CEPADUES EDITIONS

MEMO MATH

[redacted]

Bac B.C.D.D'.E

Premières années de Faculté

• Plus complet qu'un simple lexique...

• Plus concis que les ouvrages habituels...

Pierre Souriac

CEPADU[ES] EDITI[ONS]

MEMO MATH

par **P. Souriac**
Maître-Assistant

CEPADUES-EDITIONS

I.S.B.N. : 2.85428.022.9

N°Editeur : 37
Dépôt légal : 3e trimestre 1977

Avant-propos

L'étudiant qui prépare son baccalauréat ou qui prépare un diplôme d'études supérieures est bien souvent arrêté en mathématiques par une définition mal comprise ou par une propriété mal assimilée. Il pourra alors, sans se perdre dans la prolixité d'ouvrages plus importants, se plonger dans ce manuel qui a pour but de fixer des connaissances couvrant celles qu'on exige dans les baccalauréats scientifiques sans les figer dans le cadre d'un programme scolaire.

Les définitions sont suivies d'exemples simples facilitant leur compréhension ; les propriétés sont rappelées en tenant compte des divers enchaînements, des commentaires accompagnent les principaux raisonnements utilisés en mathématiques.

Un effort très particulier a été réalisé dans la disposition du texte et un système a été mis au point pour que l'utilisation pratique de ce livre soit agréable et facile. Ce système est expliqué à la page suivante...

Conçu comme livre complémentaire pour les futurs ou déjà bacheliers, plus complet qu'un simple lexique, plus concis que les ouvrages habituels, ce manuel devrait répondre à un besoin que j'ai maintes fois constaté.

oh oui!

Pierre Souriac

vas-y pierre!

Scanné avec CamScanner

Principaux signes utilisés

oui!

OK

Df ♦ pour les définitions fondamentales

D.P ◊ pour les propriétés ou les définitions moins importantes

★ pour les cas particuliers importants ou pour les remarques

ex ☆ pour les exemples

□ indique un commentaire de l'auteur

● indique les points importants d'un paragraphe

CHAPITRE 1

NOTIONS FONDAMENTALES

1° → 6/90

□ Commentaire

Les notions fondamentales se retrouvent en algèbre, en analyse, en géométrie,..., à la manière dont le sujet, le verbe et le complément se retrouvent dans les phrases d'un texte.

Ces notions concernent plutôt la structure que le contenu.

1° - ENSEMBLES. SYMBOLES.

$(A \cap B) \subset (A \cup B)$

□ Ensembles, éléments d'un ensemble, réunion, intersection sont supposés connus du lecteur.

- ϕ désigne l'ensemble vide, qui n'a aucun élément.
- $\bigcup$, symbole de réunion, se dit union ou aussi ou, dans le sens "soit l'un, soit l'autre, soit les deux à la fois". V
- $\bigcap$, symbole d'intersection, se dit inter ou aussi et, dans le sens "les deux à la fois". Λ

♦ Ensembles disjoints : ensembles sans élément commun.

- A et B sont disjoints lorsque : $A \cap B = \phi$.

♦ *Parties d'un ensemble E.*

E

- Une partie de E est un sous-ensemble de E, ou encore un ensemble constitué par des éléments de E.
- ϕ est une partie de E par convention (quel que soit E).
- E est une partie de E : la partie pleine (quel que soit E).

♦ *Ensemble des parties.*

- L'ensemble des parties de E se note $\mathscr{P}(E)$.
- $\mathscr{P}(E)$ est constitué de toutes les parties de E, ϕ et E compris.

☆ Exemple. Si $E = \{a, b, c\}$, on a :

$\mathcal{P}(E) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, E\}$ $\operatorname{card} \mathcal{P}(E) = 2^{\operatorname{card} E}$

◆ Complémentaire d'une partie A de E.

- Le complémentaire de A dans E se note $E - A$, ou aussi $\complement_E^A$
- $E - A$ est constitué des éléments de E qui ne sont pas dans A.

$E - A = \complement_E^A = \{x \in E \,/\, x \notin A\}$

◆ ***Symboles usuels.***

- $\in$ "est élément de ...", "appartenant à ..."
  ce symbole s'emploie entre un élément et un ensemble.
- $\subset$ "est inclus dans ...", "est contenu dans ..."
  ce symbole s'emploie entre deux ensembles.
- $\forall$ "quel que soit ...", "pour tout ..."
  ce symbole s'emploie en général devant un élément.
- $\exists$ "il existe au moins un ..."
  ce symbole s'emploie en général devant un élément.
- $\Rightarrow$ "implique ...", "entraîne ..."
- $\Leftrightarrow$ "est logiquement équivalent à ..."

◆ ***Négation.***

- La négation peut se symboliser en barrant le symbole.

☆ Exemples . $\nexists$ signifie "il n'existe aucun ..."

. $\notin$ signifie "n'est pas élément de ..."

◆ ***Produit cartésien de 2 ensembles A et B.***

- Le produit cartésien de A et B se note $A \times B$ (on dit A croix B).
- $A \times B$ est un ensemble.
- $A \times B$ a pour éléments tous les couples (a, b) tels que a soit un élément pris dans A, et b un élément pris dans B, chacun de toutes les manières possibles. $A \times B = \{(a,b) \,/\, a \in A \text{ et } b \in B\}$

☆ Exemple. Si $A = \{1, 4\}$ et si $B = \{0, 3, 6\}$, on a :

$A \times B = \{(1,0), (1,3), (1,6), (4,0), (4,3), (4,6)\}$

★ Remarque. $A \times A$ se note aussi A^2, il est constitué comme dans le cas général. $A = \{1, 4\}$ donne $A^2 = \{(1,1), (1,4), (4,1) (4,4)\}$.

◆ Produit cartésien de 3 ensembles, de n ensembles.

- Le produit cartésien $A \times B \times C$ est l'ensemble constitué par les triplets (a, b, c) où a est pris dans A, b est pris dans B, c est pris dans C, chacun de toutes les manières possibles.

◇ De même pour $A \times A \times A$, qui se note aussi A^3.

- Dans le cas de n ensembles, le produit cartésien est un ensemble constitué de n-uplets, d'une manière analogue.

◆ ***Cardinal d'un ensemble E.***

- Le cardinal de E se note card E.
- card E est le nombre d'éléments de E, il n'est utile que s'il est fini (non infini) en pratique.

◇ Propriétés
- $\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B - \operatorname{card}(A \cap B)$ 
- $\operatorname{card}(A \times B) = \operatorname{card} A \times \operatorname{card} B$
- $\operatorname{card} \phi = 0$

2° - RELATIONS BINAIRES DANS UN ENSEMBLE E.

1 ◆ Relation binaire. $\mathcal{R} \subseteq E \times E$ $\mathcal{R} : E \times E \to \{0,1\}$

Une relation binaire dans un ensemble E est une propriété caractéristique que peuvent vérifier (ou non) les éléments de $E \times E$.

☐ On symbolise en général une relation binaire par $\mathcal{R}$.

☆ Exemple. Si $E = \{p, m, e_1, e_2\}$ désigne une famille où p représente le père, m la mère, e_1 et e_2 les enfants, et si $\mathcal{R}$ veut dire "est enfant de ...", on peut écrire :

- $e_1 \mathcal{R} p$, $e_1 \mathcal{R} m$, $e_2 \mathcal{R} p$, $e_2 \mathcal{R} m$: car "c'est vrai".
- $p \not\mathcal{R} e_1$ ou aussi $\text{non}(p \mathcal{R} e_1)$: car "c'est faux".

2 ◆ Graphe d'une relation binaire dans E.

- Le graphe de $\mathcal{R}$ (relation binaire dans E) est l'ensemble des couples de $E \times E$ pour lesquels $\mathcal{R}$ est vérifiée.

$G_{\mathcal{R}} = \{(a,b) \in E \times E \,/\, \mathcal{R}(a,b) = 1\}$

Scanné avec CamScanner

☆ Dans l'exemple précédent, le graphe est :

$$\{(e_1,p),(e_2,p),(e_1,m),(e_2,m)\}$$

$\mathcal{R}(x,y)$

3 ◆ ***Propriétés possibles d'une relation binaire.***

- **Réflexivité** : lorsque tout élément vérifie la relation avec lui-même.
  - . $\mathcal{R}$ réflexive lorsque $a\mathcal{R}a$ $(\forall a \in E)$
- **Symétrie** : lorsque $\mathcal{R}$ est vérifiée "dans les 2 sens".
  - . $\mathcal{R}$ symétrique lorsque $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow b\mathcal{R}a$ Attention !
- **Antisymétrie.**
  - . $\mathcal{R}$ antisymétrique lorque $a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}a \Rightarrow a = b$
- **Transitivité** : propriété ressemblant à la relation de Chasles.
  - . $\mathcal{R}$ transitive lorsque $a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c$

4 ◆ **Relation d'équivalence.**

$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence lorsqu'elle est à la fois réflexive, symétrique, transitive.

□ On peut retenir ERST (Equiv, Réfl, Sym, Trans).

☆ **Exemple.** Dans $\mathbb{Z}$, la relation $\mathcal{R}$ définie par

$a\mathcal{R}b$ signifie "a − b est multiple de 3"

est une relation d'équivalence (chapitre 4, 5°).

◆ **Classe d'équivalence de a, modulo $\mathcal{R}$ (dans E).** → $x\mathcal{R}a$

- L'ensemble de tous les éléments x de E qui vérifient $x\mathcal{R}a$ pour a fixé s'appelle :

  classe d'équivalence de a modulo $\mathcal{R}$.

◇ **L'ensemble des classes d'équivalence (modulo $\mathcal{R}$) est un ensemble de parties de E, disjointes 2 à 2.**

- Cet ensemble se note $\frac{E}{\mathcal{R}}$ ou $E/\mathcal{R}$, on l'appelle ensemble quotient de l'ensemble E par la relation $\mathcal{R}$.

$E/\mathcal{R}$

◆ **Relation d'ordre.**

$\mathcal{R}$ est une relation d'ordre lorsqu'elle est à la fois réflexive, antisymétrique, transitive.

□ On peut retenir ORAT (Ord, Réfl, Anti, Trans).

☆ **Exemple.** Dans $\mathbb{R}$, la relation $\mathcal{R}$ définie par

$a\mathcal{R}b$ signifie "a est inférieur ou égal à b"

est une relation d'ordre ; on la note $\leqslant$.

◇ **Ordre total.** L'ordre (défini par une relation d'ordre $\mathcal{R}$ dans E) est total, ou aussi E est totalement ordonnée par $\mathcal{R}$, lorsque pour tout couple (a, b) de E^2, l'on a : $a\mathcal{R}b$ ou $b\mathcal{R}a$.

◇ **Ordre partiel.** De même, l'ordre est partiel (ou aussi E est partiellement ordonné par $\mathcal{R}$) lorsqu'on peut trouver au moins un couple (a, b) de E^2 ne vérifiant pas $\mathcal{R}$.

☆ **Exemples** . $(\mathbb{R}, \leqslant)$ est totalement ordonné.

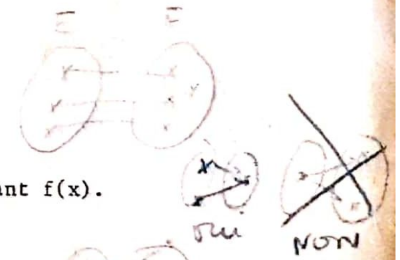
. $\mathbb{N}^*$, muni de la relation "a divise b" est partiellement ordonné ; "3 divise 7" n'est pas vérifié.

3° - APPLICATIONS. FONCTIONS.

◆ **Schéma d'une application f.**

$$f : \begin{array}{|l} E \longrightarrow F \\ x \longrightarrow f(x) \end{array}$$

□ Tout élément x doit avoir un correspondant f(x).



◆ **Schéma d'une fonction f.**

fonctions

$$f : \begin{array}{|l} E \longrightarrow F \\ x \longrightarrow f(x) \end{array}$$

application

□ Tout élément x doit avoir zéro ou un correspondant f(x).

● ***Explications.***

- f est le symbole (ou le nom) de l'application ou de la fonction.
- E est l'ensemble de départ, ou la source, ou l'ensemble-objet de f.

NB

NB

- F est l'ensemble d'arrivée, ou le but, ou l'ensemble-image de f.
- x est l'élément initial, ou la variable, ou l'antécédent de f(x).
- f(x) est le transformé (ou l'image) de x par f, ou la valeur de f au point x. f(x) en fonction de x

◊ Graphe de f (application ou fonction).

- Le graphe de f se note G_f.
- G_f est l'ensemble des couples (x,y) de E × F tels que le 2° terme soit l'image par f du 1er terme.
- $G_f = \{(x,y) \in E \times F \,/\, y = f(x)\}$.
- En abrégé : $G_f = \{(x,f(x)) \in E \times F\}$.

★ ***Représentations graphiques.***

• Lorsqu'on peut représenter E et F par des schémas, on peut représenter "concrètement" un graphe.

☐ Si E = F = ℝ, on représente E par un axe gradué : l'axe des abscisses ; de même, F par l'axe des ordonnées, les deux axes se coupant en 0, point de graduation zéro de chacun des axes.

☐ La représentation graphique de G_f est alors l'ensemble des points M(x,y) tels que x soit une valeur portée en abscisse, et y = f(x) la valeur correspondante portée en ordonnée.

☐ Par abus, on dit qu'une telle représentation graphique de G_f est une représentation graphique de f, et même une courbe d'équation y = f(x).

4° COMPLEMENTS SUR LES APPLICATIONS OU LES FONCTIONS.

♦ ***Injectivité.*** $\forall (x,x') \in E^2,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

- f est injective lorsque, quels que soient 2 éléments initiaux distincts, ils ont des images distinctes.

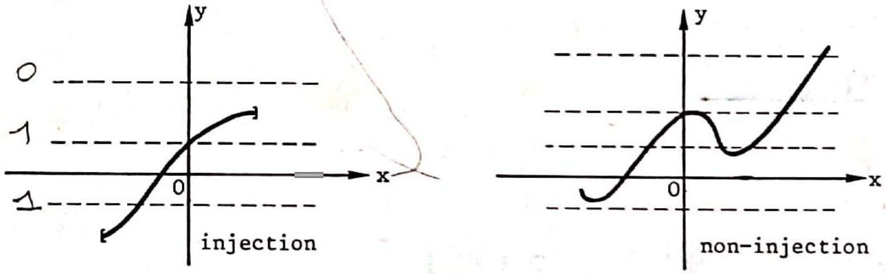
En pratique, on pose f(x) = f(x'), on cherche les solutions ; f est une injection, si l'on trouve une solution et une seule dans E, à savoir : x = x'.

tout elt de F a au plus un antécédent ds E

☆ Exemple. f : $\left|\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow f(x) = 2x^3 \end{array}\right.$ définit une injection.

• Preuve succincte : f(x) = f(x') s'écrit $2x^3 = 2x'^3$, d'où $x^3 - x'^3 = 0$, d'où $(x-x')(x^2+xx'+x'^2) = 0$. Solution évidente x = x', et il reste $x^2 + xx' + x'^2 = 0$, du second degré en x ; $\Delta = -3x'^2$, la seule possibilité dans ℝ est de prendre x' = 0 (sinon Δ' < 0), l'équation devient $x^2 = 0$, d'où x = 0, d'où x = x'.

☐ Graphiquement, on peut reconnaître une injection en menant des parallèles à Ox. On doit trouver zéro ou un point d'intersection de ces droites et de la courbe.



★ Cela ne dispense pas d'une preuve par le calcul.

♦ ***Surjectivité.*** tout elt de F a au moins

- f est surjective lorsque l'ensemble des images et l'ensemble-image F (donné) coïncident, ou aussi f(E) = F.

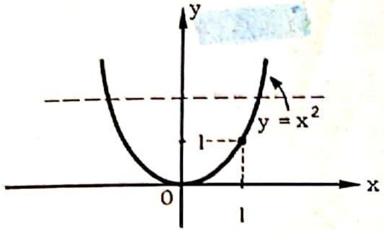
En pratique, on pose f(x) = y avec l'hypothèse y ∈ F, on cherche les solutions x ; f est une surjection lorsque l'on trouve au moins une solution dans E (donné).

☆ Exemple. f : $\left|\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longrightarrow f(x) = 4x^2 \end{array}\right.$ définit une surjection.

• Preuve succincte : f(x) = y s'écrit $4x^2 = y$ d'où $x^2 = \frac{y}{4}$, l'hypothèse est (ici) $y \geq 0$, donc on a $x = \frac{\sqrt{y}}{2}$ ou $x = \frac{-\sqrt{y}}{2}$; ces solutions sont dans ℝ.

SUR + INJ + SUR − INJ +

☐ Graphiquement, on peut reconnaître une surjection en menant des parallèles à Ox qui coupent Oy dans la zone représentant F. On doit trouver au moins un point d'intersection avec la courbe.



surjection sur $\mathbb{R}^+$
non-surjection sur $\mathbb{R}$

★ Cela ne dispense pas d'une preuve par le calcul.

★ On peut restreindre une application f (non surjective) de manière à définir une surjection, en modifiant convenablement l'ensemble d'arrivée F : on le remplace par f(E).

♦ *Bijectivité.*

- f est bijective lorsqu'elle est injective et surjective.
- On dit aussi : f est une bijection.

☐ En pratique, on revient aux deux cas précédents.

♦ *Composition de 2 fonctions.*

- La composition est une opération, symbolisée par o (on dit rond).
- f et g étant données, de schémas

$$f : \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g : \left| \begin{array}{l} F \longrightarrow G \\ x \longmapsto g(x) \end{array} \right.$$

$f(x) \subseteq F$

avec le but de f égal à la source de g (ou seulement inclus), la composée de g par f, notée gof, est "définie" par :

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g[f(x)]$$

gof

Schéma $\quad gof : \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow G \\ x \longmapsto gof(x) = g[f(x)] \end{array} \right.$

En pratique, on pose f(x) = y, on exprime g(y), puis on remplace (dans l'expression obtenue) y par l'expression f(x).

☆ Exemples.

Soit $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) = x^2 \end{array} \right.$ et soit $g : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto g(x) = \dfrac{1}{x^2+1} \end{array} \right.$

gof

1. D'une part, $g(y) = \dfrac{1}{y^2+1}$ d'où $g[f(x)] = \dfrac{1}{(x^2)^2+1}$,

d'où $\quad gof : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto gof(x) = \dfrac{1}{x^4+1} \end{array} \right.$

fog

2. D'autre part, $f(y) = y^2$ d'où $f[g(x)] = \dfrac{1}{(x^2+1)^2}$

d'où $\quad fog : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto fog(x) = \dfrac{1}{x^4+2x^2+1} \end{array} \right.$

★ fog ≠ gof en général (d'après les exemples précédents).

♦ Identité, (ou application identique).

- L'identité (relative à un ensemble E) se note Id_E ou Id.
- Id transforme chaque élément en lui-même.

Schéma. $\quad Id : \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto Id(x) = x \end{array} \right.$

☐ Le graphe de Id est la diagonale de E^2.

☐ Une représentation graphique, en axes orthonormés, de la diagonale de $\mathbb{R}^2$ est la 1ère bissectrice des axes : droite d'équation y = x.

♦ *Réciproque d'une bijection.*

- Une bijection f étant donnée, la bijection réciproque se note f^{-1}.
- f^{-1} est la bijection qui, partant de l'image f(x), aboutit à l'antécédent x.

$f^{-1} : F \longrightarrow E$
$f(x) \longmapsto x$

Schémas $f : \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{array} \right.$ $\qquad f^{-1} : \left| \begin{array}{l} F \longrightarrow E \\ x \longmapsto f^{-1}(x) \end{array} \right.$

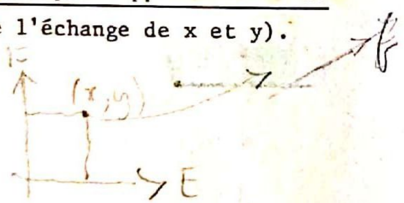
En pratique, (lorsque f est bijective) on pose $f(x) = y$, on résout relativement à x ; on obtient l'expression $x = f^{-1}(y)$ où l'on échange x et y, de manière à retrouver les notations usuelles (x "au départ").

