé ssi on a défini une application p de $\mathcal{A}$ sur l'intervalle $[0, 1]$ des réels telle que :

$$\begin{array}{rcl} p : \mathcal{A} & \longrightarrow & [0;1] \\ X & \longmapsto & p(X) \end{array}$$

$p(\emptyset)=0$, $p(E)=1$, $p(X \cup Y)=p(X)+p(Y)-p(X \cap Y)$.

On peut donc remarquer en passant que la probabilité est une mesure de Jordan définie sur le clan des événements.

2. *Sur une difficulté.* Le Chevalier de Méré trouvait qu'avec trois dés, il devait être aussi probable d'obtenir un total de 11 ou de 12; pour obtenir 11, il concevait les six épreuves suivantes :

6, 4, 1 ; 6, 3, 2 ; 5, 5, 1 ; 5, 4, 2 ; 5, 3, 3 ; 4, 4, 3 ;

pour obtenir 12 les six épreuves suivantes :

6, 5, 1 ; 6, 4, 2 ; 6, 3, 3 ; 5, 5, 2 ; 5, 4, 3 ; 4, 4, 4 ;

alors que sa grande expérience du jeu de dés l'amenait à penser $p(12)<p(11)$. Pascal lui expliqua son erreur en imaginant trois dés de couleurs différentes; un tirage tel que 6, 4, 1 peut être obtenu de six façons différentes (il y a six permutations de six objets); 5, 5, 1 peut être obtenu de trois façons différentes seulement et 4, 4, 4 d'une seule façon. La description donnée par Méré n'est pas celle de l'espace des épreuves : le cardinal de E est 6^3; le cardinal de l'événement « tirer 11 » est $6+6+3+6+3+3=27$; celui de l'événement « tirer 12 » est $6+6+3+3+6+1=25$; soit, toutes les épreuves ayant des probabilités égales, $p(11)=\frac{27}{6^3}=0{,}125$ et $p(12)=\frac{25}{6^3}\simeq 0{,}116$ (admirons en passant la sensibilité de Méré ou son intuition).

3. *L'axiome 2.* A et B sont deux événements et $p(A)\neq 0$; alors la probabilité de B si A est réalisé, ou « probabilité de B si A » encore dite **probabilté conditionnelle** est :

$$p\left(\frac{B}{A}\right)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}.$$

De cet axiome, sont tirés un grand nombre de résultats et de formules utiles :

- Formule des **probabilités composées** $p(A\cap B)=p\left(\frac{B}{A}\right)\cdot p(A)$.

- **Indépendance en probabilité des événements A et B** (ou indépendance stochastique) :

$$p\left(\frac{B}{A}\right)=p(B) \quad \text{ou} \quad p\left(\frac{A}{B}\right)=p(A)$$

donc aussi bien $p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B)$.

- **Formule de Bayes :**

$$p\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{p\left(\frac{B}{A}\right)\cdot p(A)}{p(B)}.$$

oui

Cette formule est particulièrement intéressante lorsque $A_1, A_2, \ldots, A_n$ est une partition de E; on dit alors que $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ est un système complet d'événements; la formule de Bayes donne :

$$p\left(\frac{A_1}{B}\right)=\frac{p\left(\frac{B}{A_1}\right)\cdot p(A_1)}{p\left(\frac{B}{A_1}\right)\cdot p(A_1)+\ldots+p\left(\frac{B}{A_n}\right)\cdot p(A_n)}.$$

Un exemple d'utilisation de la dernière formule : 100 cobayes sont traités par l'un ou l'autre des trois produits A, B, C; 50 cobayes reçoivent A, 30 reçoivent B et 20 reçoivent C. On sait par ailleurs que A déclenche la maladie M dans 25 % des cas, B dans 60 % des cas et C dans 10 % des cas. La probabilité d'avoir la maladie M si A a été absorbé est notée $p\left(\frac{M}{A}\right)=0{,}25$; de même, $p\left(\frac{M}{B}\right)=0{,}6$ et $p\left(\frac{M}{C}\right)=0{,}1$. Un cobaye s'échappe; on le rattrape et il est malade. Quelle est la probabilité qu'il soit malade par absorption de A?

