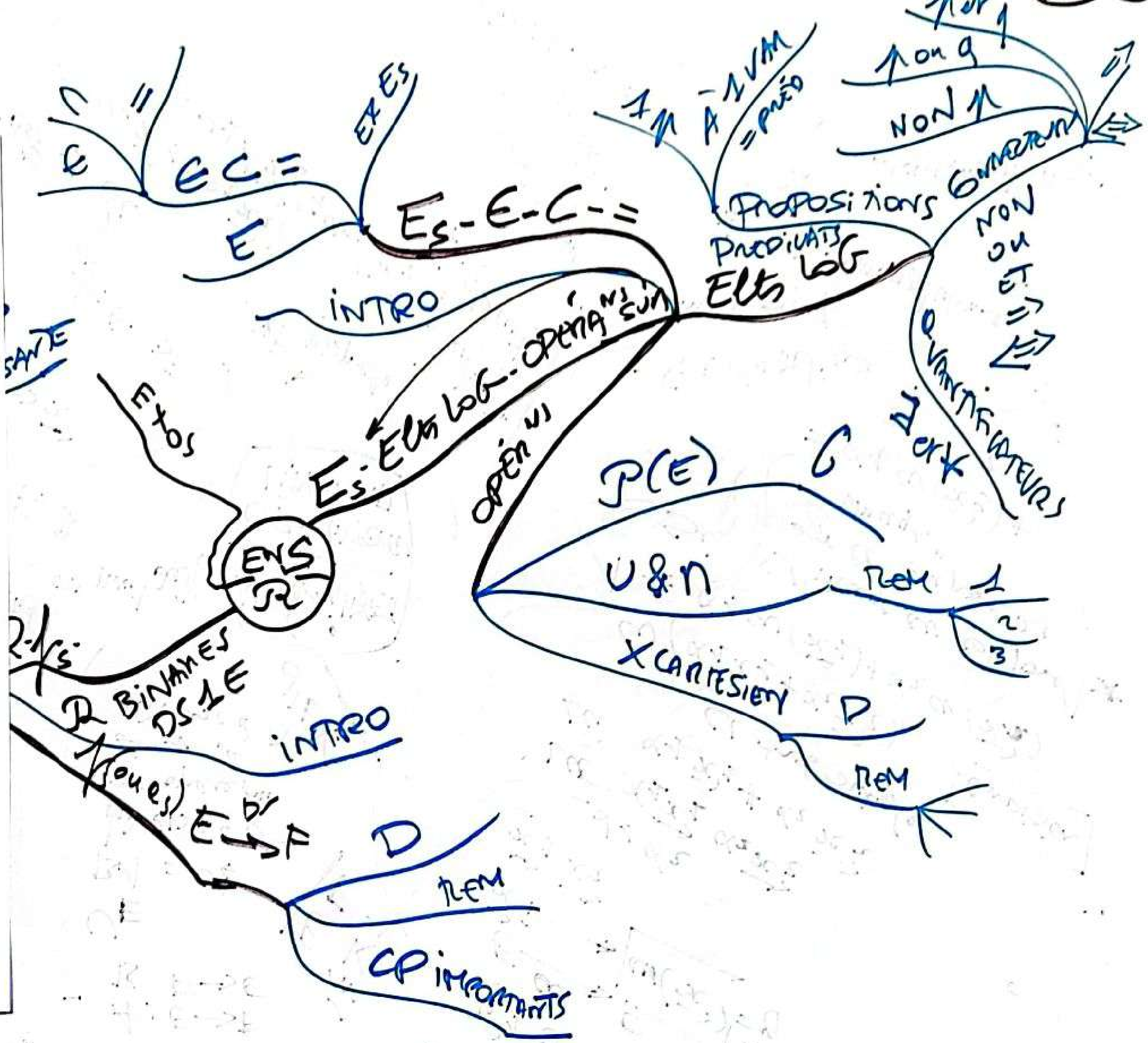
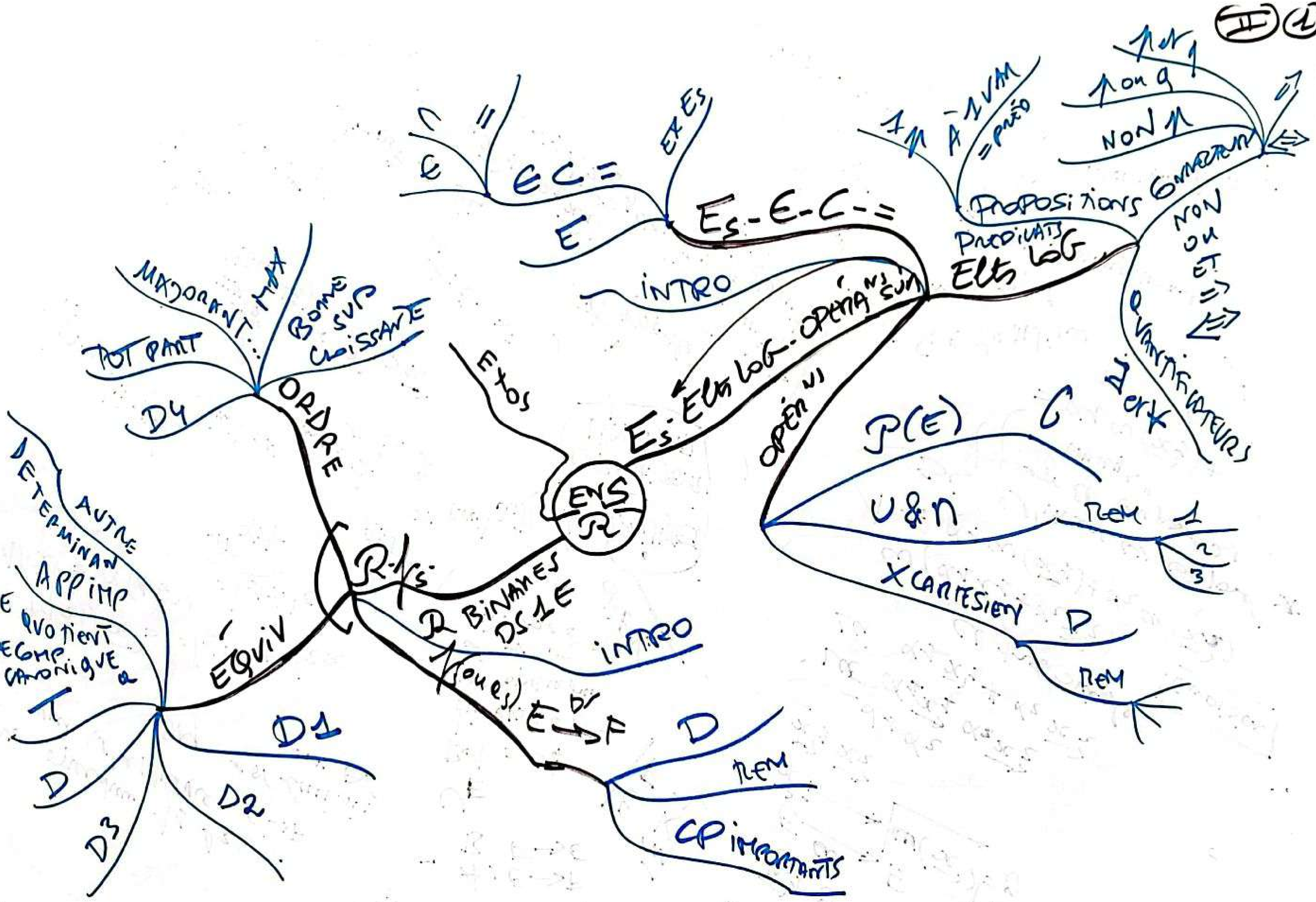