☆ Exemple. Soit la bijection $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) = 1 - x^3 \end{array} \right.$

- $f(x) = y$ s'écrit $1 - x^3 = y$, d'où $x^3 = 1 - y$, d'où $x = \sqrt[3]{1-y}$.
- L'échange donne $y = \sqrt[3]{1-x}$.
- La réciproque est $f^{-1} : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f^{-1}(x) = \sqrt[3]{1-x}. \end{array} \right.$

☐ Graphiquement (en axes orthonormés) les courbes d'équations $y = f^{-1}(x)$ et $y = f(x)$ sont symétriques par rapport à la 1ère bissectrice des axes (conséquence de l'échange de x et y).

★ $f^{-1} \circ f = Id_E$, $f \circ f^{-1} = Id_F$.



5° - LOIS DE COMPOSITION.

♦ Définition générale.

- 3 ensembles E, F, G étant donnés, une loi de composition est une application de $E \times F$ dans G. $E \times F \to G$

le

★ Cas particuliers usuels.

$f : E \times F \to G$

$(a, b) \mapsto f(a, b)$

$= a F b$

la

- Loi de composition interne définie sur E :
  - Application $E \times E \longrightarrow E$.
  - On dit aussi opération (interne) dans E.

o.l

le

- Loi de composition externe, définie sur E à l'aide de $\mathbb{K}$:
  - Application $\boxed{\mathbb{K} \times E} \longrightarrow E$.
  - On dit aussi opération (externe) dans E, définie avec $\mathbb{K}$.

o.l

à droite

$+ \in \mathbb{K}$?

dit donne une loi d'opérateurs

☆ Exemples.

1. Multiplication dans $\mathbb{N}$:

   loi interne, $\left| \begin{array}{l} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ (p, q) \longmapsto pq, \end{array} \right.$

   où pq est la somme de p entiers égaux à q.

2. Produit des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ par les scalaires de $\mathbb{R}$:

   loi externe, $\left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\lambda, \vec{v}) \longmapsto \lambda\vec{v}, \end{array} \right.$

   où $\lambda\vec{v}$ est le vecteur obtenu en multipliant les composantes de $\vec{v}$ par le réel λ. Ce qui est proprement génial

♦ Propriétés possibles associées à ***une loi interne***.

☐ On symbolise l'opération par le signe $*$.

☐ On abrège le schéma $\left| \begin{array}{l} E \times E \longrightarrow E \\ (a, b) \longmapsto a * b \end{array} \right.$ en $(E, *)$ → interne !

I ● $*$ interne signifie : $\forall (a,b) \in E \times E : a * b \in E$.

A ● Associativité.

$*$ est associative lorsque $(a * b) * c = a * (b * c)$, $\forall (a, b, c) \in E^3$.

C ● Commutativité.

$*$ est commutative lorsque $\quad a * b = b * a, \quad \forall (a, b) \in E^2$.

N ● Elément neutre dans $(E, *)$.

On appelle ainsi, lorsqu'il existe et est dans E, l'élément (désigné par e) qui vérifie

$(\forall a \in E)$ pour tout a de E : $a * e = e * a = a$.

. si e existe, il est unique.

G D

. s'il existe e tel qu'on ait seulement $e * a = a$ $(\forall a \in E)$, on dit que e est neutre à gauche (dans l'autre cas, neutre à droite).

S ● Eléments symétriques dans $(E, *)$.

Lorsque l'élément neutre e existe, le symétrique de $a \in E$ est, lorsqu'il existe et est dans E, l'élément a' qui vérifie

$a * a' = a' * a = e$.

• si a' existe, il est unique.

• s'il existe a' tel qu'on ait seulement $a' * a = e$, on dit que a' est symétrique à gauche de a (dans l'autre cas, symétrique à droite).

★ Cas usuels.

$a + (-a) = 0_E$

• Si l'opération est additive (signe +), le neutre est noté 0 ou 0_E, le symétrique de a est dit opposé de a, on le note $-a$.

(E, ×, 1_E)

• Si l'opération est multiplicative (signe ×, ou pas de signe) le neutre est noté 1 ou 1_E, le symétrique de a est dit inverse de a, on le note a^{-1} ou $\frac{1}{a}$. $a \times a^{-1} = 1_E$

♦ Propriétés possibles associées à ***deux lois internes***.

☐ On symbolise les deux lois par les deux signes * et T.

● Distributivité de T par rapport à * : lorsqu'on a pour tous a, b, c de E,

G 1. $a\,T\,(b * c) = (a\,T\,b) * (a\,T\,c)$

D 2. $(b * c)\,T\,a = (b\,T\,a) * (c\,T\,a)$

• Si l'on a seulement la 1ère relation, on dit que T est distributive à gauche (dans l'autre cas, à droite).

6° - GROUPES. ANNEAUX. CORPS.

☐ On considère une loi (interne) dans E, ou deux lois,..., symbolisées par *, T,..., et l'on abrège les schémas correspondants en (E, *), (E, T), (E, *, T),... (Magmas)

☐ On dit que l'ensemble E a une certaine structure, lorsque la ou les lois correspondantes possèdent certaines propriétés.

♦ ***Structures de groupe.***

☐ Il s'agit d'un ensemble et d'une loi, soit (E, *).

♦ (E, *) est un groupe lorsque :

(E, *) $\ne$ * c exc

groupe (E, *, 0_E)
Anneau (E, *, T, 0_E)
Corps (E, *, T, 0_E, 1_E)

1. * est interne.
2. * est associative.
3. un élément neutre existe dans (E, *). 0_E
4. un symétrique existe pour tout élément, dans (E, *).

● (E, *) est un groupe abélien lorsqu'il est un groupe avec * commutative.

★ Si l'on sait "* commutative", il suffit d'avoir un neutre à droite ou les symétriques à droite (par exemple), pour être assuré qu'ils sont neutres ou symétriques "tout court".

♦ ***Structures d'anneau, structures de corps.***

☐ Il s'agit d'un ensemble et de deux lois, soit (E, *, T) (l'ordre des lois intervient).

♦ (E, *, T) est un anneau lorsque

• (E, *) est un groupe abélien.
• T est interne et associative.
• T est distributive par rapport à *.

● (E, *, T) est un anneau commutatif lorsqu'il est un anneau, avec T "aussi" commutative.

● (E, *, T) est un anneau unitaire lorsqu'il est un anneau, avec "aussi" un neutre dans (E, T). unité 1_E

♦ (E, *, T) est un corps lorsque

• (E, *, T) est un anneau unitaire.
• Tout élément, sauf le neutre dans (E, *), possède un symétrique dans (E, T).

● (E, *, T) est un corps commutatif lorsqu'il est un corps, avec T "aussi" commutative.

◊ Zéro ; unité.

• Pour (E, *, T), s'il existe le neutre dans (E, *), on appelle cet élément le zéro, on le note 0 ou 0_E.

• De même, s'il existe le neutre dans (E, T), on appelle cet élément l'unité, on le note 1 ou 1_E.

◊ Diviseurs de zéro.

• Dans (E, *, T) contenant le zéro 0_E, si deux éléments (distincts ou égaux) vérifient

$$a \neq 0_E,\ b \neq 0_E \quad \text{et} \quad a\,T\,b = 0_E$$

on dit qu'ils sont diviseurs de zéro.

◊ Intégrité.

• Dans (E, *, T), s'il y a des diviseurs de zéro, on dit que (E, *, T) n'est pas intègre.

• Un corps est nécessairement intègre, donc dans un corps (E, *, T) : $a\,T\,b = 0 \Rightarrow [a = 0 \text{ ou } b = 0]$.

7° - « MORPHISMES ». IMPORTANT !

☐ Le mot morphisme est en réalité muni de certains préfixes assez significatifs (homo-, endo-, iso-, auto-,...). E×E→E F×F→F

fondamental

♦ **Homomorphisme.**

• On considère une application f : $\left|\begin{array}{l} (E, *) \longrightarrow (F, T) \\ \quad x \longrightarrow f(x) \end{array}\right.$

♦ f est un homomorphisme lorsque

$$\forall (x, x') \in E^2 \ : \ \underbrace{f(x * x')}_{\text{dans E}} = \underbrace{f(x)\,T\,f(x')}_{\text{dans F}}$$

☐ On peut dire que f "transpose" la loi * de E en la loi T de F.

☆ Exemple. On prend (E, *) = (ℤ, +) et l'on considère l'ensemble F des nombres de type 5^n (où $n \in \mathbb{Z}$) muni de la multiplication habituelle, soit (F, ×).

• Soit f : $\left|\begin{array}{l} (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (F, \times) \\ \quad n \longrightarrow f(n) = 5^n \end{array}\right.$

• f est un homomorphisme.

• Preuve succincte : $f(n + n') = 5^{n+n'}$ donc $f(n + n') = 5^n \times 5^{n'}$; or $5^n = f(n)$, $5^{n'} = f(n')$, donc $f(n + n') = f(n) \times f(n')$.

★ ***Endomorphisme*** : cas particulier d'homomorphisme, pour F = E, et éventuellement T et * identiques.

☐ Une même application f peut être "plusieurs fois" homomorphisme ou endomorphisme, s'il y a plusieurs opérations dans E et dans F.

♦ ***Isomorphisme.***

• On considère un homomorphisme f, relatif aux ensembles E et F.

• Si f est aussi une bijection, on l'appelle isomorphisme.

★ ***Automorphisme*** : cas particulier d'isomorphisme, pour F = E, (mais pas nécessairement "* = T").

☐ Le plus souvent, on étudie des homomorphismes (ou des isomorphismes) entre deux groupes, deux anneaux, etc... On doit alors faire correspondre les lois respectives "chacune à chacune".

$(E, *, T) \longrightarrow (F, *, \ldots)$

8° - ESPACES VECTORIELS.

☐ Un ensemble E peut être muni de deux lois, l'une interne de type additif et symbolisée par +, l'autre externe à l'aide d'un corps.

☐ Le corps utilisé, désigné par 𝕂, est appelé corps des scalaires ; en pratique il s'agit de ℝ ou ℂ, et l'on ne met aucun symbole pour la loi externe.

☐ Les éléments de E sont désignés par $\vec{u}$, $\vec{v}$, ..., on les nomme vecteurs, les scalaires de 𝕂 sont notés λ, μ, ..., on évite ainsi les confusions.

(E, +, 0_E)
($\mathbb{K}$, +, ×, 0_K, 1_K)   E(+) $\mathbb{K}$(+, ×)

◆ **Définition.**

E est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$, ou un $\mathbb{K}$-espace vectoriel lorsqu'on a défini deux lois ayant les propriétés suivantes.

1. La loi (interne) + fait de (E, +), un groupe abélien.

2. La loi (externe) de produit par les scalaires $\left|\begin{array}{l}\mathbb{K}\times E \longrightarrow E\\ (\lambda, \vec{u}) \longrightarrow \lambda\vec{u}\end{array}\right.$ vérifie pour tous vecteurs et tous scalaires :

- $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$ où $(\lambda\mu)$ est un produit dans $\mathbb{K}$.
- $\lambda(\vec{u}+\vec{v}) = (\lambda\vec{u}) + (\lambda\vec{v})$ (distributivité).
- $(\lambda\vec{u}) + (\mu\vec{u}) = (\lambda+\mu)\vec{u}$ où $(\lambda+\mu)$ est une somme dans $\mathbb{K}$.
- $1\vec{u} = \vec{u}$ où 1 est l'unité dans $\mathbb{K}$. 1_K

□ L'élément nul de (E, +) est appelé vecteur nul, noté $\vec{0}$ ou $\vec{0}_E$.

☆ Exemples. On peut se reporter au chapitre 26. p 134

9° - ESPACES AFFINES.

□ Un ensemble $\mathscr{E}$ peut être muni d'une loi externe à l'aide d'un espace vectoriel E (d'éléments $\vec{u}, \vec{v}, \ldots$).

□ L'espace vectoriel utilisé est appelé espace vectoriel directeur de $\mathscr{E}$, et l'on note additivement la loi externe (symbole +).

□ Les éléments de $\mathscr{E}$ sont désignés par M, P, Q,..., on les nomme points.

◆ **Définition.**

$\mathscr{E}$ est un espace affine (d'espace vectoriel directeur E) lorsqu'on a défini une loi externe +, de schéma :

$$+\left|\begin{array}{l}E\times\mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}\\ (\vec{u}, M) \longrightarrow \boxed{M+\vec{u}} = +(\vec{u}, M)\end{array}\right.$$

point

vérifiant pour tous points et tous vecteurs :

1. $(M+\vec{u}) + \vec{v} = M + (\vec{u}+\vec{v})$ ou $(\vec{u}+\vec{v})$ est une somme dans E.
2. $M + \vec{0}_E = M$.
3. $\vec{0}_E$ est l'unique vecteur vérifiant $M + \vec{x} = M$, $\forall M \in \mathscr{E}$
4. Pour tout "bipoint (P, Q)" de $\mathscr{E}$, il existe un vecteur $\vec{u}$ de E tel que $Q = P + \vec{u}$.

★ Dans la propriété 4 : $\Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$!

Si P et Q sont fixés, $\vec{u}$ est unique.

□ Dans un espace affine $\mathscr{E}$, on peut écrire $Q = P + \vec{u}$ sous la forme $Q - P = \vec{u}$, et convenir d'écrire $\boxed{Q - P = \overrightarrow{PQ}}$.

Alors, on a : $Q = P + \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = \vec{u}$.

◊ **Propriétés (pour tous points M, P, Q).**

- $Q = P + \overrightarrow{PQ}$ • $\overrightarrow{MM} = \vec{0}_E$
- $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MQ} \Leftrightarrow P = Q$
- $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MQ}$ (relation de Chasles)

◊ **Propriétés (pour passer des vecteurs aux points)**

- A étant un point fixé, soit f : $\left|\begin{array}{l}E \longrightarrow \mathscr{E}\\ \vec{u} \longrightarrow A+\vec{u}\end{array}\right. = M = f(\vec{u})$
- f est une bijection, à tout vecteur $\vec{u}$ correspond un point M et un seul tel que $f(\vec{u})$ ou $A + \vec{u} = M$.
- Cette bijection "ramène les vecteurs à la même origine A".

□ On peut considérer l'espace affine $\mathscr{E}$ comme l'ensemble des extrémités des vecteurs de E, lorsque ces derniers sont "rapportés à la même origine A".

oui

Lire chapitres 26, 27, 28

Lu 2002
Nicolas !
LÉVY

CHAPITRE 2

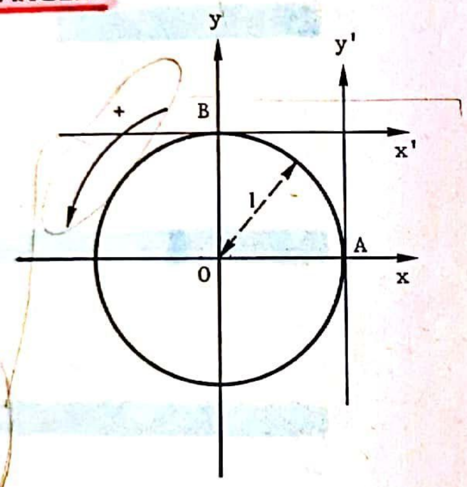
TRIGONOMETRIE PRATIQUE

1°- REPERE TRIGONOMETRIQUE. ANGLES

◆ Repère trigonométrique

Ce repère est constitué par :

1. Un repère orthonormé $(O, \vec{OA}, \vec{OB})$
2. Le cercle-unité (centre O, rayon 1).
3. Deux axes Bx', Ay' déduits de Ox, Oy par les translations de vecteurs $\vec{OB}, \vec{OA}$ respectivement.
4. Une orientation : celle où le sens positif est "contraire des aiguilles de montre" ; ce sens est dit direct.



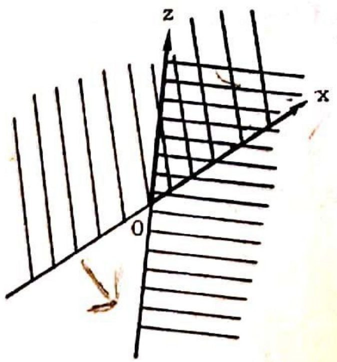
★ Remarques

- L'unité est la même pour tous les axes.
- Le périmètre du cercle-unité (cercle trigonométrique) est 2π.

☐ ***Angles:*** il existe plusieurs notions d'angles, ici l'on considère les intersections de 2 demi-plans, on les appelle angles de demi-axes.

☐ Le schéma montre l'angle $\widehat{\vec{Ox}, \vec{Oz}}$ des demi-axes Ox et Oz.

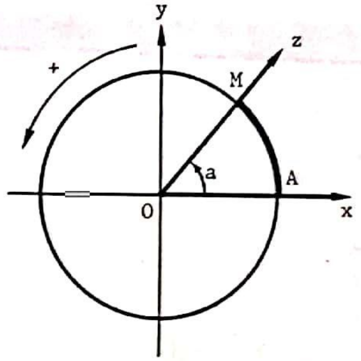
- l'ordre d'écriture des côtés, c'est-à-dire des demi-axes, intervient.



- Pour $\widehat{\vec{Ox}, \vec{Oz}}$, le côté initial ou côté origine est Ox, le côté extrémité est Oz.
- O est le sommet de l'angle.

☐ ***Mesures d'un angle***

- On place l'angle étudié dans un repère trigonométrique, le côté origine sur Ox, le sommet en O.
- L'autre côté coupe le cercle en un seul point M.
- On peut convenir d'aller de A à M dans le sens direct sur le cercle, alors la mesure de l'arc $\widehat{AM}$ est une valeur $a \in [0, 2\pi[$.



◆ a est une mesure de l'angle (mesure "principale").

- Ce même angle possède une infinité d'autres mesures, obtenues en allant de A à M (sur le cercle) dans un sens quelconque et en faisant autant de tours qu'on veut.
- Ces mesures sont de type $a + 2\pi$, $a - 2\pi$, $a + 4\pi$, $a - 4\pi$,...

◆ L'ensemble des mesures est donc $\{a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. $(a-b) = 2\pi \times k$

- La relation $\mathcal{R}$ définie (dans $\mathbb{R}$) par :

  $a\mathcal{R}b$ signifie "a-b est multiple de 2π"

  est une relation d'équivalence.
- Pour a fixé, la classe de a est alors formée de tous les nombres b tels que $b = a + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, on l'appelle classe de a modulo 2π, c'est l'ensemble des mesures de l'angle étudié.

◆ On écrira "l'ensemble des mesures de $\widehat{\vec{Ox}, \vec{Oz}}$ est $\{a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$"

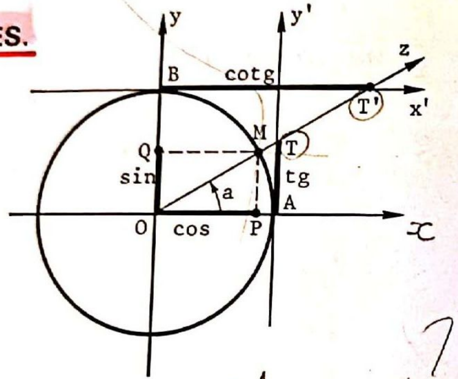
sous la forme commode : $\widehat{\vec{Ox}, \vec{Oz}} = a + 2k\pi$

ou aussi : $\widehat{\vec{Ox}, \vec{Oz}} = a \pmod{2\pi}$

☐ L'unité de mesure est le radian, tel qu'un tour direct sur le cercle mesure 2π rad, un demi-tour direct mesure π rad, etc...

• On passe des degrés ou des grades aux radians par proportionnalité, à l'aide des correspondances : π rad $\longleftrightarrow 180° \longleftrightarrow 200$ gr.

2° - LIGNES TRIGONOMETRIQUES.



☐ L'angle $\widehat{\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oz}}$ est placé dans le repère :
le demi-axe Oz coupe le cercle en M,
la droite Oz coupe l'axe Ay' en T et l'axe Bx' en T'.

≠ $(\overline{OP})$ OP !!

♦ Définitions.

Si a est une mesure de $\widehat{\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oz}}$:

$\cos a = \overline{OP}$ (abscisse de M) P est l'abscisse de M

$\sin a = \overline{OQ}$ (ordonnée de M) P est pas l'abscisse de M !!

$\overline{OP} = P$!