$$p\left(\frac{A}{M}\right)=\frac{p\left(\frac{M}{A}\right)\cdot p(A)}{p\left(\frac{M}{A}\right)\cdot p(A)+p\left(\frac{M}{B}\right)\cdot p(B)+p\left(\frac{M}{C}\right)\cdot p(C)}=\frac{5}{13}.$$

4. *Variables aléatoires.* Une variable aléatoire X est (contrairement à ce que son nom suggère) une application de l'espace probabilisé des événements $\mathcal{A}$ dans l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} X : \mathcal{A} & \longrightarrow & 2^{\mathbb{R}} \\ A & \longmapsto & X(A)=B \end{array}$$

cette application étant telle que la probabilité de B, notée $p'(B)$ est égale à la probabilité de l'image réciproque de B dans $\mathcal{A}$ par l'application réciproque de X.

Exemple classique de la **variable aléatoire de Bernouilli :** dans une urne, il y a b boules blanches et c boules noires. Si on tire une blanche $X=1$, si on tire une noire $X=0$. On effectue n tirages successifs et on calcule $Y=X_1+X_2+\ldots+X_n$; autrement dit Y est le nombre de blanches obtenu en n tirages. Notons $\binom{n}{k}$ le nombre des combinaisons de k lettres prises parmi n lettres; la probabilité d'obtenir k boules blanches en n tirage est :

$$p(Y=k)=\binom{n}{k}\alpha^k\beta^{n-k}$$

en posant :

$$\alpha = p\,(X=1) = \frac{b}{b+c}; \quad \beta = \frac{c}{c+b}.$$

En voici une application : par des méthodes statistiques (qui ne sont pas discutées ici) on a trouvé que 38% des personnes d'une certaine population fument du tabac. Si vous prenez un nom au hasard dans la liste des membres de cette population, la probabilité qu'il soit fumeur est 0,38, la probabilité qu'il ne le soit pas $1-0{,}38=0{,}62$. Dans une assemblée de 37 personnes recrutées dans cette population, la probabilité pour qu'il y ait 13 fumeurs est :

$$p\,(Z=13) = \binom{37}{13}(0{,}38)^{13}(0{,}62)^{24}$$

Z est une variable aléatoire de Bernouilli et cette formule en donne la probabilisation.

5. *Vous devez compléter* ce très bref aperçu sur les probabilités : des notions utiles, fonction de répartition, espérance mathématique (à rapprocher avec le calcul barycentrique), etc. Votre F.P. est là pour ça.

L'utilisation de ses connaissances

« A science is said to be useful if its developments tends to accentuate the existing inequalities in the distribution of wealth, or more directly promotes the destruction of human life. »

G.-H. Hardy

« Les mathématiques sont des inventions très subtiles et qui peuvent beaucoup servir tant à contenter les curieux qu'à faciliter tous les arts et diminuer le travail des hommes. »

René Descartes

En dehors de l'intérêt qu'on peut trouver à les développer pour elles-mêmes, **les mathématiques sont-elles utiles?**

La place manque ici pour examiner la question sous tous ses aspects. Je me contente de proposer la confrontation des citations de Descartes et de Hardy, en rappelant quelques dates.

1. **Descartes** a vécu dans la première moitié du XVII^e siècle; des géomètres qui étaient ses contemporains, La Hire et Roberval par exemple, s'intéressaient beaucoup aux mécanismes alors que l'ère du machinisme était encore à venir.

2. **G.-H. Hardy** (1877-1947) est un grand mathématicien anglais spécialiste de la théorie des nombres; il a écrit un ouvrage de réflexions sur le travail du mathématicien, *« A mathematician's apology »;* la phrase citée plus haut a été écrite en 1915 et non, comme on pouvait être tenté de penser, au lendemain d'Hiroshima...

Utiles ou non, les mathématiques, saurons-nous utiliser celles que nous connaissons?

Ce n'est pas un problème simple. On peut accumuler des connaissances et ne pas savoir s'en servir comme ces animaux toujours soucieux d'accumuler des réserves et mourant de faim sur leurs greniers dont ils ne savent pas retrouver la porte.

Problème de **transfert.** Dans une théorie mathématique, les définitions et les axiomes ont été obtenus par abstraction à partir du réel; il y a eu simplification pour construire un modèle qui est une fiction, le résultat d'un travail de l'esprit. Maintenant, on revient devant la réalité qui dépasse la fiction comme on dit à juste titre : comment transférer ce que vous savez être vrai pour le modèle mathématique dans ce qui est la réalité non simplifiée? Dans le schéma de l'activité mathématique présenté p. 5, c'est la phase « concrétiser », symétrique « d'abstraire ». Pas plus facile.

