$E_\varphi(Y,X)$

$f^{-1}=(G^{-1},Y,X)$

$\exists$ dc G $f=(G,X,Y)$

S

T

Eq E R S T

A_3

A2 Ens Equipotents

injection

$A \cup B$

A1 Somme de 2 Ens

D

X_i X_j

$i \neq j$

Union Ens produits $X\times\{i\}$ et $Y\times\{j\}$

$X+Y$

ex $A=\{a,b,c\}$

$B=\{b,e,g\}$

$A\times\{i\}=\{(a,i)(b,i)(c,i)\}$

$\cup$ $B\times\{j\}=\{(b,j)(e,j)(g,j)\}$

$=\{(a,i)(b,i)(c,i)(b,j)(e,j)(g,j)\}$

$=A+B$

$A\cup B=\{a,b,c,e,g\}$

II des Cardinaux aux entiers $\mathbb{N}$

$E_f(Y, X)$

$f^{-1} = (G^{-1}, Y, X)$

$\exists bc$ & $f = (G, X, Y)$

S

T

Eq $\begin{matrix} E \\ R \\ S \\ T \end{matrix}$

A3

D

$X_i \quad X_j$

$i \neq j$

A1 Somme de 2 Ens

Union Ens produits

$X \times \{i\}$ or $Y \times \{j\}$

$X + Y$

Ex $A = \{a, b, c\}$

$B = \{b, e, g\}$

$A \times \{i\} = \{(a,i)(b,i)(c,i)\}$

$\cup\ B \times \{j\} = \{(b,j)(e,j)(g,j)\}$

$\{(a,i)(b,i)(c,i)(b,j)(e,j)(g,j)\}$

$= A + B$

$A \cup B = \{a, b, c, e, g\}$

A2 Ens Equipotents

injection

a
b
c
e
g

$A \cup B$

A Ens et Cardinaux

$E\varphi(Y,X)$

$f^{-1} = (G^{-1}, Y, X)$

∃ donc b $f = (G, X, Y)$

S

T

R

Eq R S T

A3

par bijection possible

Si ∃ une b de X sur Y

$Eq(X,Y)$

A2 Ens Equipotents

A

A1 Somme de 2 Ens

D

X_i X_j

$i \neq j$

Union Ens produits

$X \times \{i\}$ et $Y \times \{j\}$

$X+Y$

ex $A = \{a, b, c\}$

$B = \{b, e, g\}$

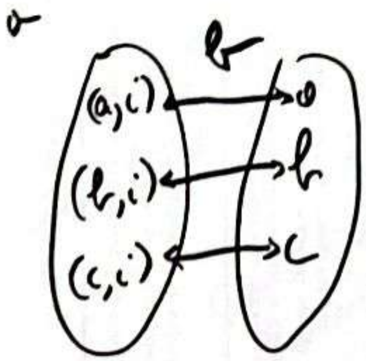
$A \times \{i\} = \{(a,i)(b,i)(c,i)\}$

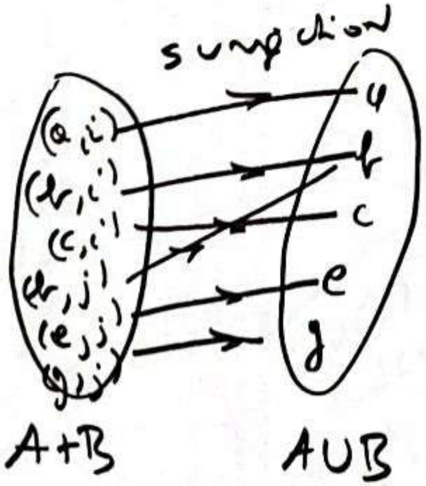
$\cup$ $B \times \{j\} = \{(b,j)(e,j)(g,j)\}$