Ⅱ

① ENSEMBLES - RELATIONS


II 1
ENS ℝ
Es-E-C-=
E
EC=
EXES
INTRO
Elts LOG
PREDICATS
PROPOSITIONS
NON
ou
ET
⇒
⇔
QUANTIFICATEURS
Es. Elts LOG. OPÉRATIONS SUR
OPÉR
P(E)
C
U & ∩
REM
1
2
3
X CARTÉSIEN
D
REM
ORDRE
MAJORANT... MAX
BORNE SUP
CROISSANTE
TOT PART
D4
R BINAIRES DS 1E
INTRO
ÉQUIV
AUTRE
DETERMINAN
APPIMP
E QUOTIENT
DECOMP CANONIQUE
T
D1
D
D2
D3
E → F
D
REM
CP IMPORTANTS

1) E R

1) E. ~~ctts~~ logique - opera^{ns}

A) E ∈ C =

intro

3 processus fondamentaux
- Construire objet
- former R entre ces
- demontrer que certaine R sont vraies
= theories

rôle fonctions fig
A volume modèle abstraits ~~of~~ objets phys
± compliqués ou visibles

Vou F = liens

R V soit — posés par D axioms
\ démontrés ← \ Rais + log

consistt
cohérent

Signe land = convention log
R ↑
Règ assemblage des ces
Règles pour langage

→ $E_S \in C$ = EX

1) Notion E

soit ≙ d par un critère ∈ ance ta

tjrs
à la question "un objet ∈ E"
les 2 seules R_s soient oui ou non
(excluant ~~tte~~ R) "je ne sais pas"
cela dépend

EX1 Elève + de 10 de moy

EX2 France E habitants
Nationalité française
= E français
Europe français citoyens Europe
(France ou Français ~~objets~~ de ~~i~~ nature
continent ant pure
~~xx~~ ∈ citoyens

1 F = e ∈ Europe elt
2 F = SE ——— E

- initialisation 3 notions — E / e_s / RE

et impossibilité
séparer la D de l'une
d'elles des deux autres

- e et E relatives

objet — E / e suivant le contexte

obj

$\vec{V}$ plan — 1 "classe de bipoints équipollents" $= E$ bipoints
— 2 e de E $\vec{V}$ P $\vec{v}$

2) $\in \subset =$

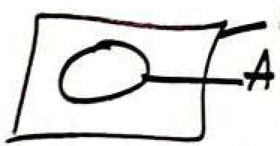
• $\in$

$x \in E$ ∀ objet x

$\notin$ $\underline{x \in E \text{ ou } x \notin E}$

R ~~majus~~ majuscules minuscules

• $\subset$



E, A

$A \subset E$ si tout elt $x \in A$ est $\in$ à E

En part ∀ E $\underline{E \subset E}$

• $=$ $e_1 = e_2$ soit $E_1 = E_2$

$a = b$ identiques

- axiome $x = x$ ∀ pr tt objet x
et que si $x = y$ alors $y = x$
si $x = y$ et $y = z$ alors $x = z$