On se limitera à quelques exemples.

Dans les sciences de la nature, il existe une pratique déjà longue de la mathématisation. Surtout en physique et en chimie. Mais aussi dans les sciences de la vie. Il y a le cas exemplaire de l'astronomie.

Dans les sciences humaines, la mathématisation est une pratique plus récente. Ce ne sont pas les mêmes connaissances mathématiques qui sont utilisables en linguistique et en physique. Importance, ici de la combinatoire.

Dans les sciences de la nature

La mathématisation de la géométrie et de la mécanique est si ancienne que tout ce qui concerne la première est devenue partie de la mathématique elle-même et que l'enseignement de la seconde reste partagé entre les professeurs de physique ou de mathématique (sauf à l'université où la mécanique a son autonomie).

En géométrie, les difficultés se situent au niveau théorique, quand on réfléchit à la nature des axiomes et des définitions. Dans la pratique, on sait bien qu'en parlant de droites on ne peut, dans la réalité, que concevoir des segments ou parfois des demi-droites. De même pour les plans : un plan physique n'est jamais illimité; on y considère pourtant comme vrais presque tous les théorèmes de la géométrie euclidienne.

Presque tous et c'est dans ce presque que résident les difficultés du passage de la géométrie axiomatique à la géométrie physique et vice-versa.

Dès qu'elle s'est constituée en science, au XVIIe siècle, la mécanique a utilisé des mathématiques tout en provoquant d'immenses progrès de celles-ci : les méthodes analytiques en géométrie, le calcul différentiel en analyse.

Pour illustrer ces propos, voici deux problèmes :

Moment d'inertie du plateau d'un tourne-disque. On suppose ce plateau homogène de masse m, de rayon r; on néglige la masse de l'axe d'entraînement. Si le rayon était x (compris entre 0 et r) le moment d'inertie serait évidemment fonction de x et la différentielle pour x de ce moment d'inertie serait :

$$\mathrm{dI} = x^2\,\mathrm{d}m$$

où $\mathrm{d}m$ est la différentielle de la masse (ou encore la masse d'un anneau de largeur $\mathrm{d}x$); soit $\mathrm{d}m = 2\,\pi\lambda x\,\mathrm{d}x$, λ étant un coefficient de masse volumique. Finalement :

$$\mathrm{dI} = 2\,\pi\lambda\,x^3\,\mathrm{d}x.$$

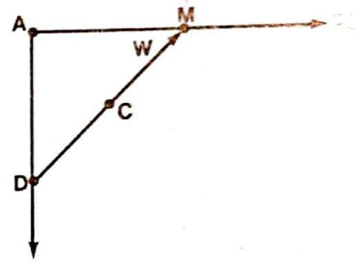
On obtient le moment d'inertie cherché I par intégration :

$$I = \int_0^r 2\,\pi\lambda\,x^3\,\mathrm{d}x = 2\,\pi\lambda\frac{r^4}{4}$$

et comme $\pi\lambda\,r^2 = m$, $I = \frac{1}{2}m\,r^2$.

Problème du chien. Exemple de mise en équation conduisant à une équation différentielle. Sur la route Ax, un chasseur part de A et marche à la vitesse uniforme v; il siffle son chien qui est en D sur la perpendiculaire en A à Ax et à une distance $e = AD$. Le chien court *vers* son maître avec une vitesse uniforme w; le vecteur vitesse du chien est toujours dirigé vers le chasseur. Le problème est d'étudier la trajectoire du chien.

Les coordonnées x et y du chien à l'instant t sont des fonctions du temps. Le vecteur vitesse du chien a pour norme w et pour coordonnées x' et y' dérivées de x et y par rapport au temps; de plus les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CW}$ sont colinéaires.



Équations :

$$\begin{cases} \dfrac{x - vt}{x'} = \dfrac{y}{y'} & \text{(exprime la colinéarité)} \\ x'^2 + y'^2 = w^2 & \text{(norme de la vitesse du chien).} \end{cases}$$

En chimie, on a longtemps prétendu que « la règle de trois suffit ». Il est vrai que pour les premières règles de combinaison des corps simples, les applications linéaires sont les plus utilisées. Raison de plus pour les considérer comme telles et éviter les stupides « raisonnements de règle de trois ». Et puis ne pas croire que la proportionnalité suffit à résoudre tous les problèmes de chimie.