◊ $\operatorname{tg} a = \overline{AT}$ (mesurée sur l'axe Ay')

◊ $\operatorname{cotg} a = \overline{BT'}$ (mesurée sur l'axe Bx') $= \frac{1}{\operatorname{tg} a}$ ou

☐ à tout angle de mesure $a + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), on associe donc 4 lignes trigonométriques : cos a, sin a, tg a, cotg a.

♦ Relations fondamentales.

• $\boxed{\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}}$ et $\operatorname{cotg} a = \frac{1}{\operatorname{tg} a}$ ou $\frac{\cos a}{\sin a}$

$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, $\forall a \in \mathbb{R}$ théorème de pythagore

☐ Toute autre relation entre lignes trigonométriques de a découle des précédentes.

☆ Exemples

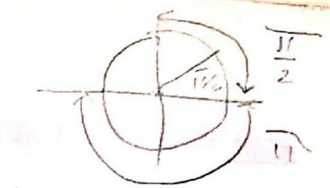
• $\cos^2 a = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 a}$ • $1 + \operatorname{tg}^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$

• $\sin^2 a = \frac{\operatorname{tg}^2 a}{1 + \operatorname{tg}^2 a}$ • $1 + \operatorname{cotg}^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}$

♦ Inégalités fondamentales

$-1 \leqslant \cos a \leqslant +1$ et $-1 \leqslant \sin a \leqslant +1$

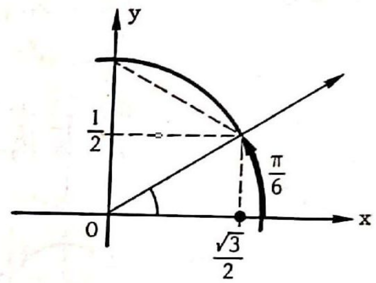
$\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}$

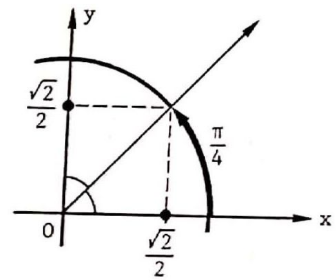


♦ Valeurs usuelles

☐ Il suffit de retenir les valeurs des sinus et cosinus, car tangentes et cotangentes s'en déduisent immédiatement.

☐ On retrouve les valeurs à l'aide de figures.





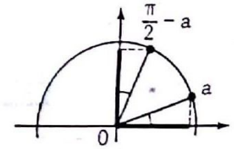
• $0 \pmod{2\pi}$: $\sin 0 = 0$ $\cos 0 = 1$

• $\frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$: $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

• $\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$: $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

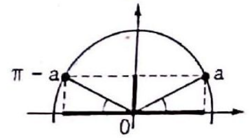
★ Autres valeurs

• $(\frac{\pi}{2} - a)$ et a



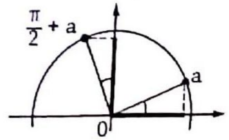
$\cos(\frac{\pi}{2} - a) = \sin a$ $\sin(\frac{\pi}{2} - a) = \cos a$

• $(\pi - a)$ et a



$\cos(\pi - a) = -\cos a$ $\sin(\pi - a) = \sin a$

• $(\frac{\pi}{2} + a)$ et a



$\cos(\frac{\pi}{2} + a) = -\sin a$ $\sin(\frac{\pi}{2} + a) = \cos a$

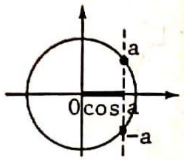
• De même (à l'aide de figures), on retrouve les relations pour $(-a)$ et a, $(\pi + a)$ et a, $(a - \frac{\pi}{2})$ et a, ...

3° - EQUATIONS ET FONCTIONS.

♦ On retrouve les solutions à l'aide de figures.

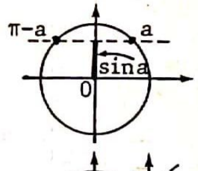
$\cos x = \cos a$ (a donné)

solutions $\begin{cases} x = a \pmod{2\pi} \\ \text{ou } x = -a \pmod{2\pi} \end{cases}$



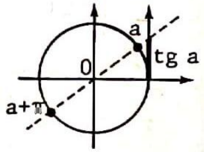
$\sin x = \sin a$ (a donné)

solutions $\begin{cases} x = a \pmod{2\pi} \\ \text{ou } x = \pi - a \pmod{2\pi} \end{cases}$



$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$ (a donné)

solutions $x = a \pmod{\pi}$



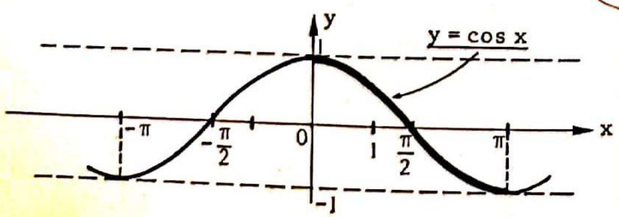
Les deux classes modulo 2π constituant les solutions sont celles de a et de $a+\pi$, leur réunion est la classe de a modulo π, c'est-à-dire $\{a + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

♦ ***Fonctions trigonométriques***

On retrouve les variations des lignes trigonométriques à l'aide de figures. Ces variations se répètent périodiquement, les fonctions trigonométriques sont périodiques.

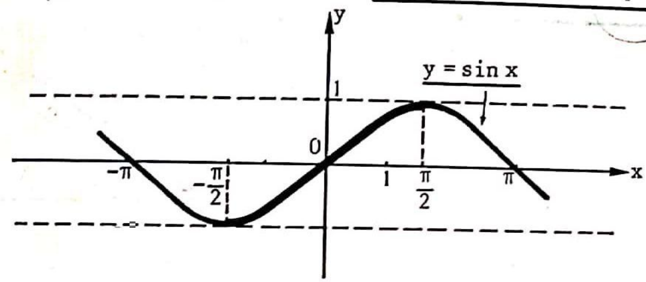
◊ cos : $\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow \cos x \end{array}$

La fonction cosinus est 2π-périodique et paire.



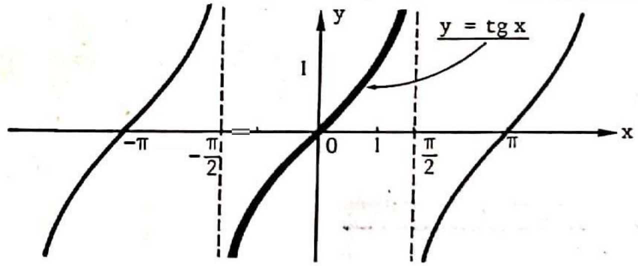
◊ sin : $\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow \sin x \end{array}$

La fonction sinus est 2π-périodique et impaire.



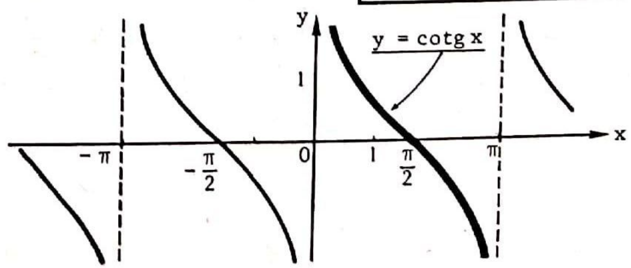
◊ tg : $\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow \operatorname{tg} x \end{array}$

La fonction tangente est π-périodique, impaire, non définie pour $x = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$



◊ cotg : $\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow \operatorname{cotg} x \end{array}$

La fonction cotangente est π-périodique, impaire, non définie pour $x = 0 \pmod{\pi}$

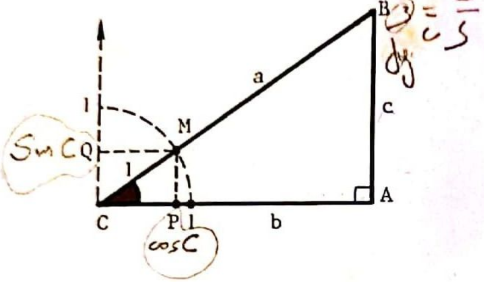


Soh cah toa

① $\sin C = \frac{c}{a}$ ② $\cos B = \frac{b}{a}$ ③ $= \frac{c}{b}$

4° - TRIANGLES RECTANGLES. PROJECTIONS.

◆ Triangles rectangles.



☐ En plaçant le triangle ABC (rectangle en A) dans un repère trigonométrique, on met en évidence (par exemple) $\cos C = CP$ ou QM, et de même $\sin C = CQ$ ou PM (tous positifs).

☐ A l'aide des triangles semblables ABC, PMC ou QCM, on trouve les relations trigonométriques des triangles rectangles :

Soh

◊ Un côté est le produit de l'hypoténuse par le sinus de l'angle opposé : $c = a \sin C$. $\sin C = \frac{c}{a}$

Cah

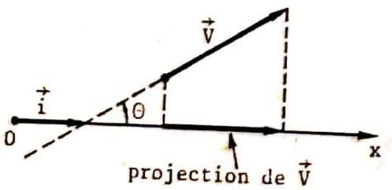
◊ Un côté est le produit de l'hypoténuse par le cosinus de l'angle adjacent : $c = a \cos B$. $\cos B = \frac{c}{a}$

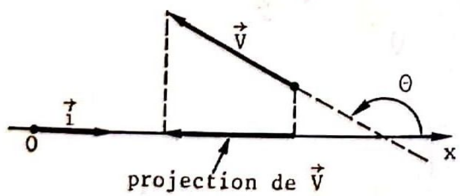
Toa

◊ De même : $c = b \operatorname{tg} C$ $\quad c = b \operatorname{cotg} B$.

◆ ***Théorème des projections***

☐ On généralise la relation $c = a \cos B$ précédente, à l'aide des schémas suivants :





Théorème : la mesure algébrique de la projection de $\vec{V}$ sur un axe Ox est égale au produit $\|\vec{V}\| \times \cos \Theta$, où Θ est une mesure de l'angle $\widehat{\vec{Ox}, \vec{V}}$.

★ Remarque : en base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, si $\vec{v} = (X, Y)$ et $\vec{v}' = (X', Y')$, on sait que le produit scalaire (euclidien) est défini par : $\vec{v} \cdot \vec{v}' = XX' + YY'$, et la norme par :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad \|\vec{v}'\| = \sqrt{\vec{v}' \cdot \vec{v}'} = \sqrt{X'^2 + Y'^2}$$

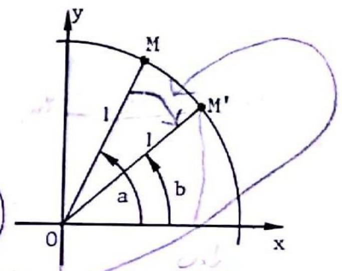
• On a alors : $\vec{v} \cdot \vec{v}' = \|\vec{v}\| \times \|\vec{v}'\| \times \cos(\widehat{\vec{v}, \vec{v}'})$

Le théorème des projections s'exprime par :

$$X = \vec{v} \cdot \vec{i} \quad \text{ou par} \quad Y = \vec{v} \cdot \vec{j}$$

5° - FORMULES DIVERSES.

◆ Sommes ou différences d'angles



☐ On retrouve la formule de $\cos(a-b)$ à l'aide du produit scalaire $\vec{OM} \cdot \vec{OM'}$ exprimé de 2 manières. a > b

1 • composantes : $\vec{OM} = \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix}$, $\vec{OM'} = \begin{pmatrix} \cos b \\ \sin b \end{pmatrix}$

d'où $\vec{OM} \cdot \vec{OM'} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

2 • normes et cos : $\|\vec{OM}\| = \|\vec{OM'}\| = 1$, $\widehat{\vec{OM}, \vec{OM'}} = a - b$ ou $b - a \pmod{2\pi}$

d'où $\vec{OM} \cdot \vec{OM'} = \cos(a-b) = \cos(b-a)$, d'où la formule suivante :

◆ Formule essentielle

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

◊ En remplaçant b par $-b$, ou par $\frac{\pi}{2} - b, \ldots$, on obtient :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

◊ En partant de $\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$, etc..., on obtient :

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} \qquad \operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

Double ou triple d'un angle

En posant $b = a$ dans certaines formules précédentes, on obtient :

$$\left[\begin{array}{l} \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \\ \sin 2a = 2 \sin a \cos a \\ \operatorname{tg} 2a = \dfrac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} \end{array}\right.$$

- On a aussi : $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ ou $1 - 2\sin^2 a$
- $\cos 3a = \cos(2a + a)$, on développe facilement ; de même pour $\sin 3a$ et $\operatorname{tg} 3a$.

Formules en $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$

On pose $\operatorname{tg}\frac{a}{2} = t$, après avoir changé a en $\frac{a}{2}$ (ou $2a$ en a) dans la formule de $\operatorname{tg} 2a$, de même avec $\sin 2a$ et $\cos 2a$, et il vient :

$$\left[\begin{array}{l} \sin a = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos a = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}\right. \qquad \operatorname{tg} a = \frac{2t}{1-t^2}$$

Sommes de sinus, etc...

Calculant $\cos(a+b) + \cos(a-b)$, on trouve $2\cos a \cos b$; le changement de notations $a+b = p$, $a-b = q$ donne $\cos p + \cos q$; de même pour les autres formules.

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \quad 3 \quad Co \to Co$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos p - \cos q = -2 \sin\dfrac{p+q}{2} \sin\dfrac{p-q}{2} \quad -4 \quad -Sin \to S \\ \sin p + \sin q = 2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2} \quad 1 \quad Si \to C \\ \sin p - \sin q = 2\sin\dfrac{p-q}{2}\cos\dfrac{p+q}{2} \quad 2 \end{array}\right.$$

$$= 2\cos\frac{p+q}{2} \sin\frac{p-q}{2} \quad Co \to S$$

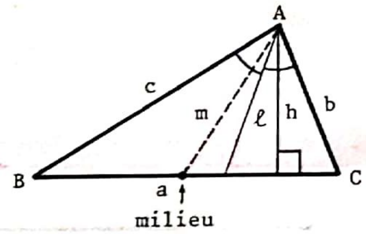
Formules des triangles quelconques

Notations : Angles A, B, C ; côtés opposés a, b, c.

Rayons de cercles :
- circonscrit : R
- inscrit : r
- ex-inscrit dans $\hat{A}$: r'

Segments : issus de A : hauteur h, médiane m, bissectrice ℓ

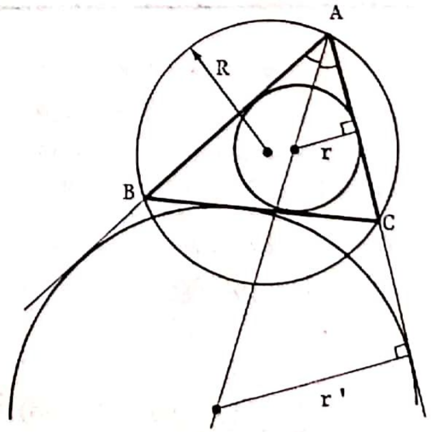
Surface S, périmètre 2p $\left(p = \dfrac{a+b+c}{2}\right)$



- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ (et permutations circulaires des lettres)
- $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$
- $S = \dfrac{1}{2} bc \sin A$ (et permutations circulaires des lettres)
- $\operatorname{tg}\dfrac{A}{2} = \dfrac{r}{p-a} = \dfrac{r'}{p}$
- $\ell = \dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{A}{2}$

On a aussi : $S = \dfrac{1}{2} ah = \dfrac{abc}{4R} = pr = (p-a)r' = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

et : $b^2 + c^2 = \dfrac{a^2}{2} + 2m^2$ (théorème de la médiane)



CHAPITRE 3

ℕ - DENOMBREMENTS

1° - ℕ ET LES STRUCTURES.

♦ ℕ est l'ensemble des ***entiers naturels***.

☐ On peut écrire $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ et on écrit $\mathbb{N}^*$ pour désigner "ℕ privé de 0".

- $(\mathbb{N}, \leqslant)$ est ***totalement ordonné***.
- L'addition (ou la multiplication) ne donne ***pas de structure*** intéressante dans ℕ.
- Une classification usuelle dans ℕ répartit les nombres en pairs ou impairs, de modèles respectifs $2n$ ou $2n + 1$.

2° - RECURRENCES.

☐ Une propriété "générale" dépendant d'un entier (c'est-à-dire d'un rang, ou d'un numéro d'ordre) peut être symbolisée par $P(n)$.

♦ La démonstration par récurrence de $P(n)$ se schématise en 3 points.

1. Vérifier (ou démontrer) $P(1)$, ou $P(0)$ suivant les cas.
2. Poser l'hypothèse qui traduit $P(n - 1)$, en déduire $P(n)$ (par une démonstration convenable).
3. Conclure : par récurrence, la propriété est vraie, (en précisant si $n \in \mathbb{N}^*$, ou si $n \in \mathbb{N}$, ...).

☐ Au 3ème point, on sous-entend la démarche logique suivante :

- Le point 2 établit le "théorème" : $P(n - 1) \Rightarrow P(n)$.
- Or, le point 1 établit $P(1)$, donc : $P(1) \Rightarrow P(2)$, ce qui prouve $P(2)$.
- De même, on établit alors $P(3)$, puis $P(4)$, ...

☆ Exemple : $P(n)$ étant $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

démontrer $P(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, par récurrence.

1. $P(1)$ s'écrit $1 = \frac{1(1+1)}{2}$, elle est vérifiée.
2. L'hypothèse $P(n - 1)$ s'écrit : $1 + 2 + \dots + (n - 1) = \frac{(n-1)n}{2}$.
   Pour en déduire $P(n)$, ajoutons n aux deux membres, d'où : $1 + 2 + \dots + (n - 1) + n = \frac{(n-1)n}{2} + n$.
   - Or, $\frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{n^2-n+2n}{2}$, ce qui donne $\frac{n(n+1)}{2}$.
   - Donc $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, on a déduit $P(n)$.
3. Par récurrence, la propriété est démontrée pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

3° - INDICES. FACTORIELLES.

☐ Les ***indices*** sont des "numéros" grâce auxquels on peut désigner commodément les éléments d'un ensemble.

☆ Exemple : si $E = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\}$, on peut désigner un élément quelconque de E par u_i.

- On dit "u indice i".
- On dit que les éléments de E sont indexés (ou indicés).
- On peut écrire $E = \{u_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$, ou $E = \{u_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$

☐ En pratique, on utilise la notation indicielle pour "concentrer" une formule longue (ou possédant un nombre non précisé de termes).

☆ Exemple des sommes.

$u_1 + u_2 + \dots + u_n$ s'écrit $\sum_{i=1}^{i=n} (u_i)$, ou $\sum_1^n (u_i)$

☆ Exemple des produits

$u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$ s'écrit $\prod_{i=1}^{i=n} (u_i)$, ou $\prod_1^n (u_i)$

★ Cas particulier : ***factorielles***

$1 \times 2 \times \dots \times n$ s'écrirait $\prod_{i=1}^{i=n} (i)$, on l'écrit $n!$

- On calcule : $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120, \ldots$

☐ Convention : $0! = 1$

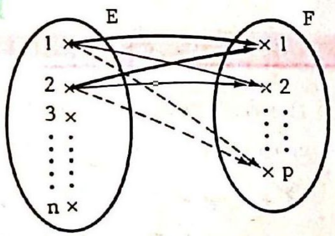
4° - DENOMBREMENTS.

☐ Dénombrer signifie compter.

☐ Il n'est pas toujours commode de compter "un par un", on a créé la "science des dénombrements" ou analyse combinatoire, dont les résultats élémentaires sont les suivants.

♦ *Nombre d'applications possibles de E dans F.*

Si card E = n et card F = p
il y a p^n applications $E \longrightarrow F$.



Preuve succincte : soit un élément de E, on peut l'appliquer sur un élément de F de p manières : ceci est vrai pour chaque élément de E, le nombre cherché est donc $\underbrace{p \times p \times \cdots \times p}_{n \text{ termes}} = p^n$.

♦ *Nombre de bijections possibles de E sur lui-même*

☐ Effectuer une bijection de E sur E revient à permuter ses éléments, ou à changer l'ordre des éléments.

☐ Si card E = n, tout revient à appliquer $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ sur E, et à compter le nombre de manières de le faire.

Dans ce cas, tout revient à compter les "numérotages" possibles des éléments de E, ou encore les permutations de E.