$\{(a,i)(b,i)(c,i)(b,j)(e,j)(g,j)\}$

$= A+B$

$A \cup B = \{a, b, c, e, g\}$





Rom $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ en 2 ds exotiques,

$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

$card(\{\emptyset\}) = card(0)$
$= Card(\{x\})$
$= 1$

CE ts ens à 1 elt

$Card(0)=1$

posez

③

CE ss ens vide

$Card(\emptyset)=0$

pas Def

Ce s $\emptyset$

②

Seul Eq à lui m̂

① ≡ 2 Ens sont tq $card(X) = card(Y)$

A X et Y Eq ssi ∃ G $f=(G,X,Y)$

CNS

A

$Eq(X,X)$ R
$Eq(X,Y) \Rightarrow Eq(Y,X)$ S
$Eq(X,Y)$ et $Eq(Y,Z) \Rightarrow Eq(X,Z)$ T
ERST

A3

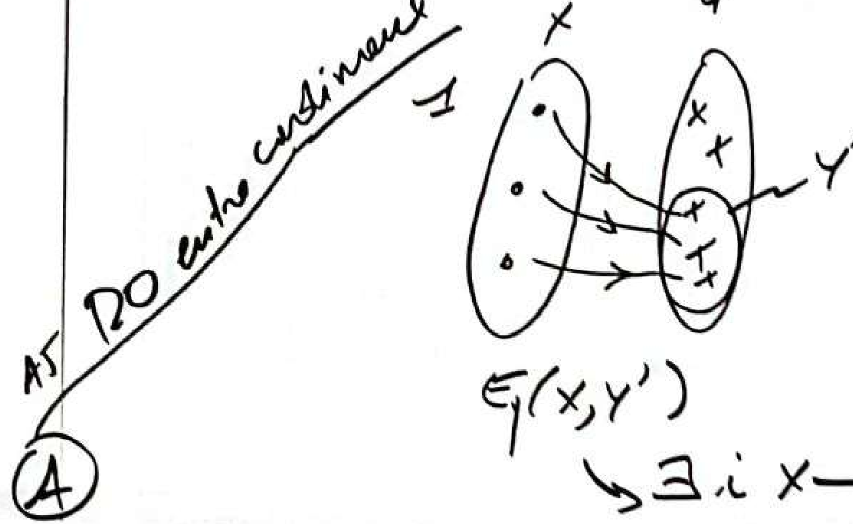
A4 Classe d'equivalence : cardinaux

ERST → Partition en unions de ts les ensembles ts Ens equipot ∈ m̂ CE

X ts Ens Eq à X ∈ m̂ CE
$=$ card X $=$ card(X)

Card X est la CE de Ens X pour Eq

X Y 2 situations



$E_q(X, Y')$

$\to \exists\, i\ X \to Y$

$i = (I, X, Y)$

2 $E_q(X, Y)$

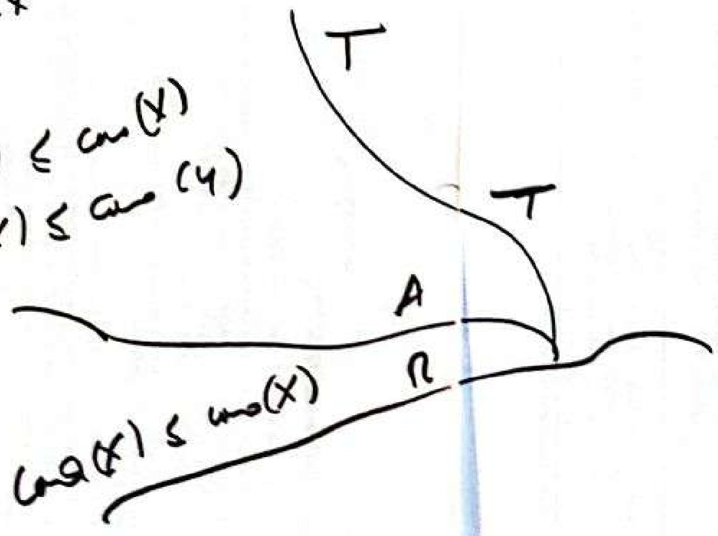
interpretation

X Y tq chacun ...

soit Eq à une partie de ...