En biologie, statistique et probabilités jouent un rôle important. On en a vu un exemple p. 65 avec une utilisation de la formule de Bayes. L'étude des formes demande aussi des connaissances de géométrie; pensez aux symétries des cristaux aux axes de répétition des échinodermes...

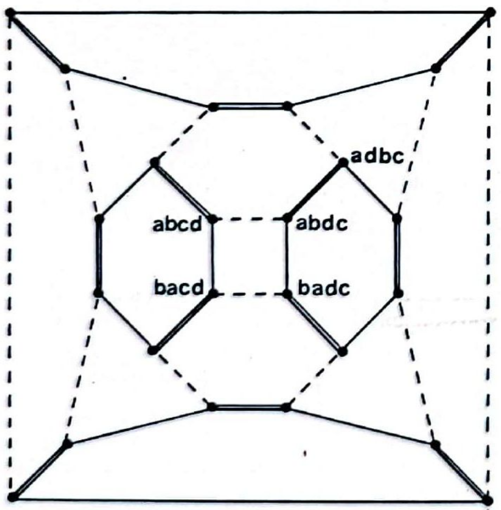
En astronomie, toute la partie mécanique est mathématisée; c'est même cette mécanique céleste qui a été à l'origine des progrès généraux de la mécanique avec Newton. Les techniques modernes de calcul ont transformé les perspectives : des calculs très longs qui ne pouvaient pas être envisagés deviennent possibles : grâce aux satellites artificiels, la mécanique céleste est devenue une science expérimentale complète donc fortement mathématisée. Enfin statistique et probabilités interviennent en astronomie stellaire : on n'étudie pas *une* étoile mais des populations stellaires et parmi elles des spécimens représentatifs. Les modèles d'étoiles qui en décrivent le rayonnement utilisent des théories savantes de la physique des quanta donc beaucoup de mathématiques.

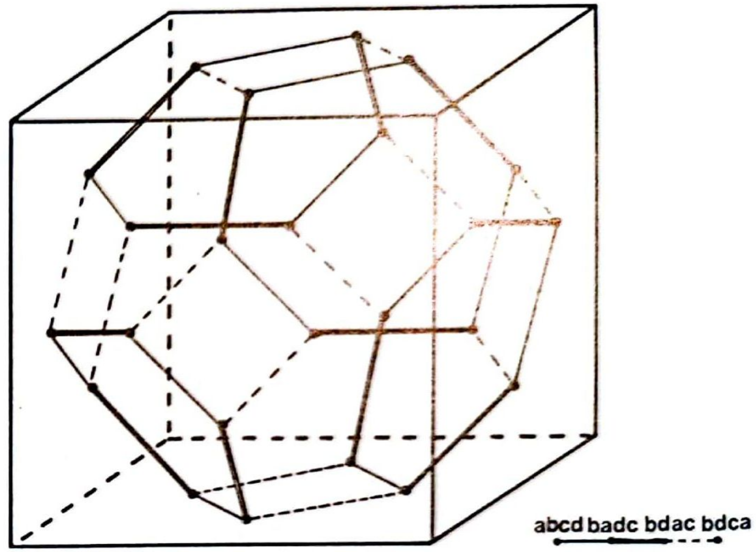
Dans les sciences de l'homme

Si je n'ai pu donner que de brèves indications sur l'utilisation des mathématiques dans les sciences de la nature, je crains d'être encore plus superficiel pour les sciences de l'homme. Je m'efforcerai de dégager quelques caractères des mathématiques utilisées en sociologie, en psychologie, en linguistique.

La plupart des ensembles considérés sont finis; il y a beaucoup d'éléments, leur dénombrement est parfois difficile mais on est assuré a priori d'avoir affaire à des *structures finies.* De là l'importance de la *combinatoire,* des relations classificatoires *(relations d'équivalence),* et des *relations d'ordre* (qui permettent des rangements).