- Le nombre de permutations des n éléments de E, (ou le nombre des bijections de E sur E) se note P_n.

$$P_n = n!$$

Preuve succincte : le N° 1 peut être attribué de n manières à un élément de E. Lorsqu'il est attribué, il reste $(n-1)$ éléments à numéroter, donc $(n-1)$ manières d'attribuer le N° 2. Déjà on a $n \times (n-1)$ manières d'attribuer les N^os 1, 2. En continuant on obtient $n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$ manières, c'est-à-dire $P_n = n!$

♦ *Nombre d'injections possibles de $\{1, 2, \ldots, p\}$ dans E.*

☐ On suppose : card E = n et $p \leqslant n$.

☐ Une injection de $\{1, 2, \ldots, p\}$ dans E s'appelle aussi un arrangement de p éléments "pris parmi les n".

- Le nombre d'arrangements de p éléments pris parmi n, (ou le nombre d'injections correspondantes) se note A_n^p.

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Preuve succincte : on commence comme pour P_n, mais on doit s'arrêter lorsque le N° p est attribué : ce N° pouvait être attribué à $n - (p-1)$ éléments, puisqu'on avait attribué les $(p-1)$ premiers numéros ; on obtient $n \times (n-1) \times \cdots \times [n-(p-1)]$, ou encore $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)$ manières ; cela peut s'écrire $\frac{n!}{(n-p)!}$.

★ Remarque : après un arrangement, les p éléments utilisés ont un N° d'ordre, ils constituent un sous-ensemble ordonné de E, mais on peut retrouver ces mêmes éléments dans un autre ordre, après un nouvel arrangement : on dit que l'ordre intervient.

♦ *Nombre de parties à p éléments d'un ensemble E.*

On suppose : card E = n et $p \leqslant n$.

Une partie de E (constituée de p éléments de E) s'obtient par une combinaison de p éléments "pris parmi n".

● Le nombre de combinaisons de p éléments pris parmi n, (ou le nombre de parties à p éléments) se note C_n^p et parfois $\binom{n}{p}$.

$$\boxed{C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$$

Preuve succincte : après tous les arrangements possibles de "p parmi n", on disposerait de A_n^p sous-ensembles ordonnés. Mais parmi eux, on retrouve p! sous-ensembles ayant les mêmes éléments, seul l'ordre n'en est pas le même (ces p! sous-ensembles ordonnés résultent des permutations de la partie correspondante) on a donc $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$, d'où le résultat.

★ Remarque : pour les combinaisons, on dit que l'ordre n'intervient pas.

□ Le lecteur est invité à se méfier de la locution courante des turfistes "combinaison gagnante".

- Si elle est "dans l'ordre", il s'agit d'un arrangement,
- Si elle est "dans le désordre", il s'agit de certains arrangements,
- En aucun cas il ne s'agit des combinaisons définies ci-dessus.

□ Exemples.

1. Dans une course où il y a 7 partants et où tous arrivent séparément, on peut prévoir le nombre de listes d'arrivée possibles des 7 partants,
   il s'agit de $P_7 = 7!$, soit 5 040
2. Dans les mêmes conditions qu'en 1, on peut prévoir le nombre de "tiercés dans l'ordre" possibles (listes ordonnées des 3 premiers arrivés),
   il s'agit de $A_7^3 = \frac{7!}{4!} = 5 \times 6 \times 7$, soit 210.
3. En admettant maintenant qu'il peut y avoir 3 ex-aequo pour la première place, on peut prévoir le nombre des "paquets de 3 ex-aequo" possibles (3 pris parmi 7, sans ordre),
   il s'agit de $C_7^3 = \frac{7!}{3!4!}$, soit 35.

□ Commentaire : dans l'exemple 2, il y aura 3! = 6 tiercés qui "rapporteront", dont 1 rapporte "dans l'ordre" et 5 "dans le désordre".

5° - AUTRES FORMULES. BINOME DE NEWTON.

◊ *Nombre total de parties de E.*

□ On suppose : card E = n.

● Le nombre de parties de E ($\emptyset$ et E compris) est

$$\boxed{\text{card } \mathscr{P}(E) = 2^n}$$

● D'où : $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^p + \dots + C_n^n = 2^n$.

Preuves succinctes :

- On peut dénombrer les parties en cherchant, pour chaque élément, s'il est ou non dans une partie : cela revient à appliquer E dans F = {oui, non} ; or card F = 2, dont il y a 2^n parties.
- On peut dire qu'il y a C_n^0 partie à 0 élément, C_n^1 parties à 1 élément, et ainsi de suite (jusqu'à la partie à n éléments : E), d'où le nombre des parties : $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$, d'où la 2ème formule.

◊ *Egalités pour les combinaisons.*

$$\boxed{C_n^p = C_n^{n-p}} \qquad \boxed{C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p}$$

Preuves succinctes : on peut évidemment faire les calculs, ou bien :

1. On peut considérer que chaque partie à p éléments (pris parmi n) correspond à la partie complémentaire (n − p éléments restants) il y a autant des unes que des autres, $C_n^p = C_n^{n-p}$.

2. On peut distinguer, dans les C_n^p parties à p éléments, celles qui contiennent un certain élément fixé noté a (il y en a donc C_{n-1}^{p-1}), ou celles qui ne contiennent pas a (il y en a donc C_{n-1}^{p}), d'où la seconde formule.

♦ Formule du binôme.

☐ On dit aussi : formule de Newton, binôme de Newton.

• Si $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tous nombres a, b (réels ou complexes)

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \dots + C_n^p a^{n-p}b^p + \dots + C_n^n b^n.$$

Preuve succincte : $(a+b)^n$ est constitué de n facteurs égaux à $(a+b)$, le terme $a^{n-p}b^p$ apparaît autant de fois qu'il y a de manières de tirer b de p de ces facteurs (ou a, de n-p des facteurs) ; d'où le coefficient C_n^p du terme général, d'où la formule.

★ Remarques.

• Si a = b = 1, on retrouve $2^n = \sum_{p=0}^{p=n} C_n^p$ (début de ce 5°).

• Changeant b en -b, c'est-à-dire en (-1)b, il vient :
$$(a-b)^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1}b + \dots + (-1)^p C_n^p a^{n-p}b^p + \dots + (-1)^n C_n^n b^n.$$

♦ Encore des formules !

● $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a^{n-p}b^{p-1} + \dots + b^{n-1})$

La preuve : en effectuant le second membre.

● Changeant b en -b, on doit distinguer selon la parité de n

• si n = 2k (n pair)
$$a^{2k} - b^{2k} = (a+b)(a^{2k-1} - a^{2k-2}b + \dots - b^{2k-1})$$
Dans le dernier facteur, alternance des signes, finir par -.

• Si n = 2k + 1 (n impair)
$$a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a+b)(a^{2k} - a^{2k-1}b + \dots + b^{2k})$$
Dans le dernier facteur, alternance des signes, finir par +.

★ Remarque : si a et b sont réels, il n'existe aucune formule générale relative à $a^{2k} + b^{2k}$ (il n'en est pas de même dans $\mathbb{C}$). A

● Si l'on change a en x, et b en 1 (depuis la formule du binôme jusqu'ici), on obtient des formules pour $(x+1)^n$, $(x-1)^n$, puis $x^n - 1$, enfin $x^{2k} - 1$ et $x^{2k+1} + 1$.

CHAPITRE 4

$\mathbb{Z}$ - DIVISEURS. MULTIPLES CONGRUENCES. NUMERATION

1° - $\mathbb{Z}$ ET LES STRUCTURES.

♦ $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des ***entiers relatifs.***

☐ On peut écrire $\mathbb{Z} = \{\ldots,-n,\ldots,-2,-1,0,1,\ldots,n,\ldots\}$.
- $(\mathbb{Z}, \leqslant)$ est ***totalement ordonné.***
- $\mathbb{N}$ est une partie de $\mathbb{Z}$, $\boxed{\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}.}$
- $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe abélien.
- $(\mathbb{Z}, \times)$ n'est pas un groupe.
- $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un ***anneau commutatif unitaire.***

☐ On dit : l'anneau $\mathbb{Z}$ au lieu de $(\mathbb{Z}, +, \times)$.

2° - DIVISION EUCLIDIENNE.

☐ On ne peut pas définir de division par 0, il est entendu dans tout le chapitre que les diviseurs sont non nuls.

♦ Définition : la division euclidienne (dans $\mathbb{Z}$) de a par b, est l'opération qui consiste à :

trouver q et r tels que :
$a = bq + r$ **et** $0 \leqslant r < \|b\|$

☐ Il est entendu qu'on a : $a\in\mathbb{Z}$, $b\in\mathbb{Z}^*$ $(b \neq 0)$, et l'on doit avoir : $q\in\mathbb{Z}$, $r\in\mathbb{N}$.

☐ a est le dividende, b le diviseur,
q le quotient, r le reste.

◊ Propriétés
- Lorsque (a, b) est donné, (q, r) est unique.
- Le quotient d'un nombre n par un produit (abc...) peut s'obtenir ainsi : diviser n par a, puis diviser le quotient obtenu par b, etc...

Le dernier quotient est le quotient cherché, (le dernier reste n'est pas le reste cherché, en général).

♦ Définition : a est divisible par b lorsque $\boxed{a = bq}$

☐ a = bq signifie : la division de a par b donne un reste nul.

☐ On dit indifféremment : a divisible par b, a multiple de b, b divise a, b diviseur de a.

◊ Propriétés
- Si un nombre divise chaque terme d'une somme, il divise la somme.
- Si un nombre divise a, il divise tout multiple de a.
- Un nombre est divisible par 2 si et seulement si son écriture décimale se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8 (on dit qu'il est pair).
- Un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme des chiffres (de son écriture décimale) est divisible par 3.
- Un nombre est divisible par 5 si et seulement si son écriture décimale se termine par 0 ou 5.

☐ Notation $p\mathbb{Z}$: l'ensemble des multiples de p où p est fixé $(p \neq 0)$, s'exprime par $\{kp,\ k\in\mathbb{Z}\}$ et se note $p\mathbb{Z}$.

★ $p\mathbb{Z}$ et les structures :
- $(p\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe (abélien) de $(\mathbb{Z}, +)$.
- $(p\mathbb{Z}, +, \times)$ est un sous-anneau (commutatif) de l'anneau $\mathbb{Z}$.
- Tout sous-groupe ou sous-anneau de $\mathbb{Z}$ est de type $p\mathbb{Z}$.

3° - NOMBRES PREMIERS.

☐ On considère seulement des éléments de $\mathbb{N}$, dans ce 3°, pour ne pas subir la gêne de signes + ou −.

◆ Définition : un entier naturel est premier, lorsque

$\boxed{p \geqslant 2 \text{ et les seuls diviseurs de } p \text{ sont } 1 \text{ et } p.}$

◇ Théorèmes

● Si $n \geqslant 2$ est non premier, il est multiple de nombres premiers.
Preuve succincte : n non premier, donc n possède un diviseur autre que 1 et n, soit p, et on a : $n = pq$. On peut toujours supposer que p est le plus petit diviseur autre que 1 et n, il est premier. Car si p non premier, p possède un diviseur qui n'est ni 1, ni p, ce diviseur diviserait n et serait plus petit que p : contradiction.

● L'ensemble des nombres premiers est infini.
Preuve succincte : si cet ensemble était fini, soient 2, 3, 5, ···, p ses éléments, où p serait le plus grand et dernier.
Le nombre $n = (2 \times 3 \times 5 \times \cdots \times p) + 1$, ou bien est premier, ou bien est divisible par un premier qui ne peut pas être 2, ni 3, ni 5, etc... ni p (le reste de la division est toujours 1).
Dans tous les cas, il existe donc un premier plus grand que p : contradiction.

◇ ***Reconnaître si p est premier*** : deux méthodes

1. Théorème de Wilson

$$\boxed{p \text{ premier} \Leftrightarrow p \text{ divise } (p-1)! + 1}$$

☐ Théorème peu pratique dès que p est "un peu grand".

2. Crible d'Eratosthène : on cherche le plus grand entier X tel que $X^2 \leqslant p$, on essaie les divisions de p par les nombres premiers 2, 3, 5, etc... jusqu'à celui X' qui est immédiatement inférieur à X. Si aucun reste n'est nul, p est premier.

☆ Exemple : 79 est premier.

- Le théorème de Wilson est impraticable.
- $X^2 \leqslant 79 \Rightarrow X < 9$, ici $X' = 7$, aucune division (par 2, 3, 5, 7) ne "tombe juste".

◇ Autres théorèmes

● Théorème de Fermat : si p premier ne divise pas a, alors p divise $a^{p-1} - 1$.

● Si p premier divise un produit, p divise au moins un facteur.

● L'ensemble des diviseurs d'un nombre est unique.

● Le cardinal de cet ensemble, ou le nombre de diviseurs d'un nombre n (1 et n compris) se calcule d'après la décomposition en facteurs premiers : $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$,

$$\boxed{\text{Le nombre de diviseurs est } (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\dots(\alpha_k + 1)}$$

☆ Exemple : $n = 540$ se décompose en $n = 2^2 \times 3^3 \times 5$.

- n possède autant de diviseurs qu'il y a de termes dans le développement de $(2^0 + 2^1 + 2^2)(3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3)(5^0 + 5^1)$ soit $(2+1)(3+1)(1+1)$; soit 24 (1 et 540 compris).

4° - PGCD ET NOTIONS ASSOCIEES.

◆ ***Plus grand commun diviseur.***

☐ Soient les entiers $a_1, a_2, \dots, a_n$. Le plus grand des diviseurs communs à ces nombres est noté $\text{pgcd}(a_1, a_2, \dots, a_n)$, il est au moins égal à 1 (donc positif).

● Définition : $\text{pgcd}(a_1, a_2, \dots, a_n) = d$, lorsque

$\boxed{d \text{ divise chaque } a_i \text{ et } d \text{ est le plus grand possible}}$

☐ Lorsque $d = 1$, on dit que les nombres sont ***premiers entre eux***

☐ Lorsque d = 1 et que chaque pgcd(a_i, a_j) est 1, on dit que les nombres sont ***premiers entre eux deux à deux***

★ Des nombres premiers entre eux deux à deux sont premiers entre eux, la réciproque n'est pas vraie.

☆ Exemples :

- 14, 25, 39 sont premiers entre eux deux à deux, donc premiers entre eux.
- 30, 18, 25 sont premiers entre eux, mais non deux à deux.

☐ Si pgcd(a, b) = 1, on dit aussi : a est premier avec b (ou b premier avec a).

★ Application pgcd : $\left|\begin{array}{l} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \text{ (ou } \mathbb{N}^*) \\ (a, b) \longrightarrow \text{pgcd}(a, b) \end{array}\right.$

- Cette application est une loi interne sur $\mathbb{Z}$, commutative, associative.

☐ L'associativité permet de se borner au pcgd de 2 nombres, en pratique pour 2 nombres positifs.

◊ ***Trouver pgcd (a, b)*** : deux méthodes (a et b positifs).

1. Facteurs premiers communs, d'après l'exemple suivant.
$825 = 3 \times 5^2 \times 11$, $2625 = 3 \times 5^3 \times 7$, le pgcd est $3 \times 5^2 = 75$.
Ne pas oublier que 1 est sous-entendu dans les décompositions.

2. Algorithme d'Euclide (divisions successives).
   - Soit a le plus grand des nombres a et b, on divise a par b, d'où $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < b$.
   - Si pgcd(a, b) = d, nécessairement d = pgcd(b, r) car d divise a c'est-à-dire $bq + r$, d divise bq donc d divise r, d est donc diviseur commun à b et r.
   - On recommence pour b et r : $b = rq' + r'$, $0 \leqslant r' < r$, et nécessairement d = pgcd(r, r') ; en continuant les restes successifs décroissent : pgcd(a, b) est le dernier reste non nul.

- pgcd(825, 2625) = 75 se retrouve ainsi très rapidement,
$2625 = \underline{825} \times 3 + \underline{150}$, $825 = \underline{150} \times 5 + \underline{75}$, $150 = 75 \times 2 + \underline{0}$,
d'où le dernier reste non nul : 75.

★ Remarques

- pgcd(ka, kb) = k × pgcd(a, b).
- $\text{pgcd}(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}) = \frac{\text{pgcd}(a, b)}{k}$ (lorsque k divise a et b).
- $\text{pgcd}(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$ (si d est le pgcd de a et b).
- les quotients de n nombres par leur pgcd sont premiers entre eux.

5° - PPCM ET THEOREMES DIVERS.

♦ *Plus petit commun multiple.*

☐ Soient les entiers non nuls $a_1, a_2, \ldots, a_n$, le plus petit des multiples positifs communs à ces nombres est noté ppcm($a_1, a_2, \ldots, a_n$).

● Définition : ppcm($a_1, a_2, \ldots, a_n$) = m, lorsque

| m est multiple de chaque a_i et
| m est le plus petit positif possible.

★ Application ppcm : $\left|\begin{array}{l} \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^* \longrightarrow \mathbb{Z}^* \text{ (ou } \mathbb{N}^*) \\ (a, b) \longrightarrow \text{ppcm}(a, b) \end{array}\right.$

- Cette application est une loi interne sur $\mathbb{Z}^*$, commutative, associative.

☐ L'associativité permet de se borner au ppcm de 2 nombres, en pratique pour 2 nombres positifs.

◊ ***Trouver ppcm (a, b) :***

- Dans les décompositions en facteurs premiers de a et b, on prend chacun des facteurs premiers, avec le plus grand exposant écrit.

☆ Exemple : $825 = 3 \times 5^2 \times 11$, $2625 = 3 \times 5^3 \times 7$, le ppcm est $3 \times 5^3 \times 7 \times 11$, d'où ppcm(825, 2625) = 28875.

★ Remarque : comme pour pgcd, on a : $\text{ppcm}(ka, kb) = k \times \text{ppcm}(a, b)$ et $\text{ppcm}(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}) = \frac{\text{ppcm}(a, b)}{k}$.

◆ ***Cinq théorèmes.***

● Si $\text{ppcm}(a, b) = m$, $\frac{m}{a}$ et $\frac{m}{b}$ sont premiers entre eux, ou $\text{pgcd}(\frac{m}{a}, \frac{m}{b}) = 1$.

● Le produit de a et b (positifs) est égal à celui de leurs ppcm et pgcd. $ab = md$

● Théorème de Bézout

a et b premiers entre eux, ou pgcd (a, b) = 1, si et seulement si l'on peut trouver u et v dans $\mathbb{Z}$, tels que $ua + vb = 1$.

Preuve succincte et recherche de u et v.

1. Si l'on a u et v tels que $ua + vb = 1$, tout diviseur commun de a et b divise a donc (ua), divise b donc (vb), divise la somme donc divise 1 : seul 1 convient, d'où pgcd(a, b) = 1.

2. Si pgcd(a, b) = 1 (a et b positifs), supposons $a > b$, la division de a par b devient : $a - bq = r$ avec $r \neq 0$. Si $r = 1$, c'est terminé, puisque $1a + (-q)b = 1$. Sinon, $r \geq 2$ et $r < b$, on divise b par r : $b = rq' + r'$, on voit que $r' = 0$ est impossible, (on aurait $b = rq'$, d'où $a = rq'q + r$, $\text{pgcd}(a, b) = r \geq 2$).

• Si $r' = 1$, c'est terminé, puisque $a - bq = r$ et $b - rq' = 1$, d'où en éliminant r : $(-q')a + (1 + qq')b = 1$.

• Sinon, $r' \geq 2$ et on continue les divisions successives, cela se termine car les restes décroissent, on en déduit u et v.

★ Le couple (u, v) n'est pas unique, $U = u + kb$ et $V = v - ka$ conviennent aussi ($\forall k \in \mathbb{Z}$).

● Théorème de Gauss

Si a divise bc, et si a ne divise pas b, alors a divise c.

Preuve succincte : a premier avec b signifie, par le théorème de Bézout, l'existence de u et v tels que $ua + vb = 1$; a divise bc signifie l'existence de q tel que $bc = aq$; on écrit $c = 1c = (ua + vb)c = a(uc) + v(bc)$, d'où $c = a(uc) + v(aq) = a(uc + vq)$, d'où c multiple de a.