Card (X) ≤ Card (Y)

ORAT



Card X = ... X

Card (Y) ≤ Card (X)

Card (Y) ≤ Card (Y)

Card (X) ≤ Card (Y)

Card (X) ≤ Card (X)

B Opérations cardinales

– Eq R E ds univers Ens
ext → une partition
dont les elts sont les cardinaux

ns

CE

?

) R (x'×y')

bi× sur

R(z×y)

par X

B operations cardinales

Hyp: X, X', Y, Y'
$\mathrm{card}(X) = \mathrm{Car}(X')$
$Y \quad Y'$

Dm ds ces conditions que

$$\boxed{\mathrm{Card}(X \times Y) = \mathrm{Card}(X' \times Y')}$$

DM $X \xrightarrow[b]{f} X' \quad Y \xrightarrow[b]{g} Y'$

def une b
$$X \times Y \longrightarrow X' \times Y'$$
$$(x, y) \longmapsto (x', y')$$
$$x' = f(x) \quad y' = g(y)$$

b

→ $X \times Y$ et $X' \times Y'$ sont equipot

Eq comp avec produit card
→ pouvons def une opéraⁿ quotient
seule cardinalement

D prod card opera def entre card

$$\mathrm{card}(X \times Y) = \mathrm{Card}(X) \times \mathrm{Card}(Y)$$

B Opérations cardinales

- Eq RE ds univers Ens est une partition dont les elts sont les cardinaux
- Considérons $*_s$ déf sur Ens

Si Eq compatible avec cette loi

$\longrightarrow$ pouvons définir $*$ sur les CE les cardinaux

B1 Produit cardinal

Q: Eq compatible avec $\times$?

Rappel: RE comp avec $*$

Si xRx' et $yRy' \Rightarrow (x*y)R(x'*y')$

- R comp à G, comp à D, avec loi $*$ sur un ensemble E tq $xRy \longrightarrow (z*x)R(z*y)$

$\mathbb{Z}$ relation usuel comp avec $+$ pas $\times$

Hyp: X, X', Y, Y'

$\mathrm{card}(X) = \mathrm{Card}(X')$

$Y \quad Y'$

Dm ds ces conditions que $\boxed{\mathrm{Card}(X \times Y) = \mathrm{Card}(X' \times Y')}$

DM $X \xrightarrow[b]{f} X' \quad Y \xrightarrow[b]{g} Y'$

déf une b

$$X \times Y \longrightarrow X' \times Y'$$
$$(x,y) \longmapsto (x', y')$$
$$x' = f(x) \quad y' = g(y)$$

b $\vdash$ $X \times Y$ et $X' \times Y'$ sont équipot

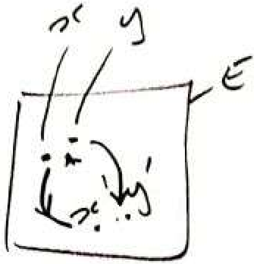
Eq comp avec produit card

$\longrightarrow$ pouvons déf une opér° quotient sur les cardinaux

D prod card opér déf entre card

$$\mathrm{card}(X \times Y) = \mathrm{Card}(X) \mathring{\times} \mathrm{Card}(Y)$$

Rappel — Str quotient



$(E,\star)$ R équiv ds E

compatible avec

$\forall (x,y)\in E^2$ et x' y' $\Longrightarrow x\star y \equiv x'\star y' \pmod R$

~~$xRy \Rightarrow x\star y \, R \, x'\star y'$~~

xRx' et $yRy' \Rightarrow (x\star y)\,R\,(x'\star y')$

$xRy \Rightarrow (z\star x)\,R\,(z\star y)$ Gauche — + général pas forcément équiv ?