$A = B$ signifie $A \subset B$ et $B \subset A$
= ont les m elts

3) Ex Es

$\mathbb{N}$

$\mathbb{Z}$

$\mathbb{Q}$ $\dfrac{a^{\in \mathbb{Z}}}{b_{\neq 0}} \in \mathbb{Z}$

$q = \dfrac{a}{b}$ écriture pas unique $\dfrac{ka}{kb}$ $k \neq 0$

fraction

distingue l'une et q

$\dfrac{a}{b} \neq \dfrac{ka}{kb}$ si $k \in \mathbb{Z} - \{0,1\}$

$\frac{?}{?} = \frac{?}{2}$

ce nb est représenté par ces 2 frac
qui sont séparées
rep le même nb

$\mathbb{R}$

D décimaux

$a \cdot 10^n \in \mathbb{Z}$

$\in \mathbb{Z}$

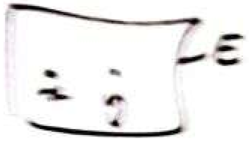
nb ne peut $\in D$ que s'il y a une frac
irréduc resp $\frac{a}{b}$
facteurs premiers sont 1, 2 et 5

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

- ens E ens SE $\in$s donnés
peuvent ê déf par liste leurs élts
extension

$x \in \{x\}$

$\{x\} \subset E$



$\{x, y\} = \{y, x\}$

paire

R : [illegible] E sont en commun
un e x est un singleton
[illegible]
Suffit Donc que [illegible] P [illegible]
[illegible]
[illegible]

D en compréhension

par énoncé une P que possèdent
tous ses élts et eux seuls
(donc qui caractérise les élts)

E ens pairs = E ens nb multiples de 2

$E = \{x / x \in \mathbb{N}, x \text{ multiple de } 2\}$

$\{\_\_ = 2p \text{ et } p \in \mathbb{N}\}$

ens E obtenus par construction
en utilisant des opérations sur les E

B) Élts de logique mathématique

Grammaire

1) Propositions. Prédicats

" p à une ou plus variables

a) p

phrase ayant un sens
dont on peut dire si elle est V ou F

« ent 6 est impair » p F

✓ ~~cat~~ Contraire

« la p — l'entier 6 est impair — est F » V

Par ~~ex~~ contre

« x est impair » ~~p~~

$x \in \mathbb{N}$ ~~p~~

b) 1 p à une var x = prédicat à une var x
astreinte à un Ens E,
= expression dép de x qui devient,
chaque fois que x est un elt donné
de E une p

$p(x)$ et on associe à $p(x)$
l'Ens

$\boxed{E_p \text{ des elts } x \in E \text{ telsque } p(x) \text{ soit } V}$

En part si $p(x)$ est une équ
càd =é dont véritV dépend ~~xx~~
var x E , E_p = ens solution de équ

Ex E?
Si $F = \mathbb{N}$
la p à une var x déf par « x est impair »
à pour E associé

$$E_p = \{x \in \mathbb{N} / x = 2p+1, p \in \mathbb{N}\}$$

... plus ver.

lorsq 1 p var x est V pr $\forall x \in E$ $\boxed{E_p = E}$
F $E_p = \emptyset$

En part, comme par axiome
on a $\forall$ pr $\forall E$ $x = x$ V
$x \neq x$ F pr $\forall x \in E$

$$\{x \in E / x \neq x\} = \emptyset$$

2) Conn ("non" "ou" "et" "$\Rightarrow$" "$\Leftrightarrow$")

Conn p / p Conn q $\longrightarrow$ Nelles ps

Suffisant en logique

$\neg$ $\vee$

• $\neg p$ $\neg p(x)$

Par D, la p vraie ~~quant~~ lors p est fausse
et fausse ... vraie

$$E_{non\,p} = \{x \in E / p(x) \text{ est fausse}\} = \{x \in E / x \notin E_p\}$$

• p ou q

= la p vraie lors l'une des 2 p au moins est vraie

et est fausse si les 2 p sont fausses

$$E_{p\,ou\,q} = \{x \in E / x \in E_p \text{ ou } x \in E_q\}$$

• "p et q" = "non (non p ou non q)"

vraie si $\longrightarrow$ fausse

dc si non p est fausse et — q —

donc si p est vraie et q est vraie

finalement "p et q" vraie lors p est vraie et q est vraie

$$E_{(p\,et\,q)} = \{x \in E / x \in E_p \text{ et } x \in E_q\}$$

• $(p \Rightarrow q)$ non p ou q

trente q

Sera vraie si non p est vraie ou si q est vraie

donc si p est fausse ou si q est vraie

Élargit notre sens habituel

Γ Cath

résultat établi / axiome / donc p vraie

OM

q est vraie

on ne se place que dans le cas où

q est supposé vraie

peut et suffit que q soit vraie

Si q est fausse non p étant vraie

ne donne aucun résultat sur q!