● Soient les nombres $b_1, b_2, \ldots, b_n$

Si a est premier avec chaque b_i, alors a est premier avec leur produit

Preuve succincte : pour $n = 2$, on applique le théorème de Bezout, d'où $u_1a + v_1b_1 = 1$ et $u_2a + v_2b_2 = 1$, le produit membre à membre donne : $(u_1u_2a + u_1v_2b_2 + u_2v_1b_1)a + (v_1v_2)(b_1b_2) = 1$, de type $Ua + V.b_1b_2 = 1$; a est premier avec b_1b_2.

• Le lecteur achèvera la récurrence, les calculs sont semblables.

6° - CONGRUENCES MODULO p. ENSEMBLES $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

□ Dans $\mathbb{Z}$, les multiples d'un entier p fixé ($p \geq 2$) forment une partie de $\mathbb{Z}$ dont les éléments (ordonnés) "vont de p en p", comme on le voit d'après les tables de multiplication, ce qui conduit aux notions suivantes.

◆ Définition : l'entier p étant fixé, $p \geq 2$,

la congruence modulo p est la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie dans $\mathbb{Z}$ par : $a\mathcal{R}b$ signifie "$a - b$ est multiple de p".

□ Notation : $a\mathcal{R}b$ se note sous la forme $a \equiv b \pmod{p}$ et l'on dit : a et b sont congrus modulo p.

☆ Exemple pour $p = 2$: deux nombres pairs sont congrus (mod 2) puisque leur différence est paire (ou multiple de 2). De même pour deux nombres impairs (différence paire).

◇ ***Classes d'équivalence et ensemble-quotient (mod p)***

□ Supposons $a \equiv b \pmod{p}$, divisons a et b par p, on obtient :

$a = pq_1 + r_1$, $b = pq_2 + r_2$, d'où $a - b \equiv r_1 - r_2 \pmod{p}$.

Donc a congru à b (mod p) signifie $r_1 = r_2$.

☐ La classe d'équivalence de a (mod p), d'après le chapitre 1, est (ici) l'ensemble des nombres tels que b : ces nombres ont le même reste que a, lorsqu'on les divise par p.

☐ On trouve donc p classes (d'équivalence mod p), qui sont :

1. La classe "à reste nul", ou l'ensemble des multiples de p, on la note $\dot{0}$: $\dot{0} = \{\ldots,-kp,\ldots,-2p,-p,0,p,2p,\ldots,kp,\ldots\}$.
   On écrit, plus simplement : $\dot{0} = \{kp,\ k \in \mathbb{Z}\}$.
   Rappel : p est fixé.

2. La classe "à reste 1", ensemble des "multiples de p augmentés de 1", on la note $\dot{1}$: $\dot{1} = \{kp + 1,\ k \in \mathbb{Z}\}$

3. De même, les classes $\dot{2}$, ..., la dernière est $\widehat{p-1}$, puisque les restes des divisions par p vérifient $0 \leqslant r \leqslant p - 1$.

● L'ensemble des classes (mod p), d'après le chapitre 1, est l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$, noté dans ce cas $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

$$\boxed{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{\dot{0}, \dot{1}, \ldots, \widehat{p-1}\}} \text{ (entiers modulo p).}$$

☆ Exemple : $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\dot{0}, \dot{1}\}$, (ici $p = 2$),
où $\dot{0}$ est l'ensemble des nombres pairs, $\dot{0} = \{2k,\ k \in \mathbb{Z}\}$
et $\dot{1}$ est l'ensemble des impairs, $\dot{1} = \{2k + 1,\ k \in \mathbb{Z}\}$

◊ Z/p Z et les structures.

★ Les classes $\dot{0}, \dot{1}, \ldots, \widehat{p-1}$ sont des sous-ensembles de $\mathbb{Z}$, disjoints deux à deux, de réunion $\mathbb{Z}$, on dit qu'ils forment une partition de $\mathbb{Z}$.

♦ Opérations dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

1. Addition définie par $\dot{a} + \dot{b} = \widehat{a + b}$
2. Multiplication définie par $\dot{a} \times \dot{b} = \widehat{ab}$

◊ Muni de ces deux opérations (dans l'ordre 1-2) :

● $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un ***anneau commutatif unitaire***
et c'est un ***corps commutatif*** si p est premier.

● L'élément nul est $\dot{0}$, l'unité est $\dot{1}$.

☆ Exemples : on se borne à donner les tables d'addition et de multiplication.

1. $p = 3$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}\}$

+	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$
$\dot{1}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{0}$
$\dot{2}$	$\dot{2}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$

×	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$
$\dot{1}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$
$\dot{2}$	$\dot{0}$	$\dot{2}$	$\dot{1}$

Ayant confectionné ces tables, on vérifie "corps commutatif".

2. $p = 4$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}\}$

+	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$
$\dot{1}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{0}$
$\dot{2}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$
$\dot{3}$	$\dot{3}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$

×	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$
$\dot{1}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$
$\dot{2}$	$\dot{0}$	$\dot{2}$	$\dot{0}$	$\dot{2}$
$\dot{3}$	$\dot{0}$	$\dot{3}$	$\dot{2}$	$\dot{1}$

★ Remarques

1. $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est intègre (pas de diviseurs de $\dot{0}$)
2. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ n'est pas intègre : $\dot{2} \times \dot{2} = \dot{0}$, il existe des diviseurs de zéro, (voir chapitre 1).
3. On peut exprimer en termes de congruences, les théorèmes de :

• Fermat : si p est premier et si $a \in \mathbb{Z}^*$,

$\mathrm{pgcd}(p, a) = 1 \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$

• Wilson : si p est entier et si $p \geqslant 2$,

p premier $\Leftrightarrow (p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod p$

7° SYSTEMES DE NUMERATION.

☐ Idée générale : représenter les nombres entiers sous des formes aussi condensées que possible, et cependant commodes pour les opérations. Pour cela, on se donne un certain nombre de symboles et des règles d'écriture (ou une seule règle).

♦ L'ensemble des symboles et des règles d'écriture est le ***système de numération.***

Le nombre de symboles est la base du système.

♦ *Système décimal ou de base dix.*

• Les dix symboles sont : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (appelés chiffres).

• La base s'écrit grâce aux second et premier symboles côte-à-côte, soit 10 ; on la désigne par b, on écrit b = 10, on dit "b égale dix".

◊ Un entier n (naturel) se décompose d'une manière unique à l'aide de la base b, sous la forme :

$n = a_p b^p + a_{p-1} b^{p-1} + \dots + a_1 b + a_0$,

où les a_i sont des chiffres

• La règle d'écriture (décimale) est alors :

écrire côte-à-côte $a_p a_{p-1} \dots a_1 a_0$ (dans cet ordre)

☆ Exemple : quatre mille quatre vingt quinze se décompose en $4 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 5$, on l'écrit 4095 (en base dix).

☐ Dans les cas "litéraux", on se contente d'écrire

$n = \overline{a_p a_{p-1} \dots a_1 a_0}$ ou $[a_p a_{p-1} \dots a_1 a_0]$,

dans les cas "numériques", on a supprimé le surlignage ou les crochets.

★ Connaissant l'écriture d'un nombre et la base b, on reconstitue le nombre par la règle "inverse" de la règle d'écriture, par exemple 7 901 340 représente $n = 7 \cdot 10^6 + 9 \cdot 10^5 + 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10$ (on a tenu compte de : $0 \cdot 10^4 = 0$, $1 \cdot 10^3 = 10^3$; on a supprimé +0 à la fin).

♦ *Système binaire ou de base deux.*

• Les deux symboles sont : 0, 1.

• La base s'écrit b = 10 et se dit "b égale deux".

☐ Par habitude du système décimal, on peut admettre d'écrire 2 à la place de b, à condition formelle de ne pas employer 2 autrement.

◊ Un entier n (naturel) se décompose d'une manière unique à l'aide de la base b (ou 2) sous la forme :

$n = a_p b^p + a_{p-1} b^{p-1} + \dots + a_1 b + a_0$, où $a_i \in \{0, 1\}$.

• La règle d'écriture est la même qu'en système décimal.

☐ Exemple : cinquante et un se décompose en $2^5 + 2^4 + 2 + 1$, on l'écrit 11 00 11.

☐ Dans les cas littéraux, mêmes règles que dans le système décimal.

★ A partir de l'écriture binaire, on reconstitue le nombre, par exemple 10 11 00 représente $b^5 + b^3 + b^2$, donc trente deux, plus huit, plus quatre, soit quarante quatre (44 en décimal).

♦ Autres systèmes

● Les principes et les règles sont les mêmes que précédemment:

★ Pour traduire un nombre (écrit dans un système non-décimal) dans un autre système non-décimal, on a coutume de passer par l'intermédiaire du système décimal (comme "interprète").

☆ Exemple : si $n = 741$ en base huit (symboles 0,1,2,3,4,5,6,7), sa traduction en base cinq est $n = 3411$, d'après les calculs décimaux suivants : $n = 7 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 + 1 = 481$, $481 = 3 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5 + 1$.

CHAPITRE 5

$\mathbb{Q}$ - FRACTIONS. IDEE DE $\mathbb{R}$

1° - $\mathbb{Q}$ ET LES STRUCTURES.

♦ $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres ***rationnels***.

★ Un rationnel x est de type :

$$x = \frac{p}{q}, \text{ où } p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z}^*$$

◊ Règles opératoires dans $\mathbb{Q}$:

- Egalité : $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \Leftrightarrow pq' = qp'$
- Addition : $\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + qp'}{qq'}$
- Multiplication : $\frac{p}{q} \times \frac{p'}{q'} = \frac{pp'}{qq'}$

● Muni des opérations précédentes, $\mathbb{Q}$ est un ***corps commutatif***.

☐ Conventions et remarques

- L'élément général $\frac{p}{q}$ de $\mathbb{Q}$ est une fraction, p le numérateur, q le dénominateur (non-nul).
- Les fractions $\frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{-3}{-5}$ et généralement $\frac{3k}{5k}$ $(k \in \mathbb{Z}^*)$ représentent des rationnels égaux ($\frac{3}{5} = \frac{3k}{5k} \Leftrightarrow 15k = 15k$).
- On convient de représenter, chaque fois que c'est utile, un rationnel par une fraction irréductible à dénominateur positif.
- De même, les fractions de dénominateur 1 sont remplacées par leur numérateur : $\frac{42}{-21} = \frac{-2}{1}$ devient -2, (mais il est parfois utile de revenir à $\frac{-2}{1}$)

◊ Avec cette dernière convention, $\boxed{\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}}$

◊ ***Relation d'ordre.***

- On suppose les dénominateurs positifs, alors on définit la relation (d'ordre) $\leqslant$, par : $\boxed{\frac{p}{q} \leqslant \frac{p'}{q'} \Leftrightarrow pq' \leqslant qp'}$
- Dans ces conditions, $\mathbb{Q}$ est ***totalement ordonné***

2° - REGLES PRATIQUES DE CALCUL DANS $\mathbb{Q}$.

◆ Sommes : à l'aide de la réduction au même dénominateur.

◆ Produits : "face à face" (selon la définition : $\frac{p}{q} \times \frac{p'}{q'} = \frac{pp'}{qq'}$).

◆ Division : "multiplication par l'inverse",

(selon le modèle $\dfrac{\frac{p}{q}}{\frac{p'}{q'}} = \frac{p}{q} \times \frac{q'}{p'}$)

★ Puisque 0 n'a pas d'inverse dans un corps, il est impossible de diviser par 0 (ou de multiplier par $\frac{1}{0}$) dans $\mathbb{Q}$.

☐ Ecriture "avec décimales".

- Rien n'empêche d'effectuer, en cas de besoin, la division de p par q en la poursuivant "après la virgule".
- Lorsqu'elle "tombe juste", on dit que $\frac{p}{q}$ a une représentation décimale exacte.
- Sinon, on a une représentation décimale approchée, c'est-à-dire une valeur approchée de $\frac{p}{q}$, dès qu'on arrête la division (avec un reste non-nul).

3° - IDEE DE $\mathbb{R}$.

☐ Lorsque la division de p par q ne "tombe jamais juste", on prouve que la liste des chiffres finit par devenir périodique, c'est-à-dire que l'on retrouve des tranches successives identiques.

☆ Exemple. 114 : 7 = 16, 285 714 285 714 28. ... ...

☐ Cette propriété est caractéristique des éléments de $\mathbb{Q}$, si l'on considère le cas "tombe juste" comme particulier (les tranches suivantes sont des zéros, donc identiques).

★ Or, il est facile de créer une liste de décimales n'ayant pas cette propriété ; autrement dit, on peut créer une représentation d'un nombre non rationnel à partir d'un rationnel, par exemple en intercalant 7 entre 1ère et 2ème tranche, 77 entre 2ème et 3ème tranche, 777 entre 3ème et 4ème, et ainsi de suite, avec un 7 de plus à chaque nouvelle insertion, et ceci indéfiniment.

★ Donc, "il existe" d'autres nombres que les rationnels, mais la preuve rigoureuse n'a pas sa place dans ce livre.

En "rajoutant" ces nouveaux nombres à tous ceux déjà étudiés (entiers naturels ou relatifs, et nombres rationnels), on obtient un ensemble "complet", désigné par $\mathbb{R}$, tel que :

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}}$$

★ On peut créer des ensembles "encore plus vastes" que $\mathbb{R}$, en particulier $\mathbb{C}$ (chapitre 7) ; on a : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

4°) RAPPELS

☐ Soit $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ $(p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}^*)$.

- Puissance $n^{\text{ième}}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$: $\left(\frac{p}{q}\right)^n = \frac{p^n}{q^n}$.
- Racines paires : on ne peut écrire $\sqrt[2n]{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt[2n]{p}}{\sqrt[2n]{q}}$ que si : $\begin{cases} p \geqslant 0 \\ \text{et } q > 0 \end{cases}$
- Racines impaires : on peut toujours écrire $\sqrt[2n+1]{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt[2n+1]{p}}{\sqrt[2n+1]{q}}$ $(q \neq 0)$.
- Exposants négatifs : $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (convention) devient $\left(\frac{p}{q}\right)^{-n} = \left(\frac{q}{p}\right)^n$.

CHAPITRE 6

ℝ - VALEUR ABSOLUE. RACINE CARREE CALCULS APPROCHES

1° - ℝ ET LES STRUCTURES.

♦ ℝ est l'ensemble des nombres ***réels***.

◊ (ℝ, ⩽) est ***totalement ordonné***.

♦ (ℝ, +, ×) est un corps commutatif appelé le corps ℝ

□ L'ensemble ℝ peut être muni d'autres structures, amenant à dire "l'espace ℝ", et dans ce cas il peut s'agir d'un cas particulier d'espace vectoriel ou bien d'espace affine.

◊ Le corps ℝ est archimédien, ce qui signifie : pour tous réels a et b (tel que $b > 0$), il existe un entier n tel que $nb \geqslant a$.

★ Stabilité d'une loi interne : soit $(E, *)$ où $*$ désigne une loi interne, soit E' une partie de E ; on dit que E' est "stable pour $*$", lorsque cette loi est interne pour E', d'où la formule :

$$\text{(E' stable pour } *) \Leftrightarrow (a * b \in E', \quad \forall (a,b) \in E'^2)$$

☆ Exemples : ℕ, ℤ, ℚ sont des parties de ℝ, chacune est stable pour +, stable pour ×, mais ce ne sont pas les seules (l'ensemble des entiers pairs convient).

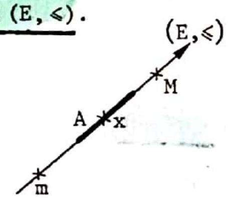
★ ℚ est dense dans ℝ : cette densité peut se traduire ainsi :

□ Entre deux réels distincts, "si proches soient-ils", il existe au moins un rationnel.

◊ On en déduit : entre deux rationnels distincts, il existe au moins un réel ; cette propriété permet l'encadrement numérique d'un réel "d'aussi près qu'on veut" par des rationnels ou des décimaux.

2° - MAJORANTS, MINORANTS, BORNES, INFINIS.

♦ Définitions : on considère un ensemble ordonné $(E, \leqslant)$.



(1) Une partie A de E est majorée par M, lorsque

$\forall x \in A$, on a : $x \leqslant M$ (avec $M \in E$)

(2) Une partie A de E est minorée par m, lorsque

$\forall x \in A$, on a : $m \leqslant x$ (avec $m \in E$)

□ M est appelé un majorant de A, m un minorant de A.

(3) Bornes de A : lorsque la partie A de E est majorée, on appelle borne supérieure de A, notée Sup(A), le plus petit majorant de A.

De même, borne inférieure de A, inf(A), le plus grand minorant.

◊ Cas de ℝ (ordonné)

· Toute partie (non vide) majorée de ℝ admet un plus petit majorant, c'est-à-dire une borne supérieure.

De même pour minorée et borne inférieure.

★ Remarques sur ces propriétés des parties de ℝ.

- Ces propriétés (admises) ne sont pas évidentes.
- Si A vérifie ces propriétés, Sup(A) existe, mais on peut avoir $\text{Sup}(A) \in A$, ou bien $\text{Sup}(A) \notin A$. De même pour inf(A).
- Ces propriétés sont vraies dans ℝ, mais pas nécessairement dans ℚ : voir contre-exemple suivant.

☆ Contre-exemple dans ℚ : soit $A \subset \mathbb{Q}$, $A = \left\{\frac{p}{q} \,/\, \frac{p^2}{q^2} < 2\right\}$.

1. A n'est pas vide, A est majoré (par des rationnels).

2. Cependant, A n'admet pas de plus petit majorant rationnel, (on le démontre "par l'absurde" en examinant tous les cas).

♦ **Intervalles de $\mathbb{R}$**

☐ Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont des parties de $\mathbb{R}$ "d'un seul tenant", le lecteur est censé connaître la signification des écritures telles que :

$$[a,b] \quad , \quad]a,b[\quad , \quad]a,b] \quad \text{ou} \quad [a,b[$$

♦ ***Infinis.***

◊ $\mathbb{R}$ lui-même n'est ni majoré, ni minoré.

☐ Pour exprimer certaines propriétés, on convient d'écrire un intervalle minoré (par a) et non majoré sous la forme : $[a, +\infty[$ si a appartient à l'intervalle ; ou sinon : $]a, +\infty[$.

- De même pour $]-\infty, a]$ ou pour $]-\infty, a[$.

$+\infty$ et $-\infty$ sont les symboles des infinis, les infinis ne sont pas éléments de $\mathbb{R}$.

★ On peut écrire $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$. Cependant on ne doit pas croire que les infinis sont réels (pas plus que rationnels ou entiers).

3° - VALEUR ABSOLUE, RACINE CARREE.

♦ Soit Y un réel (ou une expression prenant des valeurs réelles).

- La valeur absolue de Y se note $|Y|$.
- $|Y|$ est le nombre positif ou nul défini par :

$$\begin{array}{|l|}|Y| = 0 \Leftrightarrow Y = 0 \\ |Y| = Y \Leftrightarrow Y > 0 \\ |Y| = -Y \Leftrightarrow Y < 0\end{array}$$

♦ Soit Y positif ou nul (ou une expression à valeurs positives ou nulles).

- La racine carrée de Y se note $\sqrt{Y}$.
- $\sqrt{Y}$ est le nombre positif ou nul dont le carré est Y.

★ Remarques

☐ Il y a deux nombres dont le carré est 25, ce sont +5 et -5, mais celui qu'on note $\sqrt{25}$ est +5 (l'autre est noté $-\sqrt{25}$).

☐ Les deux nombres dont le carré est Y sont appelés ou notés racines carrées de Y "en toutes lettres".

☆ Si l'on cherche x tel que $x^2 = 25$, toute écriture telle que $x = \pm 5$, $x = \pm\sqrt{25}$ est incorrecte ; par contre, il est correct d'écrire : $x^2 = 25 \Leftrightarrow (x = 5 \text{ ou } x = -5)$.

De même, sont incorrectes les écritures suivantes : $\sqrt{x^2} = \pm x$, ou seulement : $\sqrt{x^2} = x$, $\sqrt{x^2} = -x$.

Par contre, il est correct d'écrire : $\sqrt{x^2} = |x|$, $-\sqrt{x^2} = -|x|$.