- La classe de $x\star y$ est dc indep des représentants de la classe de x et de la classe de y choisis : nous pourrons alors naturellement défini une opération ds E/R = ~~oper~~ opération quotient de $\star$ par R $\dot\star$

Ds ces conditions :

$\forall (x,y)\in E^2$

$$\text{Classe}(x\star y) = \text{Classe}(x)\,\dot\star\,\text{Classe}(y) = \dot x\,\dot\star\,\dot y$$

ce qui peut encore s'écrire en se rapp. que la classe de x est la coupe directe du graphe G de R selon x

$$\forall (x,y)\in E^2,\ G(x\star y) = G(x)\,\dot\star\,G(y)$$

$x \longmapsto \dot x$

$E \longrightarrow E/R$ ~~surj~~

dc "homomorphisme"

$(E,\star)$ et $(E/R,\dot\star)$ sont homom

ex A et C sont conservés par passage à str quot

~~B)~~ Reprise de la deuxième partie
↓ attention & compréhension
Distractions + pensées parasites !!

Ⓑ OPÉR CARDINALES

- équip R équiv ds univers Ens,
dét ds → une partition
dont les élts sont les cardinaux

- ~~≠~~ confusions ~~≠~~ déf nn Ens)

Si équipot comp avec certains [illegible]
alors pouvons défini des opérat° entre
CE, cardinaux

3.1) Produit cardinal

Q?: comp avec X?

Rép: Réquiv comp avec une ~~≠~~
Si $x R x'$ et $y R y'$
card
$\Rightarrow (x \times y) R (x' \times y')$
× ×

$x \; x'$
$y \; y'$

Hyp: Ens $X \; X' \; Y \; Y'$

$Card(X) = Card(X')$ et $card(Y) = card(Y')$

alors OM ds Ord que

~~f~~ $Card(X \times Y) = Card(Y \times Y')$

$X \xrightarrow[b]{f} X \qquad Y \xrightarrow[b]{g} Y'$

alors déf b $\quad X \times Y \longrightarrow X' \times Y'$
$(x, y) \longmapsto (x', y')$
$\quad\quad f(x) \quad g(y)$

$b \rightarrow X \times Y$ et $X' \times Y'$ sont équip
$Card(X \times Y) = Card(X' \times Y')$

Equipot est comp avec prod cardinal ?
cart

→ pouvons ~~≠~~ donc déf nn cardinaux
une opérat° produit

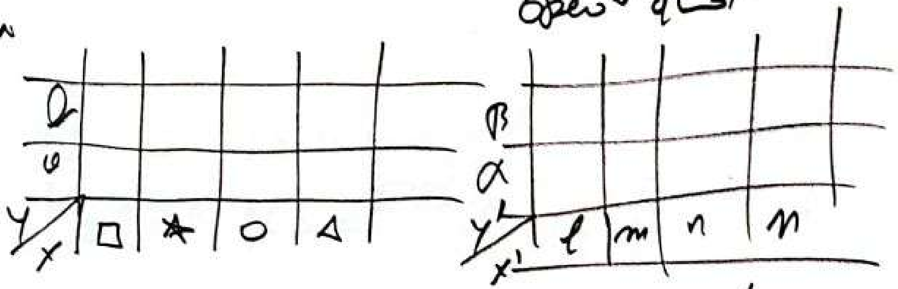
Déf

Prod card est une opér déf entre cardinaux par

$$Card(X\times Y) = Card(X) \dot{\times} Card(Y)$$

opér^n quot

Rem



$X\times Y$ $\quad$ $X'\times Y'$

Eq (X,X')
— (Y,Y')

super pareille $\exists f$

P $\times$card

(1) C

(2) A $\quad$ × Non !

(3) 0 elt Absorbant pour $\times$card

$$X\times\emptyset=\emptyset$$

$$\forall X,\ Card(X\times\emptyset)=Card(\emptyset)=0$$

par déf $\times$card $\quad Card(X\times\emptyset) = Card(X)\dot{\times} Card(\emptyset)$
$= 0$

Soit $\forall X\ \ Card(X)\dot{\times} 0 = 0$

(4) 1 elt N

CE card Ens à 1 elt

$\{\alpha\}$ $\quad X$ $\quad (x,\alpha)$ de $X\times\{\alpha\}$

$$Card(X) = Card(X\times\{\alpha\})$$
$$= Card(X)\dot{\times} Card(\{\alpha\})$$

$$\forall X\ \ Card(X)\dot{\times} 1 = Card(X)$$

Rem ~~Symb~~ Confusions entre $\dot{\times}$ et $\times$

B2 Somme cardinale

φ équivalent comp avec + ?