Ex axiome récurrence de $\mathbb{N}$

P $n \in \mathbb{N}$ ou $n \geq n_0$

implication contraposée

$$((\text{non } q) \Rightarrow (\text{non } p))$$

$$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

Absurde

• $\Leftrightarrow$

$(p \Rightarrow q)$ et $(q \Rightarrow p)$ V ou F

③ $\exists$ $\forall$

$p \xleftrightarrow{\text{ensbl}} E_p$ ens des $x \in E$ tq $p(x)$ est vraie

"$\boxed{\exists x \in E, p(x)}$" vraie si $E_p \neq \emptyset$

fausse si $E_p = \emptyset$

au moins un x tq $p(x)$ soit vraie

$\forall x \in E, p(x)$ — $= E$

— $\neq E$

non $\forall$ équivaut à $\exists$ et $\neg$

"$\exists x \in E, \text{non } p(x)$"

$\forall$, $\exists$ $\rightarrow$ nelle prop^{n}

EX

" $\forall x \in \mathbb{Q}, x^2 \neq 2$ " vraie

$\mathbb{R}$ fausse

$(\forall x \in E, p(x)) \Rightarrow (\exists x \in E, p(x))$

$\not\Leftarrow$ ssi

" $\exists x \in E, p(x)$ " $E_p = \emptyset$

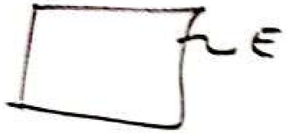
ssi

" $\forall x \in E, \text{non } p(x)$ "

pour prendre la ~~ssi~~ négation d'une p introduite par un quant il suffit de prendre la nég de la p avec la faire précéder de l'autre quant que celui en tête de p initiale

c) Opérations sur les Ensembles

1) $\mathcal{P}(E)$



$E \subset E$

Axiome

↳ on part d'un E dont elts sont les SE de E

dc conc^n elts de $\mathcal{P}(E)$

$$\boxed{A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E}$$

↳ $E \in \mathcal{P}(E)$ ~~et~~ dc $\mathcal{P}(E)$ jamais vide

De + on admet que $\emptyset$ est inclus ds ~~tt SE~~ ds tt E

dc $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ vrai pr tt E

- Si $E = \emptyset$, Alors $\emptyset$ est le seul elt de $\mathcal{P}(\emptyset)$

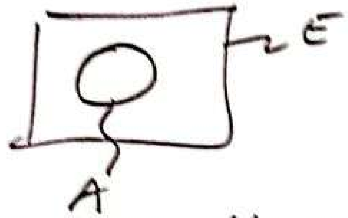
  (on construit avec du vide un E de parties non vide !)

- $\neq$ — $\mathcal{P}(E)$ admet au — 2 elts : E et $\emptyset$

SE propre de E tt elt de $\mathcal{P}(E)$ autre que

Si E a plus d'un elt, tt $\{x\}$ où $x \in E$, singleton est un SE propre de E

- $\complement$ d'une partie A de E



Ens des elts de E qui $\notin A$

$$\complement_E(A) = \overline{A} = E - A$$

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad = \{x \in E / x \notin A\}$$

P_s

s = si
a = alors

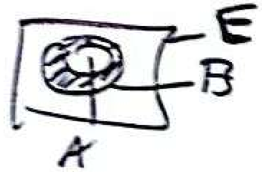
- s $A = E$ $\complement_E(A) = \emptyset$

  et

  — $\emptyset$ — $= E$

- $\forall A \in \mathcal{P}(E)$ s $\overline{A} = \complement_E(A)$, a $\complement_E(\overline{A}) = A$

  $(\overline{\overline{A}} = A)$



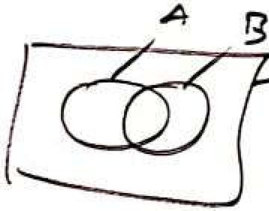
$B - A$ + gén^t

2) $\cup$ et $\cap$

D $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ ou $x \in B$

D $\cap$ et

cP A et B elts de $\mathcal{P}(E)$



$A \cup B \in \mathcal{P}(E)$
$\cap$

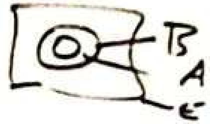
D disjoints si $\cap = \emptyset$

D Partition de E = ens de parties de E (dc ens de $\mathcal{P}(E)$) vérifiant 3 conds suivantes

- aucune des parties n'est vide
- les parties sont 2 à 2 disjointes
- leur réunion $= E$

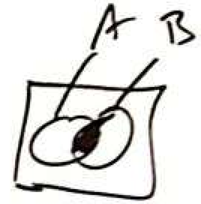
R1 $\mathcal{P}(E)$ ne réalise jamais une partition de E car $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$

R2



$A \subset B$, $\Leftrightarrow$ $A \cap B = A$ et $A \cup B = B$

R3
il est évident que



$A \cap B \subset A \cup B$ pr tts A et B de $\mathcal{P}(E)$

3) $E \times F$ — $a \in E$, $b \in F$
$\neq \emptyset$ $\neq \emptyset$

D (a, b) couple tq

$\forall\, a' \in E$ et $\forall\, b' \in F$
$(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow (a = a'$ et $b = b')$

Ordre

On aurait $(a, b) = (b, a)$
il faut avoir $a = b$ et $b = a$
dc si a et b sont $\neq$ on aura $(a, b) \neq (b, a)$

Admet $\rightarrow E$
$E \times F = \{(a, b) / a \in E$ et $b \in F\}$

lors ~~$E \neq$~~ $E = \emptyset$ ou

——— $\not\!F$ $F = \emptyset$

on déf encore $E \times F$ en posant

~~$E \times E \neq$~~
$E \times F = \emptyset$

R1

<u>Notation</u> multiplica°

R2 <u>Si</u> $E \neq F$, $\xrightarrow[\text{réc}]{\text{Rem}}$ $E \times F \neq F \times E$

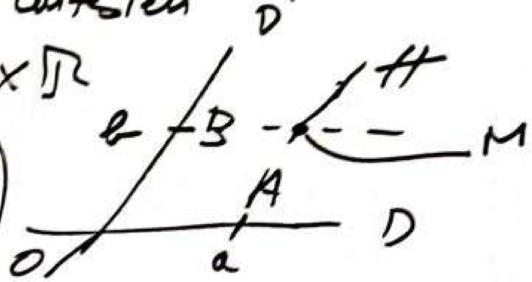
D si $E = F$, E^2

<u>diagonale</u> de E $\quad (a,a)$ $\quad E^E$

E_{couples}

~~carré~~ carré cartésien $\quad D'$

R3 Rep^{n} $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$



$a = \overline{OA}$
$b = \overline{OB}$

(a,b) repé par M

repé par plan affine

Ds ce <u>cas</u>

R4 $E \times F$ commodité de langage

Soit $(x,y) \in E \times F$ $\quad$ v.i.