- Si l'on suppose $x > 0$, on obtient $\sqrt{x^2} = x$ et $-\sqrt{x^2} = -x$.
- Si l'on suppose $x < 0$, on obtient $\sqrt{x^2} = -x$ et $-\sqrt{x^2} = x$.

Le symbole $\sqrt{\ }$ définit une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$, appelée racine carrée, de schéma $\sqrt{\ }$: $\begin{array}{|l}\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longrightarrow \sqrt{x}\end{array}$

4° - RAPPELS SUR EQUATIONS ET INEQUATIONS.

♦ ***Equation*** : se présente sous forme d'une égalité, contenant une ou plusieurs lettres représentant les inconnues à trouver.

- Résoudre l'équation consiste à trouver toutes les valeurs des inconnues pour lesquelles l'égalité est vérifiée.
- Ces valeurs sont les solutions de l'équation, très abusivement appelées "racines" de l'équation.

★ Rappels :

1. On ne modifie pas une équation en transposant des termes

d'un membre à l'autre (avec changement de signe), ni en multipliant (ou divisant) les deux membres par un même nombre non nul.

2. On risque de modifier une équation en multipliant (divisant) les deux membres par une expression contenant une inconnue, à plus forte raison si on "élève les deux membres au carré".

3. Très souvent, il est commode de ramener 0 au second membre (à l'aide de transpositions seulement), puis d'utiliser les résultats relatifs aux produits nuls ou fractions nulles.

♦ *Systèmes d'équations.*

- Un système d'équations se résout en général par la méthode des substitutions.
- Toutefois, le lecteur connaît certainement les méthodes dites par additions, par les déterminants, (relatives à des systèmes particuliers).
- En général, n inconnues sont déterminées à partir de n équations. Si l'on a moins de n équations, des inconnues s'expriment en fonction des autres. Si l'on a plus de n équations, il n'y a pas de solution, mais ceci n'est pas une règle absolue.

♦ ***Inéquation*** : se présente sous forme d'une inégalité (signe <, ou >, ou ≠) contenant des inconnues (à trouver). Résoudre consiste à trouver toutes les valeurs des inconnues pour lesquelles l'inégalité est vérifiée.

★ Rappels :

1. On ne modifie pas une inéquation par des transpositions, ni en multipliant (ou divisant) les deux membres par un même nombre positif.

2. Par contre, on "renverse le sens" lorsqu'on multiplie (ou divise) les deux membres par un même nombre négatif.

3. On risque de modifier une inéquation en multipliant (divisant) les deux membres par une expression contenant une inconnue, à plus forte raison si on "élève les deux membres au carré".

☆ $0 < a < b \Rightarrow a^2 < b^2$

$a < b < 0 \Rightarrow a^2 > b^2$ et non pas $a^2 < b^2$

♦ *Systèmes d'inéquations.*

- Les méthodes de résolution d'un système d'inéquations sont très diverses, mais le plus souvent ce sont des méthodes par représentations graphiques.

5° - VALEURS APPROCHEES.

☐ L'écriture décimale d'un rationnel représente ce rationnel lorsque la définition de l'égalité est satisfaite $(\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \Leftrightarrow pq' = p'q)$
Dans ce cas, on utilise le symbole =

☆ Exemples : $\frac{4}{2} = 2$ $\frac{2}{5} = 0{,}4$ $\frac{1751}{32} = 54{,}71875$ sont des écritures correctes.

☐ En pratique, on admet l'emploi du symbole =, à condition d'utiliser des points de suspension, dans les cas suivants :

1. Suite décimale limitée mais trop longue : $\frac{1751}{32} = 54{,}71...$

2. Suite décimale illimitée : $\frac{1}{3} = 0{,}33....$ $\frac{4}{7} = 0{,}57...$

Il vaut mieux employer le symbole ≃, dans ces cas.

≃ signifie "est proche de" .

★ Remarque.

$\frac{4}{5} \simeq 1$ et $\frac{4}{5} \simeq 0{,}5$ semblent contradictoires, il n'en est rien : il suffit de préciser des règles d'emploi de ≃

☆ *Exemple fondamental.*

□ π est un nombre réel mais non rationnel, $\pi \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$; on sait que π est proche de $\frac{22}{7}$, mais "plus proche" de $\frac{355}{113}$.

D'autre part, on peut écrire la suite illimitée (non périodique) des décimales de π, sous la forme $\pi = 3,1415926535...$

On écrit donc, correctement : $\pi \simeq \frac{22}{7}$, $\pi \simeq \frac{355}{113}$ et $\pi \simeq 3,1416$

□ On a : $3,1415 < \pi < 3,1416$ (π encadré par deux rationnels)

- 3,1415 minore π, on l'appelle valeur approchée par défaut de π.
- 3,1416 majore π, on l'appelle valeur approchée par excès de π.

On a $\pi - 3,1415 < 3,1416 - 3,1415$, soit : $\pi - 3,1415 < 10^{-4}$,
on a : $3,1416 - \pi < 3,1416 - 3,1415$, soit : $3,1416 - \pi < 10^{-4}$.

- La valeur 3,1415 est dite approchée à 10^{-4} près par défaut de π.
- La valeur 3,1416 est dite approchée à 10^{-4} près par excès de π.
- Chacune de ces valeurs est une valeur approchée à 10^{-4} près.

♦ *Définitions.*

Si a désigne un "réel exact" et a' une valeur approchée de a,

1. L'incertitude absolue correspondante est a − a'.
2. L'incertitude relative correspondante est $\frac{a - a'}{a}$.

□ En pratique, et tout faux-problème mis à part, on ne peut pas calculer les incertitudes, on peut seulement déterminer des majorants de leurs valeurs absolues, et parfois leurs signes.

☆ Problème traité : soit $a = \frac{\sqrt{2}}{\pi - 1}$, trouver une valeur approchée ayant deux décimales exactes, ou bien une valeur approchée à 10^{-2} près, (ces deux notions ne sont pas les mêmes, les calculs sont les mêmes).

1. Par précaution, on prend 2 décimales de plus qu'on n'en demande, ou que ne l'indique le 10^{-2}. Les valeurs sont lues dans des tables : $\sqrt{2} = 1,4141...$ $\quad \pi = 3,1415...$

2. On conduit deux calculs, de manière à obtenir la garantie d'un résultat par excès et d'un autre par défaut.

Excès : $\frac{1,4142}{2,1415} = 0,660\,3...$ d'où 0,6604 par excès.

Défaut : $\frac{1,4141}{2,1416} = 0,660\,3...$ d'où 0,6603 par défaut.

On a donc "garanti" $0,6603 < a < 0,6604$

3. On peut affirmer : $a \simeq 0,66$ avec 2 décimales exactes,
$a \simeq 0,66$ à 10^{-2} près (par défaut),
en effet l'incertitude absolue est "à coup sûr" majorée par 10^{-2}.
Par contre l'incertitude relative (majorée à coup sûr par $\frac{10^{-2}}{0,66}$) donne lieu au calcul $\frac{0,01}{0,66} - 0,0151...$, on la majore donc par 0,016 ou 1,6 %.

★ Formules utiles si ε est "petit".

$(1+\varepsilon)^{\alpha} \simeq 1 + \alpha\varepsilon$ pour tout exposant réel α.

par exemple $\sqrt{1+\varepsilon} \simeq 1 + \frac{\varepsilon}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} \simeq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$, $\frac{1}{1+\varepsilon} \simeq 1 - \varepsilon$,...

$\mathrm{Log}(1+\varepsilon) \simeq \varepsilon$, $e^{\varepsilon} \simeq 1 + \varepsilon$.

ε en radians : $\sin\varepsilon \simeq \varepsilon$, $\quad \mathrm{tg}\,\varepsilon \simeq \varepsilon$, $\quad \cos\varepsilon \simeq 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$.

NB

CHAPITRE 7

$\mathbb{C}$ - CALCULS COMPLEXES. IMAGES GEOMETRIQUES

1° - $\mathbb{C}$ ET LES STRUCTURES.

☐ Commentaire : dans $\mathbb{R}$, une équation du second degré à discriminant négatif n'a pas de solution. On a créé des nombres pour lesquels cet inconvénient disparaît, tout en conservant des règles de calcul "très proches" des règles dans $\mathbb{R}$.

♦ On obtient l'ensemble $\mathbb{C}$ des *nombres complexes* muni d'opérations rappelées dans le reste de ce chapitre, et tel que $\boxed{\mathbb{R} \subset \mathbb{C}}$

- $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un *corps commutatif*, appelé corps $\mathbb{C}$.
- $\mathbb{R}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, les opérations usuelles dans $\mathbb{R}$ sont des cas particuliers des opérations dans $\mathbb{C}$.
- $\mathbb{C}$ n'est *pas ordonné.*
- $\mathbb{C}$ peut être muni de structures d'espaces (vectoriel ou affine).

2° - PREMIERE FORME DES NOMBRES COMPLEXES.

☐ On écrit un nombre complexe z à l'aide de 2 nombres réels a et b, sous une première forme (dite algébrique) : $\boxed{z = a + ib}$

◊ Le réel a, noté aussi $\mathcal{R}e(z)$, est la partie réelle de z.

◊ Le réel b, noté aussi $\mathcal{I}m(z)$, est la partie imaginaire de z.

◊ i est un nombre tel que $\boxed{i^2 = -1}$ ce qui montre que i n'est pas réel.

☐ En pratique, on reconnaît aisément les deux parties :

(1) La partie réelle "ne dépend pas" de i ($\mathcal{R}e(z) = a$).

(2) La partie imaginaire est le "coefficient de i", et c'est un nombre réel ($\mathcal{I}m(z) = b$, et non ib).

♦ Règles opératoires dans $\mathbb{C}$: soit $z = a + ib$, soit $z' = a' + ib'$.

● Egalité : lorsque les parties réelles et imaginaires sont respectivement égales

$$\boxed{z = z' \Leftrightarrow (a = a' \quad \text{et} \quad b = b')}$$

● Opérations $+, -, \times$:

(1) Comme pour des "polynômes en i".

(2) En remplaçant i^2 par -1 chaque fois que possible.

☐ On obtient les schémas suivants :

- $z + z' = (a+ib)+(a'+ib')$ d'où $z + z' = (a+a')+i(b+b')$
- $z - z' = (a+ib)-(a'+ib')$ d'où $z - z' = (a-a')+i(b-b')$
- $z \times z' = (a+ib)(a'+ib')$ d'où $zz' = (aa'-bb')+i(ab'+ba')$

☐ Pour la division, ou le rapport $\frac{z}{z'} = \frac{a+ib}{a'+ib'}$ (z' non nul) on fait apparaître les 2 parties du résultat par une règle spéciale :

(1) Multiplier "haut et bas" par le "conjugué du bas".

(2) Effectuer les nouveaux calculs.

♦ Le conjugué de $z' = a' + ib'$ est noté $\bar{z}'$, défini par

$$\boxed{z' = a' + ib' \Leftrightarrow \bar{z}' = a' - ib'}$$

☐ La conjugaison revient donc à changer i en $-i$ (ou $-i$ en i).

☐ On obtient : $\frac{z}{z'} = \frac{z}{z'} \times \frac{\bar{z}'}{\bar{z}'}$ ou $\frac{z\bar{z}'}{z'\bar{z}'}$, soit : $\frac{(a+ib)(a'-ib')}{(a'+ib')(a'-ib')}$

finalement $\quad \frac{z}{z'} = \frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2} + i\frac{ba'-ab'}{a'^2+b'^2}$

- Les parties réelle et imaginaire de $\frac{z}{z'}$ sont ainsi séparées.

◊ La conjugaison est un automorphisme de $\mathbb{C}$, pour les opérations qui font de $\mathbb{C}$ un corps (et pour les opérations qui s'y ramènent).

• En pratique, toute expression $f(z)$ ne comportant que des sommes, produits, quotients ou puissances n $(n \in \mathbb{Z})$ vérifie $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$.

• La conjugaison est involutive : $\overline{(\overline{z})} = z$.

★ Remarques

1. Produit remarquable dans $\mathbb{C}$: $\boxed{a^2 + b^2 = (a+ib)(a-ib)}$

2. $i^2 = -1$ d'où $i^3 = i^2 . i$, $i^3 = -i$; puis $i^4 = i^3 . i = -i . i$, $i^4 = +1$. Par suite, $i^5 = +i$, $i^6 = -1$, $i^7 = -i$, etc...

3. $\frac{1}{i} = \frac{1}{i} \times \frac{-i}{-i}$ ou $\frac{-i}{+1}$, d'où $\frac{1}{i} = -i$, et ainsi de suite.

4. Toutes les formules, règles, etc... qui sont valables dans le corps $\mathbb{R}$ restent valables dans le corps $\mathbb{C}$, pourvu que l'on "respecte $i^2 = -1$".

3° - IMAGES DANS UN PLAN.

☐ A la manière des réels et des points d'un axe, on peut faire correspondre les complexes et les points d'un plan (rapporté à 2 axes orthonormés).

◆ Au complexe $z = a + ib$, on associe l'image M de z dans ce plan, en prenant pour M : l'abscisse égale à a, l'ordonnée égale à b

◆ Reciproquement, au point M(a, b) de ce plan, on associe le complexe $z = a + ib$ appelé ***affixe de M.***

☐ On réalise ainsi des bijections entre $\mathbb{C}$ et le plan (affine) muni d'un repère orthonormé. Un tel plan est appelé plan complexe, il constitue une représentation géométrique de $\mathbb{C}$; $\mathbb{C}$ est une représentation "numérique" de ce plan.

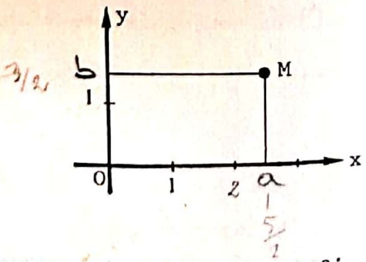
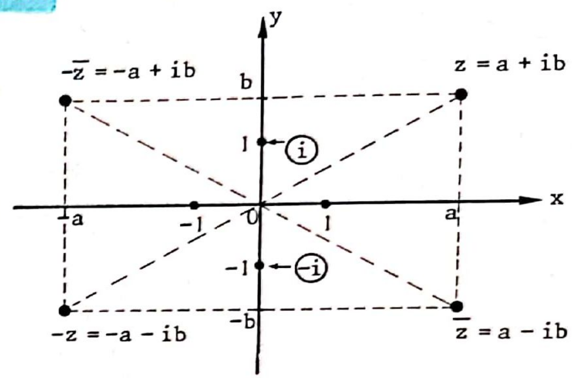


Schéma $\begin{cases} z = \frac{5}{2} + \frac{3i}{2} \\ M(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}) \end{cases}$

◊ Images usuelles.

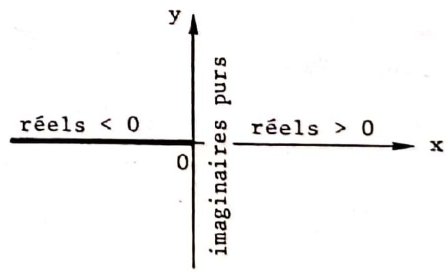


• Le schéma montre, à partir de l'image de $z = a + ib$, les images de : $\overline{z} = a - ib$, $-z = -a - ib$, et $-\overline{z}$, obtenues par des symétries évidentes.

• $z = 0$ a pour image l'origine, i et $-i$ ont les images indiquées, $z = 1$ a pour image le point $(1,0)$, $z = -1$ a pour image $(-1,0)$.

• Si $z = a + ib$ se réduit à $z = a$ (réel), son image est sur l'axe Ox.

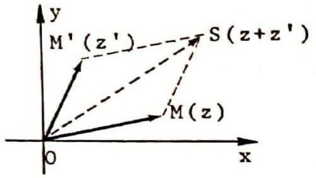
• Si $z = a + ib$ se réduit à $z = ib$, on dit que z est imaginaire pur, l'image est sur l'axe Oy.



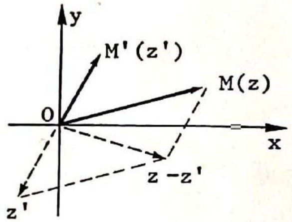
★ Images des opérations.

☐ On peut associer à $z = a + ib$ le vecteur $\overrightarrow{OM}$ au lieu du point M, et à z' le vecteur $\overrightarrow{OM'}$. Dans ce cas :

• L'addition $z + z'$ revient à la somme vectorielle $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OS}$ (règle du parallélogramme).



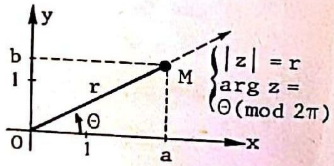
• La soustraction $z-z'$ revient à la somme $z+(-z')$, d'où la figure, que le lecteur interprétera.



• La multiplication zz' revient à une similitude appliquée à M, ou bien une autre similitude appliquée à M', chacune de ces similitudes est précisée au 6°), leur centre est O.

4° - DEUXIEME FORME DES NOMBRES COMPLEXES.

★ Remarque fondamentale : il revient au même de donner les coordonnées (a, b) d'un point M, ou bien de donner la distance $d(O,M) = r$ et une mesure θ de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OM}})$.



♦ Définition : si $z = a + ib$ a pour image $M(a,b)$,

• on note $|z|$ et on appelle module de z la distance de l'origine au point M.

• on note $\arg z$ et on appelle argument de z l'angle $(\widehat{\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OM}})$.

◊ Propriétés

• $|z|$ est nécessairement positif, seul $|0| = 0$ (et $\arg(0)$ indéterminé).

• $\arg z$ possède une infinité de mesures ; si Θ est l'une d'elles, on peut écrire : $\arg z = \Theta + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$, ou $\arg z = \Theta (\text{mod } 2\pi)$.

• Si $|z| = r$ et $\arg z = \Theta(\text{mod } 2\pi)$, on a d'après le théorème des projections (chapitre 2) : $a = r\cos\Theta$, $b = r\sin\Theta$, d'où $z = a + ib$ s'écrit $z = r(\cos\Theta + i\sin\Theta)$.

□ Conventions

• On peut abréger $z = r(\cos\Theta + i\sin\Theta)$ en $\boxed{z = [r,\Theta]}$

• On appelle forme trigonométrique de z l'une ou l'autre des formes $r(\cos\Theta + i\sin\Theta)$ ou $[r,\Theta]$, (2° forme des complexes).

★ Passage d'une forme à l'autre :

1 Connaissant la forme $z = a + ib$,

on a évidemment • $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$

puis, (modulo 2π) • $\arg z = \Theta$ tel que $\begin{cases} \cos\Theta = \dfrac{a}{r} \\ \sin\Theta = \dfrac{b}{r} \end{cases}$

2 Connaissant la forme $z = [r,\Theta]$ ou $z = r(\cos\Theta + i\sin\Theta)$,

on a évidemment • $a = r\cos\Theta$, $b = r\sin\Theta$

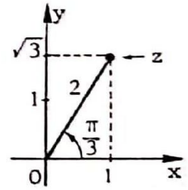
☆ Exemples

1 Si $z = 1 + i\sqrt{3}$, on a

$|z| = \sqrt{1+3} = 2$,

$\arg z = \Theta(\text{mod } 2\pi)$ avec $\begin{cases} \cos\Theta = \dfrac{1}{2} \\ \sin\Theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

d'où $\arg z = \dfrac{\pi}{3}(\text{mod } 2\pi)$.



2 Si $z = [3, \frac{\pi}{4}]$, on a $z = 3(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

d'où $z = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} + 3i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (ou $z = \dfrac{3(1+i)}{\sqrt{2}}$)

5° - UTILISATIONS DE LA FORME TRIGONOMETRIQUE.

☐ On ne peut rien dire à l'avance sur le module et l'argument d'une somme de complexes à partir de ceux des termes.

☐ Par contre, les résultats suivants sont particulièrement simples.