$$Card(X+Y) = card(X)\dot{+} card(Y)$$
$$= Card(X\cup Y) \dot{+} Card(X\cap Y) \,]^*$$

P
A
C
O N

B3 <u>+ card D × card</u>

$$[\mathrm{card}(x) \dot{+} \mathrm{card}(y)] \dot{\times} \mathrm{card}(z) =$$

$$[\mathrm{card}(x) \dot{\times} \mathrm{card}(z)] \dot{+} [\mathrm{card}(y) \dot{\times} \mathrm{card}(z)]$$

B4 <u>ordre Card compatible + et × Card</u>

$$a+c \leq b+c \text{ et } a \times c \leq b \times c$$

B5 <u>Calcul Card $[\mathcal{P}(E_n)] = 2^n$</u>

B6 <u>il n'existe pas d'~~ensemble~~ Ens</u>
sont <u>tous cardinal ~~elt~~ ... elt</u>

T <u>Cantor</u>

C N

C1 D

Card ~~est~~ fini si $a \neq a+1$] A

"on est mot"

Rem. Card, déf comme CE pour Equiv

au moins 1

: Card (N)

} ≤ Card(N)

C N

Calcul

$Car(2N \cup \{1\}) = Card(2N) + Card(\{1\})$

$= Card(2N) + 1$

Car $2N \cup \{1\}$ équiv à $2N + \{1\}$

→ $Card(2N) \leq Card\, 2N + 1 \leq Card(N)$

Calcul

$Card(2N) = Card(N)$

→ $Card(N) \leq Card(N) + 1 \leq Card(N)$

inégalité $Card(N) = Card(N) + 1$

C3 EXOS

C4 P N

C4.1 Ordre des N

(1) Si n est ~~un~~ entier tout cardinal a

tq $a \leq n$ est un entier;

puisque → ∃ un 1 card b tq

$a + b = n$ or $(a+b)+1 = n+1$

C N

C1 D

Card[la] est fini si $a \neq a+1$] A

"en art not"

Rep : Cards déf comme CE pour Equip

N etc = CE pr équipot

Not N 0, 1, 2, 3

C2 Rem

$\mathbb{N}$ a t-elle un sens ?

exist-il card tq $a = a+1$?

Nous allons montrer qu'il en $\exists$ au moins 1 : Card (N)

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \cdots\}$

$2\mathbb{N} = \{0, 2, 4 \cdots\}$

$2\mathbb{N} \cup \{1\} = \{0, 1, 2, 4 \cdots$

$2\mathbb{N} \subset 2\mathbb{N} \cup \{1\} \subset \mathbb{N}$

$\mathrm{Card}(2\mathbb{N}) \leq \mathrm{Card}(2\mathbb{N} \cup \{1\}) \leq \mathrm{Card}(\mathbb{N})$

Calcul

$\mathrm{Car}(2\mathbb{N} \cup \{1\}) = \mathrm{Card}(2\mathbb{N}) + \mathrm{Card}(\{1\})$
$= \mathrm{Card}(2\mathbb{N}) + 1$

Car $2\mathbb{N} \cup \{1\}$ équiv à $2\mathbb{N} + \{1\}$

→ $\mathrm{Card}(2\mathbb{N}) \leq \mathrm{Card}\, 2\mathbb{N} + 1 \leq \mathrm{Card}(\mathbb{N})$

Calcul

$\mathrm{Card}(2\mathbb{N}) = \mathrm{Card}(\mathbb{N})$

→ $\mathrm{Card}(\mathbb{N}) \leq \mathrm{Card}(\mathbb{N}) + 1 \leq \mathrm{Card}(\mathbb{N})$

inegalité $\mathrm{Card}(\mathbb{N}) = \mathrm{Card}(\mathbb{N}) + 1$

C3 EXOS

C4 P N

C4.1 Ordre ds N

1. Si n est un entier tout cardinal a tq $a \leq n$ est un entier;

puisque $\exists$ 1 card b tq $a + b = n$ ac $(a+b)+1 = n+1$

② RO sur les cardinaux
induit un ordre sur $\mathbb{N}$ total

$a \leq b$ $b \leq a$
Ⓥ entre Ⓕ
si 2 Ⓥ alors $a = b$

③ inégalité stricte
on pose on écrit $a < b$
ES qu'il existe $c \neq 0$ tq ~~a+b=~~
$a + c = b$