Le permutoèdre à 24 sommets. Il représente les 24 façons de ranger les quatre lettres de l'ensemble $\{a, b, c, d\}$ pour en faire une liste. Il y a 24 listes possibles; exemples $(abcd)$, $(bacd)$, $(abdc)$, $(acbd)$; on passe de la première liste à la deuxième par permutation i des deux premières lettres, de la première à la troisième liste par permutation j des deux dernières lettres, de la première à la quatrième liste par permutation k des deux lettres du milieu. De chaque sommet du permutoèdre qui représente l'une des 24 listes, partent trois traits représentatifs des trois permutations i, j, k.





(Pour la commodité de l'impression, le permutoèdre a été dessiné dans le plan; on peut le réaliser dans l'espace : un polyèdre dont les faces sont des carrés et des pentagones réguliers.)

Autre exemple de l'adaptation aux sciences humaines des définitions et des calculs sur les applications injectives ou surjectives d'un ensemble E (à n éléments) dans un ensemble F (à p éléments). Soit :

$$\varphi : E \longrightarrow F$$
$$x \longmapsto y = \varphi(x).$$

Pour tout x, élément de E, φ a une valeur y qui est élément de F. Dans F, l'image de φ soit $\varphi_*(E)$, est le sous-ensemble des éléments de F qui ont un antécédent au moins : φ réalise **une sélection dans F** (les éléments à antécédents, les éléments sans antécédent). Cas particulier où il n'y a pas de sélection : l'application φ est surjective, $\varphi_*(E) = F$.

Soit y_1 un élément fixe de l'image; à y_1 correspond dans E le sous-ensemble de ses antécédents; ce sous-ensemble est l'image réciproque de y_1 qu'on notera $\varphi^*(y_1)$. En prenant les images réciproques de tous les éléments de l'image, on définit :

1. L'application réciproque de φ qui est une application de $\varphi_*(E)$ dans l'ensemble des parties de E.

2. Une partition de E puisque deux éléments de E sont dans la même classe (modulo φ) si et seulement si ils sont antécédents du même élément de l'image.

Enfin, cas particulier : l'application φ est injective si et seulement si chaque classe de la partition précédente ne contient qu'un seul élément.

Réaliser une sélection dans une population donnée, réaliser une classification dans un ensemble donné sont des actions qui vont de pair (sélectionner dans l'arrivée, classer dans le départ).

Une récurrence célèbre permet de dénombrer les applications injectives de E dans F (n éléments dans E, p éléments dans F et $n \leqslant p$).

Soit y_1 un élément déterminé de F. Dans l'application injective φ, ou bien y_1 n'est pas élément de l'image ou bien il est élément de l'image. Parmi les $\mathrm{I}(n,p)$ applications injectives de E dans F, il y a donc deux classes à dénombrer séparément. Les premières sont des applications injectives de E dans F $\setminus \{y_1\}$; il y en a $\mathrm{I}(n,p-1)$. Les secondes, si on extrait y_1 et son antécédent x_1 sont des applications injectives de E $\setminus \{x_1\}$ dans F $\setminus \{y_1\}$ et il y a $\mathrm{I}(n-1,p-1)$ injections de cette sorte; mais il y a n façons de choisir x_1 comme antécédent de y_1; soit en tout $n\,\mathrm{I}(n-1,\ p-1)$ injections de la seconde classe. La formule de récurrence sur le nombre des injections s'écrit :

$$\text{(pourvu que } n \leqslant p-1\text{)} \quad \mathrm{I}(n,p)=\mathrm{I}(n,p-1)+n\,\mathrm{I}(n-1,p-1) \qquad (i)$$

Connaître $\mathrm{I}(n,p)$ permet de calculer $\binom{p}{n}$ c'est-à-dire le nombre de parties à n éléments pris dans un ensemble à p éléments; il suffit d'effectuer toutes les permutations possibles sur les n éléments :

$$\binom{p}{n}=\frac{\mathrm{I}(n,p)}{n!}.$$

La formule de récurrence (i) devient par division par $n!$

$$\binom{p}{n}=\binom{p-1}{n}+\binom{p-1}{n-1} \qquad (t)$$

où l'on reconnaît la formule du triangle arithmétique encore dite du triangle de Pascal (bien que Fermat semble bien être le premier à l'avoir étudiée).

On pratique de même pour dénombrer les applications surjectives de E sur F; ce qui exige, cette fois, $n \geqslant p$.