- **Egalité** : lorsque les modules et arguments sont respectivement égaux,

  $z = z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$ et $\arg z = \arg z' \pmod{2\pi}$

- **Produit**, par : produit des modules et somme des arguments

  $[r,\theta] \times [r',\theta'] = [rr', \theta+\theta']$

- **Rapport**, par : rapport des modules et différence des arguments

  $\dfrac{[r,\theta]}{[r',\theta']} = [\frac{r}{r'}, \theta-\theta']$

- **Puisssance** n ($n \in \mathbb{N}^*$), d'après le produit répété n fois :

  $[r,\theta]^n = [r^n, n\theta]$

★ *Cas des racines carrées.*

- Le symbole $\sqrt{\ }$ étant réservé à $\mathbb{R}^+$, on ne l'emploie que pour des réels r vérifiant $r \geq 0$.
- Il n'y a pas de symbole particulier dans le cas de $\mathbb{C}$, aussi écrit-on : racines carrées de A "en toutes lettres", si $A \in \mathbb{C}$.
- Soit $A = [R,\alpha]$ un complexe quelconque, donné sous cette forme (ou mis sous cette forme).

  Les racines carrées de A sont des nombres z tels que $z^2 = A$

- Posant $z = [r,\theta]$, on obtient $[r^2, 2\theta] = [R,\alpha]$

  d'où : $r^2 = R$ et $2\theta = \alpha \pmod{2\pi}$,

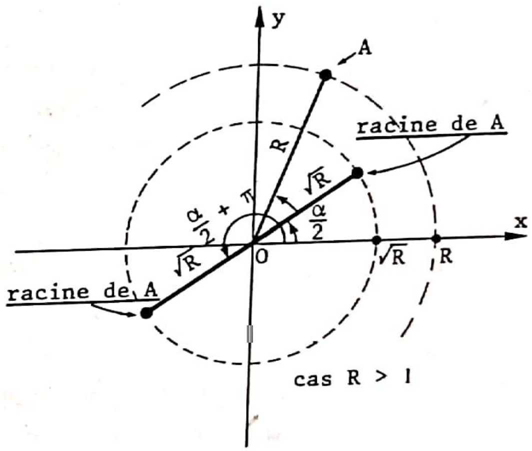
  d'où : $r = \sqrt{R}$ et $\theta = \frac{\alpha}{2} \pmod{\pi}$

- Il existe donc deux racines carrées de $A = [R,\alpha]$,

  de même module $\sqrt{R}$

  d'arguments : l'un $\frac{\alpha}{2} \pmod{2\pi}$, l'autre $\frac{\alpha}{2} + \pi \pmod{2\pi}$

- Ces deux racines sont opposées, leurs images sont symétriques par rapport à O.



cas R > 1

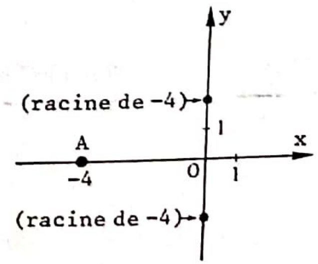
☐ Commentaire.

On voulait faire disparaître l'inconvénient des équations du second degré à discriminant Δ négatif, qui n'ont pas de solutions dans $\mathbb{R}$ faute de racine carrée de Δ. Il suffit de reconsidérer cela dans $\mathbb{C}$.

☆ Exemples :

1. $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$. $z^2 + 1 = 0$, dans $\mathbb{C}$, peut s'écrire $z^2 = -1$, d'où $z^2 = i^2$, il y a deux solutions : $z = i$ ou $z = -i$.

2. Plus généralement, tout réel négatif a deux racines carrées (opposées) dans $\mathbb{C}$: prenons $A = -4$, d'où $|A| = 4$ et $\arg A = \pi \pmod{2\pi}$, on a soit par leur module et leurs arguments, soit d'après $-4 = 4i^2$ (carré de 2i ou de −2i), les deux racines de −4 : 2i et −2i.



◊ *Caractérisation des imaginaires purs.*

• $z = 0$ mis à part, un imaginaire pur est de type $z = ib$ (b réel) d'où $z^2 = -b^2$: le carré est réel négatif.

• Réciproquement, un réel négatif peut s'écrire $-b^2$ (b réel), ou i^2b^2 : ses racines carrées ib et $-ib$ sont imaginaires pures.

L'ensemble $i\mathbb{R}^*$ des imaginaires purs non-nuls est l'ensemble des racines carrées des nombres réels négatifs.

□ Retour aux racines carrées.

• $z^2 = A$, avec $z = [r,\Theta]$ inconnu et $A = [R,\alpha]$ donné, amenait aux deux racines carrées : $z = [\sqrt{R},\frac{\alpha}{2}]$ et $z = [\sqrt{R}, \frac{\alpha}{2} + \pi]$.

• On peut aussi faire des calculs "algébriques", notamment si A est sous la forme $a + ib$ et n'a pas un argument "simple".

☆ Exemple : soit $A = -5 + 12i$, on veut les racines carrées de A.

• Posons $(x + iy)^2 = A$, d'où : $x^2 - y^2 + 2ixy = -5 + 12i$, où il est entendu que x et y sont réels ; on obtient le système $\begin{cases} x^2-y^2=-5 \\ xy = 6 \end{cases}$

• On en tire $y = \frac{6}{x}$ et par substitution : $x^2 - \frac{36}{x^2} = -5$, d'où $x^4 - 36 = -5x^2$, qui s'écrit $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$; cette équation bicarrée donne : $\Delta = 169$, $x^2 = \frac{-5+13}{2} = 4$, on rejette $x^2 = \frac{-5-13}{4}$ car ici, x est réel et x^2 ne doit pas être négatif.

• Il reste $x^2 = 4$, et compte tenu de $y = \frac{6}{x}$,

on obtient $\begin{cases} x = 2 \text{ et } y = 3 \\ \text{ou : } x = -2 \text{ et } y = -3 \end{cases}$

• Les racines carrées de $(-5+12i)$ sont donc $(2+3i)$ et l'opposé.

♦ *Racines $n^{\text{ièmes}}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)*

• Vu le cas des racines carrées, si l'on cherche maintenant $z = [r,\Theta]$ tel que $z^n = A$, où $A = [R,\alpha]$ est connu, on a : $[r^n,n\Theta] = [R,\alpha]$, d'où $r^n = R$ et $n\Theta = \alpha \pmod{2\pi}$.

• On obtient $r = \sqrt[n]{R}$ et $\Theta = \frac{\alpha}{n} \left(\text{mod } \frac{2\pi}{n}\right)$.

• Il existe donc n racines $n^{\text{ièmes}}$ de $A = [R,\alpha]$

de même module $\sqrt[n]{R}$

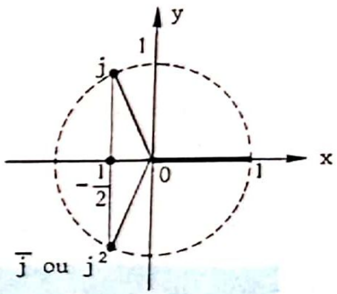
d'arguments respectifs :

$\frac{\alpha}{n} \pmod{2\pi}$, $\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n} \pmod{2\pi}$, ..., $\frac{\alpha}{n} + (n-1)\frac{2\pi}{n} \pmod{2\pi}$

☆ Exemple : racines cubiques de 1 (racines $3^{\text{ièmes}}$).

. On pose $[r^3,3\Theta] = [1,0]$, d'où $r^3 = 1$ et $3\Theta = 0 \pmod{2\pi}$ d'où $r = 1$ et $\Theta = 0 \left(\text{mod } \frac{2\pi}{3}\right)$; 3 valeurs principales $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$.

. D'où les 3 racines :



$[1,0] = 1(\cos 0 + i \sin 0) = 1$

$[1, \frac{2\pi}{3}] = \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

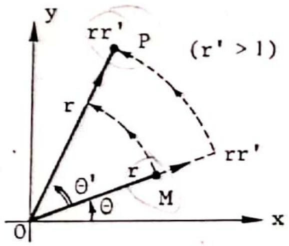
$[1, \frac{4\pi}{3}] = \cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\frac{4\pi}{3} = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

. On désigne respectivement ces nombres par 1, j. j^2 ou $\bar{j}$

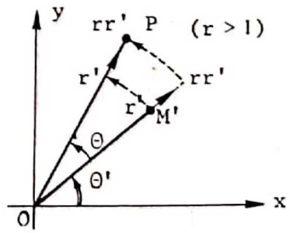
6° - COMPLEMENTS DIVERS.

★ Image du produit zz'.

$z = [r,\Theta]$, $z' = [r',\Theta']$ et $zz' = [rr',\Theta+\Theta']$ ayant pour images M, M' et P(ou $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OM'}$ et $\overrightarrow{OP}$),



1. On peut partir de M, on obtient P par la similitude de centre O, rapport $r' = |z'|$, et angle $\Theta' = \arg z'$, appliquée à M.



2. On peut partir de M', on obtient P par la similitude de centre O, rapport $r = |z|$, et angle $\Theta = \arg z$, appliquée à M'.

★ $\mathbb{C}$ et la trigonométrie.

On a vu : $[r,\theta]^n = [r^n, n\theta]$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

On peut écrire : $r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$, et simplifier r^n, d'où la formule de Moivre

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

☆ Exemples d'utilisation :

1. $\cos 2\theta + i\sin 2\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^2$,
d'où $\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta$.
Séparant les 2 parties, on retrouve :
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \text{ et } \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$
2. De même, $\cos 3\theta + i\sin 3\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^3$ amène à :
$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$ et $\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$
qu'on transforme aisément en :
$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \text{ et } \sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

◊ On a vu que tout nombre complexe possède n racines $n^{\text{ièmes}}$; plus généralement, le théorème de d'Alembert précise :

Toute équation de degré n, à coefficients complexes (ou réels) possède exactement n solutions dans $\mathbb{C}$.

- Une solution double compte pour deux, triple pour trois, et ainsi de suite. La preuve du théorème n'est pas du niveau de ce livre.

☆ Equation du 2° degré dans $\mathbb{C}$.

Les règles "réelles" restent valables, à condition de ne pas user du symbole $\sqrt{\ }$ mal à propos.

Résoudre : $iz^2 - 2(1-i)z + 4(1+2i) = 0$.

- On a $\Delta' = (1-i)^2 - 4i(1+2i)$, d'où $\Delta' = 8 - 6i$.
- Comme rappelé au 5°, on trouve les racines de Δ' : $3 - i$ et l'opposé.
- On peut aussi "s'en douter", car $8 - 6i$ contient $6i = 2 \times 3i$, on peut présumer d'un carré, dont le double produit $2 \times 3i$ invite à essayer $(1-3i)^2$, ou $(3-i)^2$, le second convient.

- Appliquant la formule du cas réel, on écrit ici :
$z_1 = \dfrac{(1-i)+(3-i)}{i}$, ce qui donne $z_1 = -2 - 4i$
et de même $z_2 = \dfrac{(1-i)-(3-i)}{i}$ d'où $z_2 = 2i$.

◊ *Théorème* : dans le cas de coefficients réels, l'équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$ avec $\Delta < 0$ possède toujours deux solutions complexes conjuguées.

– Preuve succincte : Δ est de type $-\lambda^2$ (λ réel), d'où $i^2\lambda^2$, et ses racines carrées $i\lambda$ et $-i\lambda$. Les solutions de type $\dfrac{-b+i\lambda}{2a}$ et $\dfrac{-b-i\lambda}{2a}$ sont conjuguées.

$\Delta = -6$ racines ~~...~~
$2i$ $-2i$

◊ Formules utiles.

- La formule $(a^2+b^2) = (a+ib)(a-ib)$ peut s'écrire :
$$|z|^2 = z\bar{z}$$
- De même, $a = \dfrac{(a+ib)+(a-ib)}{2}$ et $b = \dfrac{(a+ib)-(a-ib)}{2i}$
donnent $\mathcal{R}e(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$
$$\mathcal{J}m(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$
- Pour qui sait manier les exponentielles, on peut utiliser :
$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ (convention d'écriture),
d'où : $z = [r,\theta]$ s'écrit $z = re^{i\theta}$,
d'où toutes les règles de calcul, sous les formes :
$(re^{i\theta})(r'e^{i\theta'}) = (rr')e^{i(\theta+\theta')}$, $\dfrac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = (\frac{r}{r'})e^{i(\theta-\theta')}$, etc...

CHAPITRE 8

FONCTIONS. LIMITES. CONTINUITE

1° - FONCTIONS : ETUDE ET REPRESENTATION GRAPHIQUE.

☐ On se borne ici au cas des fonctions de type $f : \begin{array}{|l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$, (où x peut donner zéro ou une image f(x)).

☐ On suppose connues les notions qui vont intervenir dans ce paragraphe, certaines sont rappelées dans ce chapitre ou dans d'autres.

● ***Plan d'étude et représentation graphique de f.*** (résumé en fin de paragraphe).

① Trouver le domaine de définition $\mathcal{D}_f$, et le domaine d'étude D.

● $\mathcal{D}_f$ est l'ensemble des x tels que f(x) existe, c'est-à-dire que f(x) représente une valeur bien définie et calculable ; on sait que :

- $\sqrt[2n]{g(x)}$ existe si et seulement si $g(x) \geqslant 0$.
- Une fraction rationnelle (irréductible) existe si et seulement si son dénominateur n'est pas nul.
- $\text{Log}[g(x)]$ existe si et seulement si $g(x) > 0$.

● On détermine D par des considérations de parité ou de périodicité.

- f est impaire lorsque : $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = -f(x)$.
- f est paire lorsque : $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = f(x)$.
- f est P-périodique (de période P) lorsqu'il existe $P \neq 0$, tel que $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(x+P) = f(x)$.

● Graphiquement, dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ ou (Ox,Oy) :

- Si f est impaire, la courbe représentative C_f admet O pour centre de symétrie ; si f est paire, C_f admet l'axe Oy pour axe de symétrie. Dans les 2 cas, D est la partie de $\mathcal{D}_f$ telle que $x \geqslant 0$.
- Si f est P-périodique, C_f est formée d'arcs déduits les uns des autres par la translation de vecteur $P\vec{i}$. Dans ce cas, D est une partie de $\mathcal{D}_f$ de type $\mathcal{D}_f \cap [a, a+P]$, où a est "à bien choisir".

② Trouver les limites (ou les valeurs) de f aux bornes de D, et les asymptotes (éventuelles) de la courbe C_f.

● Les limites usuelles sont rappelées au paragraphe 3°).

● Pour les asymptotes (rectilignes) on utilise les résultats suivants :

$\lim f(x) = \infty$

- Si f(x) tend vers un infini lorsque x tend vers a(fini), la droite d'équation $x = a$ est une asymptote parallèle à Oy.
- Si f(x) tend vers a(fini) lorsque x tend vers un infini, la droite d'équation $y = a$ est une asymptote parallèle à Ox.
- Si f(x) tend vers un infini lorsque x tend vers un infini, il peut exister une asymptote oblique, d'équation $y = ax + b$; a est la limite (non-nulle) de $\frac{f(x)}{x}$, b est la limite de $f(x) - ax$, lorsque x tend vers cet infini, si ces deux limites sont finies (si l'une au moins de ces limites est infinie, il n'y a pas d'asymptote).

③ Trouver le sens des variations de f (sur D).

● On peut parfois avoir ce sens sans calcul ; par exemple, si $f(x) = \frac{1}{x+1}$, f est décroissante.

● En général, on déduit ce sens de l'étude du signe de f'(x), d'après le théorème :

- Si f est dérivable, f est croissante lorsque f'(x) est positive, et décroissante lorsque f'(x) est négative.

• On peut exprimer les résultats dans un tableau, la croissance étant figurée par ↗, la décroissance par ↘.

④ Trouver des points particuliers de la courbe C_f.

• On s'attache généralement à préciser les sommets, les points de C_f qui sont sur les axes (Ox ou Oy) et, s'ils sont demandés explicitement, les points d'inflexion de C_f.

- Si f est dérivable, l'abscisse d'un sommet de C_f est une valeur de x annulant f'(x) avec changement de signe, (avec $x \in D$).

- Si f est 2 fois dérivable, l'abscisse d'un point d'inflexion est une valeur de x annulant f"(x) avec changement de signe, (avec $x \in D$).

• Les "points sur Ox" sont déterminés par $f(x) = 0$ (s'il y a des solutions), le "point sur Oy" par $y = f(0)$ (si $0 \in D$).

⑤ Construire la courbe C_f.

• On peut s'aider d'un tableau récapitulatif, où l'on concentre les résultats des points 1.2.3.4 : on peut rendre les tracés plus précis à l'aide des tangentes à C_f aux points particuliers ; dans ce cas on utilise le fait que la tangente à C_f au point $(x_0, f(x_0))$ est dirigée par $(1, f'(x_0))$.

• On n'oublie pas les asymptotes, symétries, périodes, s'il y a lieu.

★ En résumé

1. $\mathcal{D}_f$ et D réduit (symétries, périodes).
2. Limites et asymptotes.
3. Variations (dérivée).
4. Points particuliers.
5. Tableau - Courbe "complète".

2° - LIMITES.

☐ Dans tout ce paragraphe :

- a et b désignent des valeurs finies, sinon on utilise le symbole ∞,
- A et B désignent des valeurs positives (en pratique "grandes"),
- ε et η désignent des valeurs positives (en pratique "petites"),

☐ $\lim_{x \to a} [f(x)] = b$ signifie : on peut choisir x "assez voisin de a", pour que l'écart $|f(x)-b|$ soit "aussi petit qu'on veut".

- On traduit cela par la formule :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta \text{ tel que : } |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon$$

- On peut aussi écrire : $x \to a \Rightarrow f(x) \to b$

☐ $\lim_{x \to a} [f(x)] = +\infty$ signifie : on peut choisir x "assez voisin de a" pour que f(x) soit "aussi grande qu'on veut".

- On traduit cela par la formule :

$$\forall A,\ \exists \eta \text{ tel que : } |x-a| < \eta \Rightarrow f(x) > A$$

- On peut aussi écrire : $x \to a \Rightarrow f(x) \to +\infty$
- Le cas "$x \to a$, $f(x) \to -\infty$" est similaire, on change $f(x) > A$ en $f(x) < -A$.

☐ $\lim_{x \to +\infty} [f(x)] = b$ signifie : on peut choisir x "assez grand" pour que l'écart $|f(x)-b|$ soit "aussi petit qu'on veut".

- On traduit cela par la formule :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \text{ tel que : } x > A \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon$$

- On peut aussi écrire : $x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to b$
- Le cas "$x \to -\infty$, $f(x) \to b$" est similaire, on change $x > A$ en $x < -A$.

☐ $\lim_{x \to +\infty} [f(x)] = +\infty$ signifie : on peut choisir x "assez grand" pour que f(x) soit "aussi grande qu'on veut".

- On traduit cela par la formule :

$\forall A \,,\ \exists B$ tel que : $x > B \Rightarrow f(x) > A$

- On peut aussi écrire : $x \longrightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \longrightarrow +\infty$
- De même, "$x \longrightarrow +\infty,\ f(x) \longrightarrow -\infty$" correspond à : $x > B \Rightarrow f(x) < -A$

"$x \longrightarrow -\infty,\ f(x) \longrightarrow +\infty$" correspond à : $x < -B \Rightarrow f(x) > A$

"$x \longrightarrow -\infty,\ f(x) \longrightarrow -\infty$" correspond à : $x < -B \Rightarrow f(x) < -A$

★ On adapte sans difficulté les notions précédentes, aux cas suivants :

1. limite à droite, symbolisée par $\lim\limits_{x \to a^+}$

(dans ce cas, x tend vers a en restant supérieur à a) $x > a$

2. limite à gauche, symbolisée par $\lim\limits_{x \to a^-}$

(dans ce cas, x tend vers a en restant inférieur à a) $x < a$

3° - LIMITES USUELLES

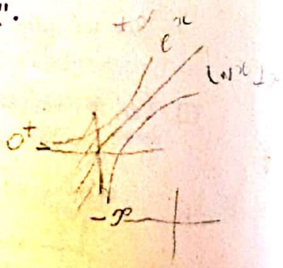
□ On se permet d'écrire 6 formules mnémotechniques, que le lecteur évitera soigneusement d'employer "officiellement".

Ce sont :

1. pour $a \neq 0$, $\frac{a}{0} = \infty$
2. pour $a \neq \infty$, $\frac{a}{\infty} = 0$

3 et 4. $\operatorname{Log} 0^+ = -\infty$, $\operatorname{Log}(+\infty) = +\infty$

5 et 6. $e^{-\infty} = 0^+$, $e^{+\infty} = +\infty$



♦ Formes indéterminées.