④ 0 comp avec opéra + et $\times$ card
$\forall z \in \mathbb{N}$ $\leq$ $x \leq y$, $\Leftarrow$ $x+z \leq y+z$
$x \cdot z < y \cdot z$

CG2 + DaN

+ card induit sur $\mathbb{N}$ une opéraⁿ +

1 C ← * en effet
2 A
3 Régulière $\forall z \in \mathbb{N}$, on a
$\Leftarrow$ $x+z = y+z$, $x = y$
Contrairement à + card *

$\leq$ ~~et~~ nég
$\exists$ soit $x\ y\ z$ tq $x+z = y+z \Rightarrow x \neq y$
soit par ex $x < y$
on aurait ~~x~~ $x+z < y+z$ Contradi Hyp

④ $\exists$N 0 ← 0 opéra card
*

⑤ $(\mathbb{N}, +)$ ~~G~~ ~~a+x=~~ $a + x = b$
admet sol que si $a \leq b$
dans donné n $\nexists p$ tq $n + p = 0$
seul $0 + 0 = 0$

C43 X

① C
② A
③ Seul 0 n'est pas régulier ~~pour~~
0 absorbant
④ N 1
⑤ $(\mathbb{N}, \times)$ ~~G~~ $a \times x = b$ pas sol
Rap opé induits sur $\mathcal{P}(E)$ $\times$
$p \times \mathbb{N}^{*} = \{0, p, 2p, 3p \cdots np \cdots\}$
si $b \in a \times \mathbb{N}$ b multiple de a
⑥ $\times$ D +

C5 ÷ euclidienne

$a \geq b$

$b\mathbb{N} = \{0, b, 2b, 3b, \dots, qb, (q+1)b \dots\}$

$\cap$ 0

$\mathbb{N}$

tot ordonné

$3 \cancel{\geq} 2$

$2 \leq 3$

$\cancel{2 \cdot 2 \leq (2+1) \cdot 2}$

T il existe q unique tq

$\underline{qb \leq a} < (q+1)b$

il existe de r + q

$a = qb + r$

unique

r < b

Dm unicité de q et r

unicité q ⟹ celle de r

Dm que si q n'est pas unique ⟶ Contradiction

q et q' $\quad qb \leq a < (q+1)b \quad (1)$

$q'b \leq a < (q'+1)b \quad (2)$

Supposons $q \neq q'$ soit par ex $q' > q$

on en conclue $q' \geq q+1$

$(q+1)b \leq q'b \Rightarrow a < a$

(3)

$$\overbrace{\underbrace{a < (q+1)b}_{(1)} \leq \underbrace{q'b \leq a}_{(2)}}^{(3)} \Rightarrow a < a$$

C6 Applicⁿ : Dvpt de base b d'un entier a

dvpt base 4 de 100

$100 = 4^3 + 2 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4 + 0$

C7 Ens finis

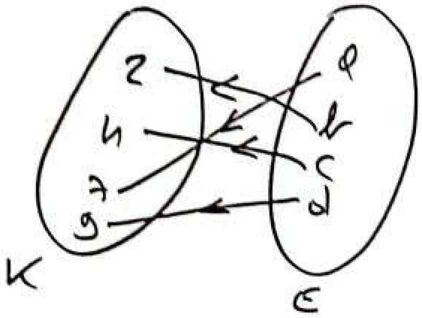
D Si son card est un ~~ent~~ $\mathbb{N}$ = fini

Si E fini $\quad n = $ nb d'~~élts~~ es de E

si $\mathrm{Card}(E) = n$

D ~~T~~ E equip à une partie finie de $\mathbb{N}$ serait fini denombrable

T Ens equip à $\mathbb{N}$ est infini denombrable ou denombrable



① ∃ E → un ens équip à une partie finie K de ℕ

le Graphe de f E → K

"suite finie"