Soit un élément x_1 fixé dans E; à partir de x_1, il y a p façons de choisir y_1 dans F. Ou bien x_1 est seul antécédent de y_1 (seul dans sa classe de la partition E/φ définie par φ), ou bien il n'est pas seul. Le nombre total $\mathrm{S}(n,p)$ des surjections de E sur F est encore partagé en deux classes. Il y a $\mathrm{S}(n-1,p-1)$ surjections de la première classe, surjections de E $\setminus \{x_1\}$ sur F $\setminus \{y_1\}$; il y a $\mathrm{S}(n-1,p)$ surjections de la seconde classe, surjections de E $\setminus \{x_1\}$ sur F. Au total :

$$\text{si } n-1 \geqslant p \qquad \mathrm{S}(n,p)=p\,[\mathrm{S}(n-1,\ p-1)+\mathrm{S}(n-1,p)] \qquad (s)$$

Chaque surjection φ de E sur F réalise une partition E/φ de F, c'est-à-dire une partition d'un ensemble à n éléments en p classes. Par permutations sur les p éléments de F, on obtient toujours la même partition alors que ce n'est plus la même

surjection. Le nombre $\mathrm{S}(n,p)$ des surjections de E sur F et le nombre des partitions de n objets en p classes sont donc liés par la formule :

$$\Pi(n,p)=\frac{\mathrm{S}(n,p)}{p!}.$$

La récurrence (s), par division par $p!$ donne alors la formule de récurrence des nombres de partitions :

$$\Pi(n,p)=\Pi(n-1,p-1)+p\,\Pi(n-1,p) \qquad (\pi)$$

encore appelée formule du triangle de Stirling. Vous pourrez facilement en déduire le tableau des valeurs pour n et p petits, comme vous l'avez déjà fait pour la formule du binôme en utilisant le triangle arithmétique.

s'informer.

L'information et la communication

informer les autres.

« Il faudrait avoir tout lu la plume à la main, et je n'ai pas tout lu. »

Littré

1 Dans cette brève et dernière partie du livre, nous donnons quelques conseils pratiques. Les premiers sur les manières de s'informer, d'accroître ses connaissances.

a D'abord **lire**, de bons textes et de bonne façon.

b Ensuite **prendre des notes** de façon utilisable.

c Quelques **conseils bibliographiques** orienteront vos lectures.

2 D'autres conseils pratiques sont relatifs au besoin qui est le vôtre comme il est celui de tout étudiant et de tout mathématicien : faire connaître à des examinateurs ou à des pairs ce que vous avez pensé, construit, découvert.

a Communiquer par écrit; pour cela il faut **rédiger.**

b Communiquer oralement; comment **préparer** et **réaliser un exposé oral.**

b.1 b.2

Lire et prendre des notes

Choisir un texte : tenir compte de la longueur du texte et de sa difficulté. On débutera par des textes courts (quelques pages) et d'un niveau correspondant à la Terminale. Avec un peu d'entraînement, on abordera des textes plus difficiles.

3 Je conseille une lecture en plusieurs temps : la première assez rapide et complète, sans retour en arrière; une deuxième plus lente, la plume à la main, avec pauses-dictionnaire, retours en arrière si nécessaire et qui doit conduire à une compréhension profonde (c'est-à-dire la rédaction sur C.-J. d'un résumé très complet); une troisième lecture, rapide celle-là, pour vérifier l'exactitude du résumé.

Trois remarques.

important

1. Sur le livre lui-même, n'écrire qu'avec un crayon; mais souligner des mots, numéroter des paragraphes, ce qui peut vous aider à pénétrer dans un texte un peu touffu.

2. Noter soigneusement les renseignements bibliographiques donnés dans le texte lui-même ou en note marginale : la meilleure bibliographie est celle que vous ferez vous-même.

3. Si malgré vos recherches dans d'autres livres, un mot, une notion restent pour vous incompris, notez soigneusement le passage rendu obscur et posez la question à un camarade ou à votre professeur. Peut-être s'agit-il d'une notation que vous ignoriez.

On prend des notes au cours d'une lecture attentive ou en suivant une conférence. Ne pas croire que des techniques modernes (photocopie ou enregistrement au magnétophone), évitent de « prendre des notes ». En effet, ces notes sont une sélection réalisée rapidement (cela ne veut pas dire n'importe comment) : apprendre à dégager, dès lecture ou à l'audition, ce qui est important. C'est porter une attention soutenue au texte ou au cours.