~~premier~~, ds cet ordre

D ~~et~~ E de convention

$E = pr_1(E \times F)$
$F = pr_2(E \times F)$

D Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$\times$ de n E_s

$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n uplets

chaque $x_i \in E_i$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

Si $E = \dots E_n$

$E^n \quad (x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$

Si $x_i = y_i$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

D Pr tt $i \in \{1, \dots, n\}$

x_i = $n$ième projection de n-uplet

$x = (x_1, \dots, x_n)$ $\quad x_i = pr_i(x)$

$n = 2$ $\quad (a,b)$

$\quad = pr_1(a,b)$

2) R fs R bin as E

intro

E F

R entre E et F

"fait correspondre" que

certains elts de E à 1 ou plus elts

suivant "loi bien déterminée"

- (x, y) de $E \times F$

SE de $E \times F$

$\forall$ couples $(x,y) \in E \times F$

SE de $E \times F$ = G graphe

D

R bin entre E et F

donnée triplet (G, E, F)

$\subseteq E \times F$

Si R désigne $R(G, E, F)$

$x R y$ ssi $(x,y) \in G$

au cas contraire

sinon C

... fs as et RB pour RO RE

1) fs (ou as)

D R $f = (G, E, F)$ est une f on a

$E \xrightarrow{ds} F$ & G vérifie cond° suivante

• Pour $x \in E$, il existe un et un seul $y \in F$ tq $(x, y) \in G$

R1 $\forall x$ de E est en R avec un et un seul y de F

$(x, y) = (x', y')$, ds G $\Rightarrow y = y'$ *

R2 anc^t $f \neq a$ que cond° un plus

Suffit choisir $E = \mathcal{D}_f \rightarrow a$

$x \in E$ peut être associé par f à un elt unique y de F

D et Not^{ns}

E dép F arrivée = but

image de x par f $y = f(x)$

$G = \{(x, f(x)) / x \in E\}$

Ens image $f(E)$ $f\langle E\rangle$

= Ens images $f(x)$ lors x varie ds E

on a dc $f\langle E\rangle \subset F$ — strictement

$= \{f(x) / x \in E\}$

= arrivée ?!

CP

$F = f\langle E\rangle$ que surjection

. Lors $\forall x$ de E a la même im b ds F

a cte

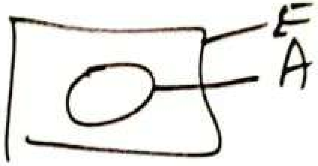
ds ce cas $f\langle E\rangle = \{b\}$ singleton de F

. CP si $E = F$ a Id_E

$\forall x \in E,\ Id_E(x) = x$

G (x, x) tq $\forall x \in E$, dc diagonale de E^2

. D



$f = (G, E, F)$

Restric^{n} de f à A = ~~g~~ $g = (G', A, F)$

$= \{(x, f(x)) \in G / x \in A\}$

Dc $\forall x \in A,\ g(x) = f(x)$

. D

Prolongement de f à B

$h = (G'', B, F)$ tq ~~soit~~ f soit restric^{n} de h à E

On a dc $G \subset G''$ et $\forall x \in E,\ h(x) = f(x)$

Notons

Si restriction de f à A est unique (puisque im de chaq elt A par g ~~est~~ est determinée)

Par contre f peut ê prolongée par plus fs

a Ens B
prolongement peut se faire en choisissant val
car ds $B - E$ on h

Ex

$\mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

h $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $h(x) = f(x)$ et $h(0) = 1$

est un prol^t de f à $\mathbb{R}$ $\qquad k(0) = 2$

mais $\nexists$ ___

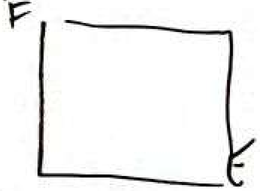
une autre ...

D $\quad f = (G, E, F)$, $f' = (G', E', F')$ $\quad f = f'$

ssi $\quad E = E'$ et $F = F'$ et $G = G'$

m̄ E dép m̄ arrivée

et $\forall x \in E$ $f(x) = f'(x)$



- $E F \qquad E \times F$

$\mathcal{P}(E \times F)$

Graphe f $E \to F$

est un élt de

déf nell Ens dont élts sont

chacune des f_s sont le G d'un

élt de $\mathcal{P}(E \times F)$

dont élts sont

(x, y) où $(x = y) = (x', y')$
$\Rightarrow y = y'$

dans E

$\mathcal{F}(E, F)$ F^E

Ens ttes a_s $E \to F$

$E = F$ $\mathcal{F}(E)$

.Ex

Si $E = \mathbb{N}$ $\quad \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ suites numériques