G = {(a,7)

a_7 b_2

① un ens infini dénombrable

la puissance du

① ℝ pas dénombrable

la puissance du continu

D Anti GMF

Df D $n!$

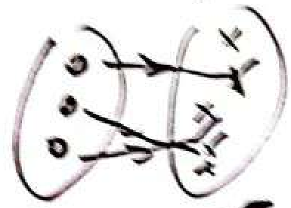
$\star\ 0! = 1$ ... $\rceil$ pour que

$3 = 6$

$= 1.2.3.4 = 24$

$p = 1$ on trouve $\frac{n!}{(n-1)!}$ n ...

Supp que T ~~est~~ vrai pour n et montrons qu'il est alors vrai pour $p+1$



E' vers F

→ Hyp

Soit $E = E' \cup \{a\}$

$\text{Card}(E) = \text{card}(E') + \text{card}\{a\}$

$= p+1$

D Analyse Combinatoire

D AVAL GMB

D1 D $n!$

$\star$ $0! = 1$

$\overline{n+1}! = (n+1) \cdot n!$] par réc

~~$\overline{0+1}! = 0+1 \cdot 0!$~~

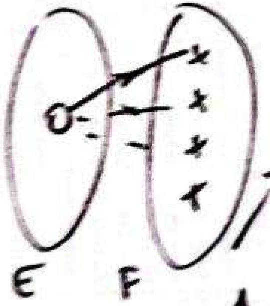
$1! = 1$ $2! = 1.2$ $3! = 1.2.3 = 6$

$4! = 1.2.3.4 = 24$

D2 nb a i $E_p \longrightarrow F_n$

$T = \dfrac{n!}{\overline{n-p}!}$ → Hyp

DM par réc sur p



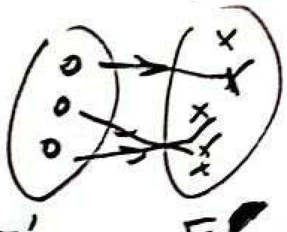
surtout inj puisque elts de F = n

$p = 1$

$p = 1$ ↓ on trouve n nb n

$\dfrac{n!}{\overline{n-1}!}$

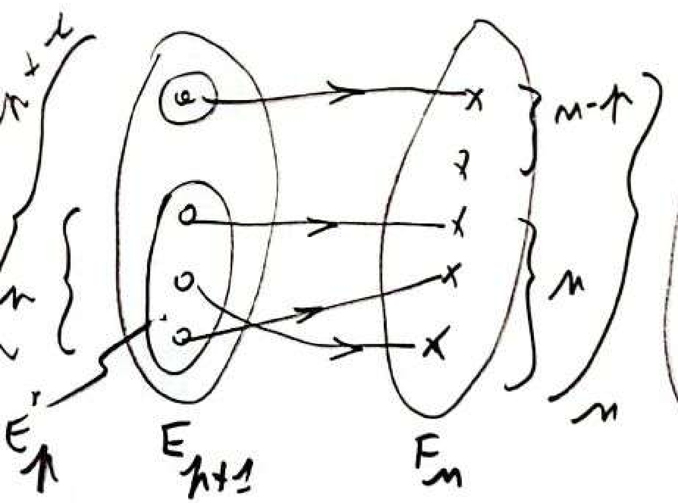
Sup que T ~~est~~ vrai pour n et montrons qu'il est alors vrai pour $p+1$

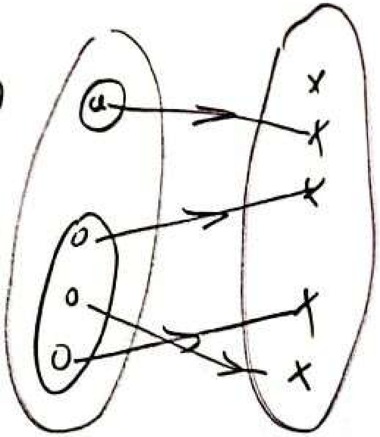


Soit $E = E' \cup \{a\}$

$\text{Card}(E) = \text{Card}(E') + \text{Card}\{a\}$

$= p+1$





à toute i f $E' \to F$

on peut associer i φ $E \to F$

tq restriction ~~de E'~~ à E' de φ soit f

...