Le support idéal pour ces notes est le **Cahier-Journal** (C.-J.); en titre, la date, le lieu et les circonstances. Écrire brièvement (au besoin avec des abréviations) mais avec précision; en particulier, relever exactement définitions, hypothèses, énoncés de théorèmes, repères importants dans une démonstration compliquée. Au contraire, on peut abréger les calculs (on pourra les reprendre en détail lorsqu'on relira ses notes).

Écriture toujours claire et aérée (pour permettre corrections ou additions).

Enfin ne pas oublier d'utiliser ses notes : les relire, les corriger, les compléter par des exercices, en tirer une ou plusieurs fiches pour le F.P., etc.

Les sources d'information

Voici quelques titres de livres que vous consulterez d'abord dans la bibliothèque de votre lycée (qui devrait les posséder). Vous voudrez vous en procurer certains; ces titres vous donneront l'idée d'en consulter d'autres...

Sur l'heuristique

1. Georges Glaeser : **Mathématiques pour l'élève-professeur** *(204 p., éd. Hermann).* Lisible par un élève de Terminale qui y trouvera des idées précieuses sur l'heuristique, le vocabulaire, la logique, les ensembles...

2. Georges Polya : **Comment poser et résoudre un problème** *(220 p., éd. Dunod).* Un grand classique américain vraiment à votre portée. BIBLIOTHÈQUE ★

3. Jacques Hadamard : **Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique** *(134 p., éd. Gauthier-Villars).* Œuvre d'un grand mathématicien à consulter avant toute réflexion philosophique sur la nature de la découverte en mathématique.

Dictionnaires

4. **Les mathématiques,** *(544 p.)* un dictionnaire du savoir moderne, utilisable au niveau de la Terminale.

5. André Warusfel : **Dictionnaire raisonné de mathématiques** *(516 p., éd. du Seuil)*. Écrit pour les élèves de Mathématiques Supérieures ou début des études universitaires.

Lectures en marge de la Terminale. (En marge ne veut pas dire superflues)

6. Jean Itard : **Arithmétique et théorie des nombres, Les nombres premiers** *(éd. PUF)* Deux *« Que sais-je? » nos 1093 et 571*, recommandés et à lire dans l'ordre indiqué, pas celui des numéros.

7. M. Barbut et autres : **Mathématiques élémentaires** *(2 vol., 572 et 342 p., éd. PUF)*. Spécialement pour les études de sciences humaines.

8. T.-J. Fletcher : **L'algèbre linéaire par ses applications** *(320 p., éd. CEDIC)*. Magnifique illustration de ce qui est suggéré à la p. 67. Et c'est écrit par un maître Anglais et adapté en français par M. et V. Glaymann.

9. André Myx : **Modèles finis** *(107 p., éd. CEDIC)*. Lecture facile et instructive.

Problèmes et divertissements

10. Claude-Gaspar Bachet : **Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres** *(244 p., éd. Blanchard)*. Un livre précurseur édité en 1612.

11. Hugo Steinhaus : **100 problèmes élémentaires de mathématiques** *(186 p., éd. Gauthier-Villars)*. Un classique contemporain, traduit du polonais.

12. André Deledicq : **Mathématiques buissonnières** *(288 p., éd. CEDIC)*. Tout nouveau, tout beau.

Histoire des mathématiques

13. P. Dedron et J. Itard : **Mathématiques et Mathématiciens** *(342 p., éd. Magnard)*. Spécialement écrit pour les grands lycéens.

14. **Histoire générale des sciences** dirigée par René Taton *(4 vol., éd. PUF)*. Ouvrage de référence à consulter en bibliothèque; savoir utiliser *ses* index.

Rédiger et exposer

Les rédactions ont constitué des épisodes importants de la recherche. Nous considérons maintenant la mise au point de la rédaction finale.

Nous devons savoir répondre aux deux questions suivantes.

1. **Quoi écrire?** La recherche est terminée; des rédactions d'essai ont permis de cerner le contenu à présenter et d'en dresser le plan (le plus simple est le meilleur, même s'il est banal : comme Cyrano, vos élégances, ayez-les moralement!)

2. **A qui le texte s'adresse-t-il?** L'allure impersonnelle d'un texte mathématique n'est pas exclusive d'une adéquation du style à l'auditoire visé. Importance ici de ce qui restera implicite : ne pas croire que vos notations sont universelles et que votre lecteur connaît tout votre passé d'étude. Mieux vaut pécher par excès de précision que par défaut.