Si $F = \mathbb{R}$

$E = \mathbb{R} = F$ $\quad \mathcal{F}(\mathbb{R})$ Ens f_s num définies sur $\mathbb{R}$

R Not particulière

Suite est une fonction

chaque entier $\to u(n)$ u_n

numérotation un numéro à chacun des élts de E image

Gal^e "numérotation" (autre que $\mathbb{N}$)

en déf famille d'élts ou d'ens *

D I ex $= \mathbb{N}$ ou $\subset \mathbb{N}$

"
Ens d'indices

Famille d'élts de F indexée par I

$I \xrightarrow{a} F$

On peut si $F = \mathcal{P}(E)$

a ere ainsi un ens de parties de E

fam $(E_i)_{i \in I}$

Ex

$I = \mathbb{Z}$

$F = \mathcal{P}(\mathbb{R})$

$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$

$k \longmapsto \left]k \cdot \frac{\pi}{2}, (k+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right[= A_k$

$\rightarrow$ fam int ouverts $(A_k)_{k \in \mathbb{Z}}$

tq $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} A_k$

- D gof f $E \to F$ $f\langle E \rangle \subset$ ens déf de g

inj surj bij f^{-1}

D permutation de E

$\forall e$ Bij $E \circlearrowleft$

$\sigma(E)$ $(\sigma(E) \cancel{\not\subset} \subset \mathcal{F}(E))$

peut $Id_E \in \sigma(E)$

E fini est $n!$

★ D involution = permutation de $E = f^{-1}$

Ex

- Id_E est une involu^n de E

car $Id_E \in \sigma(E)$ et $Id_E^{-1} = Id_E$

- Si $E = \mathbb{R}$, $x \longmapsto -x$ involu^n de $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}^*$ $1/x$ —— $\mathbb{R}^*$

R

Cons E déf d'une fonction f, F

est un ~~⊄~~ PC de 2 ens X et Y donnés

on est un SE de $X \times Y$

f est un f^2 de 2 var

Si $A \subset X \times Y$ est E déf f on devrait

écrire pr tt $(x,y) \in A$ Im (x,y)

par f: $f((x,y)) \simeq f(x,y)$

EX

- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$f(x,y,z) = x+2y+z$

f de 3 var dont G

$= \{((x,y,z), x+2y-3) / (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$

$x, y, z, x+2y-3$ /

CP importants

- $E = X \times X$

si $F = X \neq \emptyset$

$f : X \times X \to X$ LCI de X

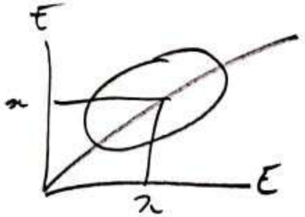
- $E = X \times Y$, $F = Y$ LCE de Y à opérateurs de X

Fs exceptionnelle dX

(G, E, F) R bin de E

$G \subset E \times E$

B) RE



D1

$\mathcal{R} = (G, E, E)$

$G \subset E \times E$

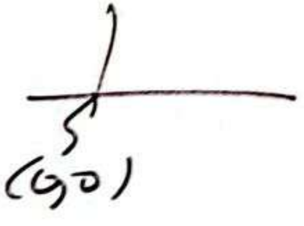
réflexive si $\forall x \in E, x \mathcal{R} x$

cette P s'exprime aussi en disant que $\forall x \in E, (x,x) \in G$

Ce qui signifie que la diagonale de E^2 est incluse ds le graphe G de $\mathcal{R}$

Ex

- $=$ ds tt Ens E $\forall a \in E, a = a$
- $\mathcal{R}$ C ~~Dpts~~ ds un $\mathcal{P}(E)$ car, $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $A \subset A$ est Vrai
- Par contre ds $\mathbb{R}$
  $\mathcal{R}$ "avoir pour opposé" $\not{\mathcal{R}}$
  car seul 0 a pour opposé lui-même



D2

Symétrique $\underline{S}$

$\underline{S}$ implication $x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$ est Vraie
$\forall (x,y) \in E^2$

Ex

~~$\neq$~~ $=$ ds E car $(a = b \Rightarrow b = a)$
(par D axiomatique de $=$ ds ENS quelconque E)

- $\subset$ ds $\mathcal{P}(E)$
  car $A \subset B$ et $B \subset C$
- "avoir pour opposé" $\not{T}$
  $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z \Leftrightarrow x = -y$ et $y = -z$
  $\Rightarrow x = z$

Si on choisit $x \neq 0$ $x = z$ et $x = -z$ ne sont pas V simultanément
donc $x \not{\mathcal{R}} z$

Samedi

D et la loi

ERST

T xRy et $yRz \Rightarrow xRz$

Ex

- = é
- $\subset$ de $\mathcal{P}(E)$ ✗
  "avoir même age" ✗
- Ens Ds Plan affine
  $D /\!/ D'$ si $D = D'$ ou si $D \cap D' = \emptyset$
- Ds Ens $P \times P$ bipoints du Plan
  $(A,B) \nearrow\nearrow (C,D) \iff [A,D]$ et $[B,C]$ ont même milieu

$\longrightarrow$ D $\vec{\ }$ plan (equipollence)

- $x \in \mathbb{Z}$ $\quad xRy \iff \underbrace{x-y}_{\text{"est multiple de 3"}} = 3.k \quad k \in \mathbb{Z}$

$x \equiv y \pmod 3$
$\quad (3)$ Congruence modulo 3

Pr $\forall n \in \mathbb{N}^*$
on définirait de même la congruence mod n

on doit envisager cas où n est négatif

car

$\equiv$ $x-y$ mult de n
—— aussi —— $-n$
suffit prendre $-k$

de Cong modulo $(-n)$ $n \in \mathbb{N}^*$
avoir la même R que la Cong mod n

- $x - x = 0 = 0.3$ donc $x \equiv x \pmod 3$
  $\forall x \in \mathbb{Z}$

R ...