Rem $p = 0$ ...

D3 Nb ~~A~~ à p elts d'un Ens à n elts E_n

$\cancel{A_p}$ A_n^p $\underrightarrow{a, n, p}$

R1 " $\cancel{\frac{n!}{A_{n-p}'}}$ $\frac{n!}{\overline{n-p}\,!}$

$= \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)\ \overline{n-p}\,!}{\overline{n-p}\,!}$

$= n(p-1)\dots \cancel{n-p} (n-p+1)$

R2 $A_n^0 = 1$

$A_n^{p+1} = (n-p) A_n^p$

pour $p = 0$ $A_n^1 = n$

App $A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$

$A_5^3 = \cancel{3}\ 5 \cdot 4 \cdot 3$

A_n^p

p produit de p nbs dec à partir de n

~~$n \dots p$~~ ~~$n-p$~~

D5 Permutations

S E_n une ~~de E~~ ~~(E, RO total~~

E muni 1 RO total

Ex 1 S $E = \{\alpha, \beta\}$

une P de E $(E ; \alpha > \beta)$

une autre or $\beta > \alpha$

Ex2

S $E = \{A, B, C\}$

≠ Ps de E sont

$(E; A > B > C)$

$A > C > B$

$B > A > C$

$B > C > A$

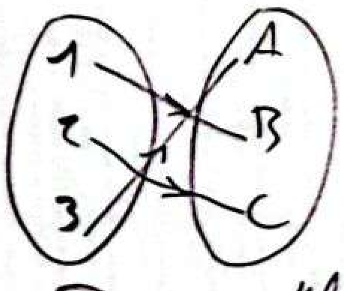
$C > A > B$

$C > B > A$

D ~~em~~ un OT sur un Ens fini E_n

c'est encore déf une b

entre $\{1, 2, \dots, n\}$ et E



une P sera alors l'image par une

b de $\{1, 2, \dots n\}$ ds E

R Si E F finis sont équip

si f est une a $A\!F_1(f, E, F)$

3 assertions suiv sont équiv

f est une b

________ i

________ s

Aussi une P d'un E fini n

est l'image de $\{1, 2, n\}$ par

une i ________

D6 Nb P un Ens fini

$$A_n^n = n!$$

D7 C SE à p elts d'un E_n

R $p \leq n$

$ la comb d'chaque SE

pouvons leur associer $p!$ A

$\rightarrow k \cdot p! = A_n^p$

$k = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

C_n^p

Calcul

nb C de n objets pris p à p = produit de p nb déc à partir de n que divise fac p

D8 Prop C_n^n

$C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$

S E_n

$\alpha \notin E$

$E \cup \{\alpha\}$ $E_{ns_{n+1}}$

Combien admet t-il de SE à p+1 elts?

1ère rép C_{n+1}^{p+1} par déf

2ème rép

Parmi tous les SE de à p+1 elts

y a ceux qui $\ni \alpha$ nb j

et ______ $\not\ni \alpha$ nb k

$C_{n+1}^{p+1} = j + k$

~~Ca~~ Calcul de j ...

______ k avec C_n^p

D9 triangle de Pascal

	0	1	2	3	p	p+1
0	C_0^0					
1	C_1^0					
2						
3						
n						
n+1						

$C_n^p + C_n^{p+1} =$

C_{n+1}^{p+1}

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

D 10 $C_n^p = C_n^{n-p}$

$$\sum_{p=0}^{p=n} C_n^p = 2^n$$

D 12 formule binôme

Anneau C $(x+y)^n$ a un sens

$$(x+y)^n = \sum_{p=0}^{p=n} C_n^p x^{n-p} y^p$$

$C_{10}^8 = \frac{10.9.8.7.6.5.4.3.2.1}{}$