Quant à la présentation matérielle, il faut toujours la soigner; savoir aérer son texte (grouper ses phrases en alinéas, séparer les alinéas); renvoyer clairement à des figures, à des tableaux numérotés.

Tout dire, ici, consisterait à rédiger à votre place. Je me contente de deux remarques.

1. Un plan de plan.

a) **Introduction :** rappel ou résumé d'une situation donnée à partir de laquelle une question est posée.

b) **Exposé des intentions :** que se propose-t-on de trouver, de démontrer ou d'étudier? Quelles théories ou quels théorèmes seront invoqués? Quelle méthode sera suivie?

c) **Réaliser ces intentions** en détaillant les explications autant que nécessaire mais sans abus.

d) **Conclure** en formulant complètement et clairement le résultat (au besoin en encadrant une formule, une valeur numérique). Éventuellement, on formule quelque nouveau problème que la solution trouvée suggère.

2. Mots et symboles.

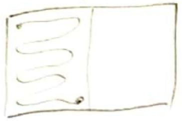
Savoir user des symboles et du langage formalisé pour éclairer la rédaction, non pour « étonner le bourgeois » avec des notations ésotériques. Exemple : la fonction $x \longmapsto ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$ est définie pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$; on peut dire aussi bien pour tout réel différent de $+1$ et de -1.

Comment exposer?

Il n'y a pas que les professeurs qui aient à exposer oralement une théorie mathématique ou la solution d'un exercice. L'étudiant aussi aura parfois à présenter **un exposé oral;** le candidat à un examen aussi dans les épreuves orales. Mieux vaut y penser d'avance et s'y préparer.

Premier principe : **un exposé se prépare.** L'improvisation est difficile et, dans le cas présent, elle serait périlleuse. Des notes écrites, très détaillées pour le début, précisant bien le plan à suivre éviteront aux auditeurs l'ennui d'écouter une lecture monotone et à vous de vous égarer hors du sujet ou de vous perdre dans ses traquenards.

Second principe : **parler.** Sous prétexte qu'en même temps il est commode d'écrire au tableau, ne pas se dispenser de tout dire, à haute voix et clairement. Sans crier, mais sans murmurer non plus : savoir poser sa voix, selon que vous parlez devant



cinquante personnes ou devant un seul examinateur. Sachez accepter les interruptions et répondre aux questions ou aux objections (les avoir prévues). Sur le tableau, écrire méthodiquement du haut à gauche au bas à droite. Après une interrogation, effacer le tableau en pensant au candidat ou à l'orateur suivant.

Enfin, de multiples questions de comportement peuvent se poser. Évariste Galois envoya le chiffon de craie à la tête de l'examinateur lors du concours de Polytechnique; ce qui n'a pas empêché Galois d'être un génie mais ce qui lui ferma la porte de cette école...

Les maux de la fin

Cette anecdote, qui doit être vraie, je la prends pour motif de la conclusion de ce livre. Pourquoi, pour quoi faites-vous des mathématiques?

Tous les buts sont possibles et justifiables au bout du compte. Acquérir tel diplôme, réussir le concours d'entrée dans telle école, obtenir la possibilité d'exercer telle profession de votre choix. Appelons cela **la fin utilitaire.** On peut aussi faire des mathématiques par goût de la science, plaisir de chercher, de découvrir, de savoir. Appelons cela **la fin scientifique.** Il y a aussi ceux qui ne voient dans la mathématique qu'un jeu et s'y livrent comme certains musiciens à tel merveilleux divertissement de Mozart. Appelons cela **la fin ludique.**

Ce que je vous souhaite, c'est de ne pas vous rallier plutôt à l'une qu'aux autres. Se limiter à l'une, quelle perte pour vous. Et je crains qu'alors vous ne succombiez un jour sous les maux de la fin unique.

A ceux des fins multiples, la joie

c'est beau ! snik!!

table des matières

[redacted]

Photocomposition M.C.P. — Fleury-les-Aubrais.
Nº D'ÉDITEUR C. 20 458 I (A-C-VII) M.C.P.
IMPRIMÉ EN FRANCE - 3e TRIMESTRE 1976
IMPRIMERIE HÉRISSEY - ÉVREUX - Nº 18573