- $f : E \longrightarrow F$
  R $\quad xRy \iff f(x) = f(y)$
  R si inj alors R est égalité sur E
  car $f(x) = f(y) \iff x = y$
  ERST sur E

D $\mathcal{R}$ ERST E

Classe d'équivalence CE d'un elt x de E (si $E \neq \emptyset$), ens des elts de E en $\mathcal{R}$ avec x par $\mathcal{R}$

$\dot{x}$ $\overline{x}$ $C(x)$ $\in \mathcal{P}(E)$

$$\boxed{= \{y \in E / y \mathcal{R} x\}} \quad \forall x \in E, C(x) \subset E$$

résulte équiv

$$\boxed{y \in C(x) \iff y \mathcal{R} x}$$

R $\forall x \in E, x \in C(x)$ car $\mathcal{R}$ dc $x \mathcal{R} x$ ($\forall x \in E$)

dc la CE d'un elt de E n'est jamais vide

T Soit $\mathcal{R}$ ERST sur E, alors la famille des CEs $(C(x))_{x \in E}$ constitue une partition de E

DM

déjà remarqué qu'aucune classe n'est vide

suffit de vérifier que les classes sont 2 à 2 disjointes et que leur $\cup = E$

— Soit a, b elts de E

montrons qu'alors $C(a) = C(b)$ ou $C(a) \cap C(b) = \emptyset$

• ~~Soit a, $b \in E$, montrons~~

$\Leftarrow$ $a \mathcal{R} b$, a $\forall x \in$ ~~CE~~ $C(a)$, $x \mathcal{R} a$ dc

...

D Ens CEs def par une RE $\mathcal{R}$ sur E = Ens quotient de E par $\mathcal{R}$ $\boxed{E/\mathcal{R}}$

Rem classes SE $\subset \mathcal{P}(E)$

~~R~~

Ex

- $=$ $\mathcal{R}$ = ds E, chaque CE est un singleton

car $C(x)=\{y\in E / x=y\}=\{x\}$

de $E/=$ or E se cor par bij $x \longmapsto \{x\}$

- // D_s Plan

CE_s Ens de D_s // à l'une d'elles

= ~~direct~~ directions de D_s

$P/\!/$ Ens des droites

- Equipollence $P\times P$ ens bipts

C = $\vec{v}$ du plan

$P\times P/\!\to$ Ens vecteurs plan

- CE_s déf sur $\mathbb{Z}$ par cong mod 3

sont ens mult de 3

$C(0)=\{\dots,-6,-3,0,3,6,\dots\}$

$x-0=3.k$

$n\in\mathbb{N}^*$

cong mod n $\quad \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

App imp Ens quotient :

décomposition canonique d'une a

D $\quad g : E \xrightarrow{s} E/\mathcal{R}$

$x \longmapsto C(x)$

a canonique de

En particulier

Si $\mathcal{R}$ est la RE déf à partir

d'une a $E \to F$ par $x\mathcal{R}y \iff f(x)=f(y)$

$j\circ\bar{f}\circ g$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ g\downarrow & & \uparrow j \\ E/\mathcal{R} & \xrightarrow{\bar{f}} & f\langle E\rangle \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} x & \longmapsto & f(x) \\ \downarrow & & \uparrow \\ \bar{x} & \xrightarrow{\bar{f}} & f(x) \end{array}$$

$j=\mathrm{Id}_{f\langle E\rangle}$

$f=j\circ\bar{f}\circ g$

$\overline{x} = \{x' \in E / f(x') = f(x)\}$

f surj

inj

$\rightarrow$ 3 fs dont une g

or la surj can $E \rightarrow E/\mathcal{R}$

$\Rightarrow \overline{f}$ bij

Ex $\mathbb{R}$ $f(x) = x^2$

$\mathcal{R}$ $x \mathcal{R} x' \Leftrightarrow x^2 = x'^2$

ref ds $\mathbb{R}/\mathcal{R}$

$\overline{x} = \{-x, x\}$

R

Ant de t° sur RE

Rec† E on se donne une par l'ion de E

c) RO

ORAT

Antisym

CNST

Df

$\forall (x,y) \in E^2, \; x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Rightarrow x=y$

ex $\mathcal{P}(E)\; \subset$ car $A\subset B$ et $B \subset A \Rightarrow A=B$

≠ **non** symétrique !

= S et A

~~S~~ et ~~A~~

ex $\mathbb{Z}$ $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x-y=1$

~~S~~ $2\mathcal{R}1$ (V) $1\mathcal{R}2$ (F)

S suppose $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$

$x-y=1$

et $y-x=1$

D ORAT ordre large sur E

E est ordonné par $\mathcal{R}$

ex trivial

= sur E

$\subset$ $\mathcal{P}(E)$

$\mathbb{N}$ $x\leq y \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{N} / x+a=y$

RO naturelle

D **total** Si 2 élts quelc sont comparables

$\forall (x,y) \in E^2$, on a $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$

exclusif

¬tot = **partiel**

Ex $\mathcal{P}(E)\; \subset$ partiel

Si E a plus d'un elt

en effet $\{x\}$ et $\{y\}$

- $\leq$ $\mathbb{N}$ tot

$\leq$ $\mathbb{R}$ $x\leq y \Leftrightarrow y-x \in \mathbb{R}_+$

- $\div$ $\mathbb{N}$ a divise b

si $b = a \cdot q$ partiel
$q \in \mathbb{N}$

D <u>strict</u>

1 $x\mathcal{R}y \Rightarrow x \neq y$

2 T

E

$< \mathbb{N}$ $a \leq b \Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{N}^* / a + x = b)$

P $\leq$ strict, $x\mathcal{R}x$ n'est (V) pour aucun x de E et $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$ ne sont (V) simultanément pour aucun couple (x,y) de E^2

donc <u>RO strict n'est pas un RO</u> !

P $\leq$ $\mathcal{R}$ RO ~~triviale~~
$\leq$ $\mathcal{R}'$ $x\mathcal{R}'y \Leftrightarrow (x\mathcal{R}y)$ et $x \neq y$)
RO strict

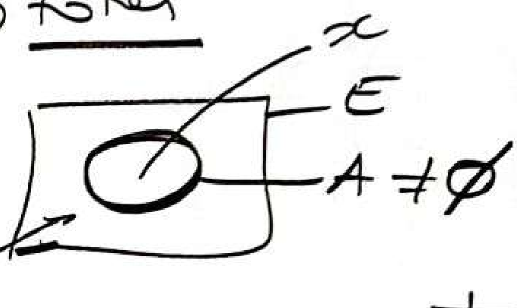
P réct

$\leq$ $\mathcal{R}'$ RO strict sur R

, $\mathcal{R}$ $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (x\mathcal{R}'y$ ou $x = y)$ est une RO sur E

$\leq$ o <u>total</u>

D



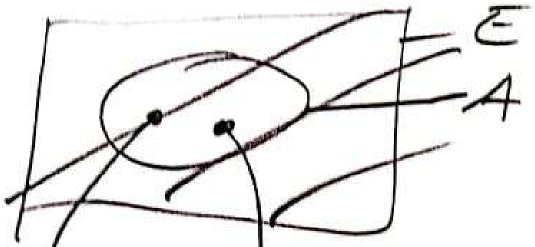
a <u>de</u> E est un ~~maj~~ majorant <u>de A</u>

= A est majorée par $a \in E$

$\leq$ $\forall x \in A,\ x \leq a$

b minorant $b \leq x$

A majorée + minorée = <u>bornée</u>



$x \leq a$ $b \leq x$

maj min

$\forall x \in A \leq a$ $\forall b \in A \leq x$

R ~~précisé~~ pas si $a \in A$ ou si $a \in E - A$

existence de a b ds E suffit

l'unicité maj ou min ~~précisé~~

~~d'un~~ en gén "d'un"

Ex $\mathbb{R}$ $[1,2]$ ~~maj~~ majé miné

$a=3$ $b=-5$

$a=2$ $b=1$

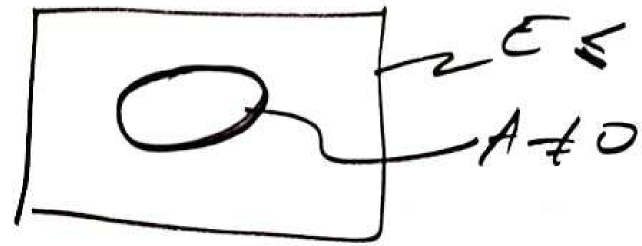
Par contre

Ens multiple de 3 ni majé ni miné

car $\forall a \in \mathbb{R}^*_+$ $3a$ est un elt

de ens $> a$ et $\forall b \in \mathbb{R}^*_-$ $3b < b$

D



Elt maximum de A =
+ gd elt de A
un majorant qui $\in A$

minimum
+ pt

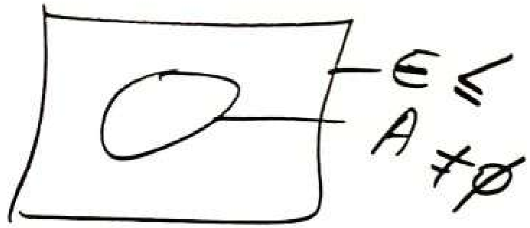
Si existe, alors il est unique

~~max~~ max A

min A

Ex $\mathbb{R} \leq$ $[0,1]$ min max $]0,1[$ ~~min~~ ~~max~~ min maj

D



Si l'ensemble M des majorants de A ~~non vide~~ est non vide et il admet un elt min c le plus pt maj Borne sup de A

En part si $a \in A$

alors Borne sup de A est elt max de A

$\sup A = \min M$

- Ex $]0,1[$ $\mathbb{R}$

ens de Maj $[1,+\infty[= M$

admet un elt minimum qui est 1

de 1 sup

Cme $1 \notin$ sup A n'est pas un elt max

D $E \leq$ $F \mathcal{R}$

$f : E \to F$ croissante

si, pour $\forall (x,x') \in E^2$

$x < x' \Rightarrow f(x) \mathcal{R} f(x')$

$\mathcal{R}$o strict

Ex E F $\neq \emptyset$

$f : E \to F$

$\mathcal{P}(E)$ $\mathcal{P}(F)$

$\subset$ $\subset$

Pour $\forall A \in \mathcal{P}(E)$

$\forall (A,B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$

$A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$