- Une forme indéterminée est une expression qui se présente (symboliquement) sous l'un des aspects suivants :

$(+\infty \ -\infty),\ \left(\frac{\infty}{\infty}\right),\ \left(\frac{0}{0}\right),\ (0 \times \infty)\ \ldots$

- On dit qu'on a levé l'indétermination lorsqu'on a précisé la limite correspondante.

- Il n'existe pas de méthode générale unique, mais les résultats suivants permettent de conclure dans bien des cas.

◊ Forme $+\infty - \infty$

- Un polynôme a même limite, quand x tend vers un infini, que son monôme de plus haut degré.

☆ Exemple : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 7x^2 + 1000) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^3) = +\infty$

- On peut souvent aboutir, à l'aide des formules : $a - b = \dfrac{a^2 - b^2}{a + b}$ ou $a + b = \dfrac{a^2 - b^2}{a - b}$.

$\dfrac{(a-b)(a+b)}{a+b} = a-b$

☆ Exemple : $\sqrt{x^2-x-1} - \sqrt{x^2+1}$ est de forme $\infty - \infty$ quand $x \longrightarrow -\infty$.

- on transforme en $\dfrac{(x^2-x-1) - (x^2+1)}{\sqrt{x^2-x-1} + \sqrt{x^2+1}} = \dfrac{-x-2}{\sqrt{x^2-x-1} + \sqrt{x^2-1}}$,
- la limite est la même que pour $\dfrac{-x}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2}}$, or $\sqrt{x^2} = -x$ (car $x < 0$) donc on obtient $\dfrac{-x}{-2x} = +\dfrac{1}{2}$; le lecteur conclura

◊ Forme $\frac{\infty}{\infty}$

- Dans une fraction rationnelle, quand x tend vers un infini la forme $\frac{\infty}{\infty}$ se précise lorsqu'on prend le rapport des termes de plus haut degré.

☆ Exemples (quand $x \longrightarrow +\infty$ ou $x \longrightarrow -\infty$)

1. $\dfrac{x^3 - x - 1}{2x^3 + x^2}$ a la même limite que $\dfrac{x^3}{2x^3}$, soit $\dfrac{1}{2}$
2. $\dfrac{x^3 - x - 1}{x^2 + 1}$ a la même limite que $\dfrac{x^3}{x^2} = x$, d'où $+\infty$ ou $-\infty$
3. $\dfrac{x^2 - x}{x^3 + x^2}$ a la même limite que $\dfrac{x^2}{x^3} = \dfrac{1}{x}$, d'où 0.

- Généralisation de la règle précédente : méditer les 2 exemples suivants :

$\sqrt{x^2} = |x|$

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2}}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x}\right) = 1.$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2}}{x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{-x}{x}\right) = -1$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2}}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2x}{2x}\right) = 1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2}}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{2x}{-2x}\right) = -1$

◊ *Forme* $\frac{0}{0}$

● Si $\frac{f(x)}{g(x)}$ prend la forme $\frac{0}{0}$ pour $x = a$ (fini), on peut souvent mettre ***(x - a) en facteur*** dans $f(x)$ et dans $g(x)$, et la simplification correspondante permet de conclure.

● Dans le même cas, on peut souvent "prévoir" la limite par la règle de ***l'Hopital*** (mais cela ne dispense pas d'une preuve correcte) :

- Si $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ est déterminée pour $x = a$, la limite est $\frac{f'(a)}{g'(a)}$.

Sinon, on passe à $\frac{f''(x)}{g''(x)}$ et $\frac{f''(a)}{g''(a)}$, etc...

☆ Exemple : $\frac{\sqrt{2x-1} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{3-x} - \sqrt{5-3x}}$ prend la forme $\frac{0}{0}$ pour $x = 1$.

- Il n'est pas facile de faire apparaître le facteur $(x-1)$.
- En dérivant le numérateur $f(x)$, on obtient $f'(1) = \frac{3}{2}$.
- En dérivant le dénominateur $g(x)$, on obtient $g'(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- La limite serait donc $\frac{3}{\sqrt{2}}$: le lecteur peut le prouver à l'aide de la formule $a - b = \frac{a^2-b^2}{a+b}$ appliquée "haut et bas".

◊ ***Autres formes*** : on essaiera de se ramener à un cas précédent, ou bien : voir Log ou exp s'il y a lieu (Chapitre 16 ou 17).

$0 \times \infty$

◊ *Autres cas.*

● Lorsque $x \to 0$, on peut utiliser des "approximations", par exemple : $(1+x)^\alpha \simeq 1 + \alpha x$ (α exposant quelconque)

$\text{Log}(1+x) \simeq x$, $e^x \simeq 1 + x$

Si $x(\text{rad}) \simeq 0$: $\sin x \simeq x$, $\text{tg}\, x \simeq x$, $\cos x \simeq 1 - \frac{x^2}{2}$.

● Lorsque $x \to a$ (fini), on peut toujours se ramener au cas précédent en posant $x = a + X$,

(en effet, $x \to a$ est équivalent logiquement à $X \to 0$).

● Lorsque x tend vers un infini, de même $x = \frac{1}{X}$ ramène au cas $X \to 0^+$ ou au cas $X \to 0^-$.

4° - CONTINUITE.

◆ Définition : f est continue pour $x = a$ (fini) lorsque

$\boxed{f(a) \text{ existe et } \lim\limits_{x\to a} [f(x)] = f(a)}$

◊ Lorsque f est continue pour tout point a d'un intervalle I, on dit que f est continue sur I.

★ f est continue à droite (au point a) lorsque $f(a)$ existe, et $\lim\limits_{x\to a^+} [f(x)] = f(a)$. De même à gauche, avec $\lim\limits_{x\to a^-}$.

◆ Ensembles de fonctions continues

- On note $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui sont continues sur $\mathbb{R}$ (notamment, on a $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$).

- Les fonctions constantes, polynômes, sin, cos, exp, sont éléments de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

- Egalité : $f = g$ lorsque : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x)$.

- Somme : $f + g$ est la fonction h telle que :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) + g(x)$.

- **Produit** : fg est la fonction h telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ h(x) = f(x) \times g(x).$$
- **Composée** : $g \circ f$ est la fonction h telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ h(x) = g[f(x)]$$
- **Produit par λ réel** : de même, λf est h telle que $h(x) = \lambda \times f(x)$.

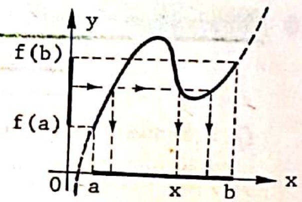
☐ A l'aide de ces opérations, on peut munir $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de diverses structures, rappelées au chapitre 26.

♦ **Propriété fondamentale**

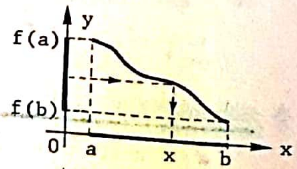
> Si f est continue sur un intervalle I, l'image (notée $f(I)$) de cet intervalle est un intervalle.

★ Conséquences

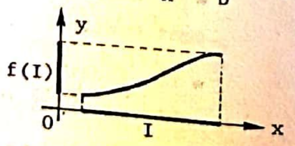
1. **Théorème des valeurs intermédiaires.**
Si f (non constante) est continue sur $[a,b]$, et si $f(a) \neq f(b)$, alors toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ provient d'un point x (au moins) de $[a,b]$.



2. Si f est continue et strictement monotone sur $[a,b]$, le point x précédent est unique, et f est injective sur $I = [a,b]$



Alors, f définit une bijection de I sur $f(I)$. (les schémas illustrent les 2 cas : l'un pour $f\searrow$, l'autre pour $f\nearrow$).



3. Suite du 2 : on peut écrire la bijection réciproque :
$$f^{-1} : \left| \begin{array}{l} f(I) \longrightarrow I \\ x \longrightarrow f^{-1}(x) \end{array} \right.$$

Les courbes représentatives (repère orthonormé) sont symétriques par rapport à la bissectrice de $\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}$ (chapitre 1).
f et f^{-1} sont de même monotonie, (si l'une est croissante, l'autre aussi ; de même pour décroissante).

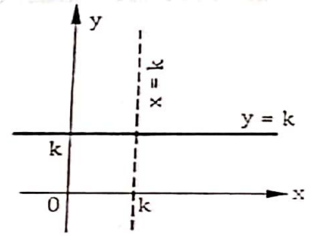
5° - FONCTIONS USUELLES.

☐ Dans les rappels suivants, on se borne à donner le "nom" de f s'il y a lieu, l'expression $f(x)$, puis le nom de C_f et un schéma en axes orthonormés.

♦ **Fonction constante** $f(x) = k$, droite parallèle à Ox.

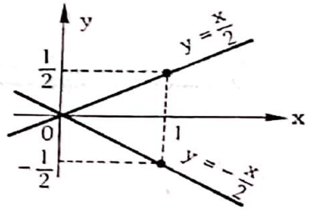
- La droite passe par le point $(0,k)$.

★ Les parallèles à Oy "échappent" à ce type de fonction, leurs équations sont de type $x = k$.



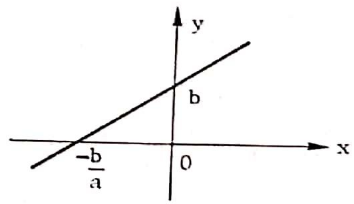
♦ **Fonction linéaire** $f(x) = ax$ $(a \neq 0)$, droite passant par 0.

- La droite passe aussi par le point $(1,a)$.
- Si $a > 0$, la droite est "montante", $(f\nearrow)$.
Si $a < 0$, la droite est "descendante", $(f\searrow)$.



♦ **Fonction affine** $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$, droite ne passant pas par 0.

- La droite passe par les points particuliers $(-\frac{b}{a}, 0)$ sur Ox, et $(0,b)$ sur Oy.

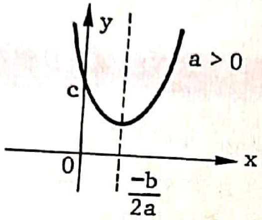


★ Deux droites sont parallèles, si et seulement si leur coefficient directeur a est le même.

♦ **Fonction du second degré** $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$, parabole.

• La parabole a un axe de symétrie, d'équation $x = \frac{-b}{2a}$.

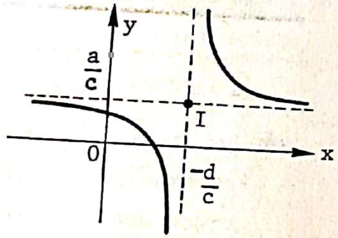
• La concavité est "vers $y > 0$" si $a > 0$, vers $y < 0$ si $a < 0$.



♦ **Fonction homographique** $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$; a, b non nuls ensemble), hyperbole.

• L'hyperbole a 2 asymptotes, parallèles aux axes, d'équations $y = \frac{a}{c}$ pour l'une, $x = \frac{-d}{c}$ pour l'autre.

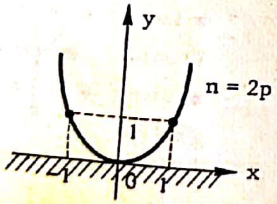
• Le point I d'intersection des asymptotes est centre de symétrie et les bissectrices des asymptotes sont axes de symétrie.



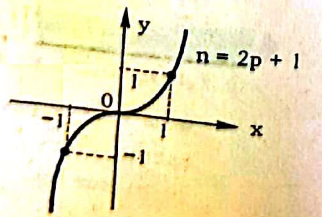
♦ **Fonctions "puissance n"** $f(x) = x^n (n \in \mathbb{N})$

• Les cas $n = 0, 1, 2$ sont déjà rappelés. Ensuite :

• Si n est pair ($n = 2p$), la courbe possède un sommet à l'origine, et l'axe Oy pour axe de symétrie.



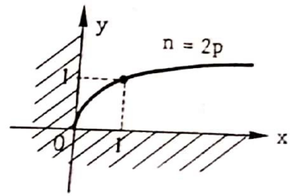
• Si n est impair ($n = 2p + 1$), la courbe possède un point d'inflexion à l'origine, avec pour tangente Ox. Ce même point est centre de symétrie de la courbe.



♦ **Fonctions "racine nième"** $f(x) = \sqrt[n]{x} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

• Le cas $n = 1$ donne $f(x) = x$ (linéaire). Ensuite :

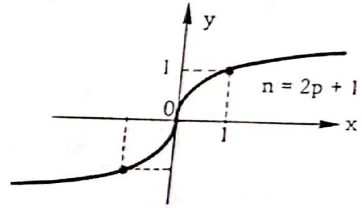
• Si n est pair ($n = 2p$), $f(x)$ n'existe que pour x positif ou nul ; alors, on peut écrire $\sqrt[2p]{x} = x^{\frac{1}{2p}}$.



• Si n est impair ($n = 2p + 1$), $f(x)$ existe pour tout x ; on peut écrire :

$$\sqrt[2p+1]{x} = x^{\frac{1}{2p+1}}$$

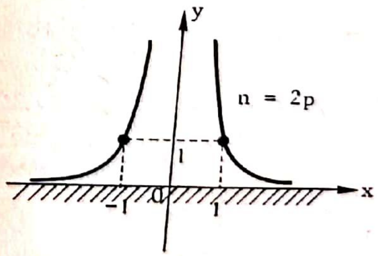
Dans ce cas, le point 0 est centre de symétrie de la courbe, c'est aussi un point d'inflexion "par dérivée infinie".

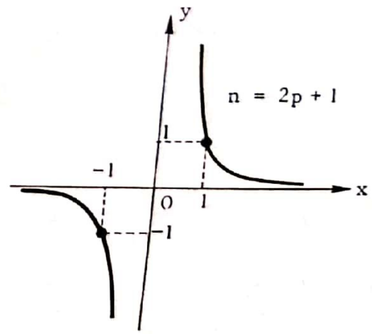


♦ **Fonctions $1/x^n$** $(n \in \mathbb{N}^*)$

• On peut écrire : $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$, x doit être non-nul.

• Les courbes présentent des aspects différents suivant la parité de n, les axes de coordonnées sont les asymptotes, Oy est axe de symétrie si n est pair, l'origine est centre de symétrie si n est impair.



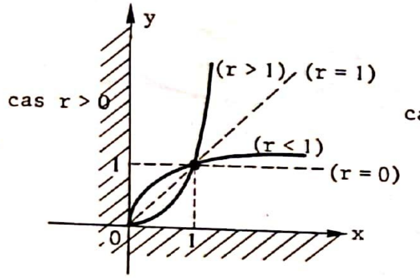


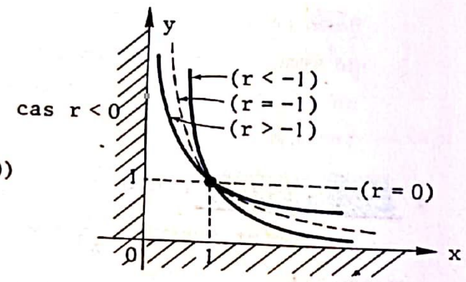
♦ Fonctions x^r ($r \in \mathbb{Q}$)

● A partir des cas précédents, on généralise aux exposants rationnels quelconques, de type $r = \frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$ d'après chapitre 5, $\mathbb{Q}$).

● Bien que $f(x) = x^{\frac{p}{q}}$ soit dans certains cas définie pour des valeurs négatives de x, on n'admet que le domaine $\mathbb{D}$ tel que $x > 0$.

● Les schémas montrent les allures des courbes représentatives.





● Il est entendu que l'on admet le domaine $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^*$) si l'on est dans des cas x^n, $\sqrt[n]{x}$ ou $\frac{1}{x^n}$.

CHAPITRE 9

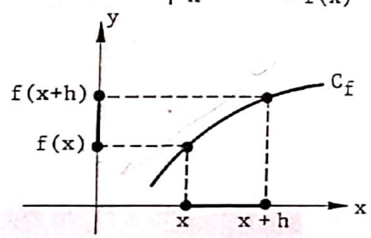
DERIVEES. DIFFERENTIELLES.

1° - DEFINITIONS GENERALES.

☐ Toutes les fonctions envisagées ici sont de type $f : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow f(x) \end{vmatrix}$

● $\mathcal{D}_f$ et C_f désignent le domaine de définition et une courbe représentative.

● x et x + h sont deux valeurs appartenant au domaine $\mathcal{D}_f$ et h est un paramètre "proche de 0".



♦ f est dérivable au point x lorsque le rapport

$$\boxed{r_x(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ admet une limite finie quand } h \longrightarrow 0.}$$

☐ Lorsque f est dérivable au point x, on appelle la limite de $r_x(h)$: nombre dérivé de f au point x.

☆ Exemple : si $f(x) = x^2$, au point 3 on a : $r_3(h) = \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h}$, d'où $r_3(h) = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h$, d'où le nombre dérivé : 6.

Lim

♦ L'application qui, à tout point x où f est dérivable, fait correspondre le nombre dérivé en ce point, est notée f' ou $\frac{df}{dx}$ et appelée ***dérivée de f.***

● L'ensemble D' des x, tels que f'(x) soit le nombre dérivé de f au point x, vérifie $D' \subset \mathcal{D}_f$ (on peut avoir $D' = \mathcal{D}_f$), et on dit que f est dérivable sur D'.

☆ Exemple : si $f(x) = x^2$, au point x supposé fixé on a :

$r_x(h) = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$, d'où $r_x(h) = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$, d'où

$f'(x) = 2x$; dans ce cas, $D' = \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

□ Pour un point x particulier, il peut n'exister pour $r_x(h)$ qu'une limite à droite $(h \to 0^+)$, dans ce cas f est seulement dérivable à droite au point x ; de même pour dérivable à gauche (avec $h \to 0^-$).

★ Dérivable au point x signifie dérivable à droite et à gauche, avec limites égales pour $r_x(h)$.

◊ Si f est dérivable au point x, f est continue en ce point.

◊ Si f est dérivable sur D', f est continue sur D'.

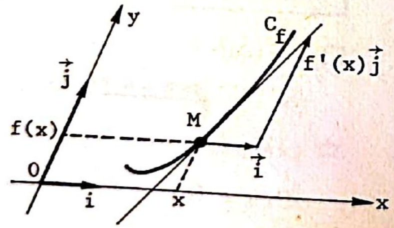
◊ Une fonction continue n'est pas nécessairement dérivable.

2° - INTERPRETATION GRAPHIQUE DES NOMBRES DERIVES.

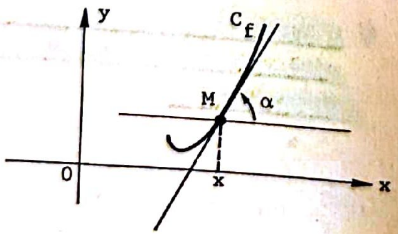
□ On considère une fonction f ayant un nombre dérivé $f'(x)$ au point x (fixé), et une représentation graphique C_f. Le point $(x, f(x))$ est noté M.

♦ Interprétation

Au point M de C_f, la tangente à C_f est dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix}$.



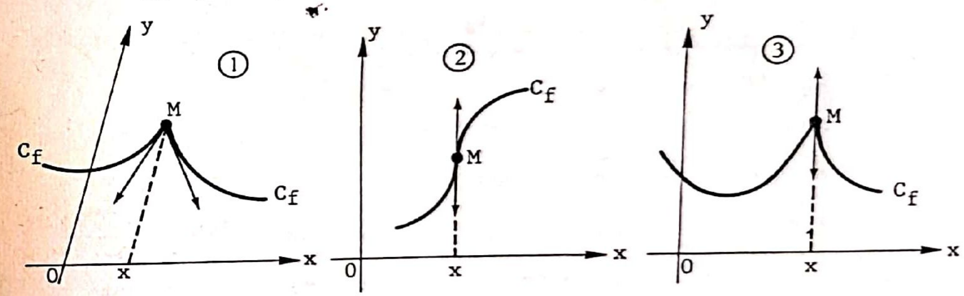
★ Dans le cas d'un repère orthonormé, si α est la mesure d'un angle de cette tangente avec la droite Ox, on a : $\text{tg}\,\alpha = f'(x)$.



● Cas divers

① Si f est seulement dérivable à droite au point x, C_f admet au point M une demi-tangente à droite (de même à gauche). Le schéma ① illustre le cas : f continue, dérivable à droite, dérivable à gauche, les limites correspondantes de $r_x(h)$ étant différentes.

② Si $r_x(h)$ tend vers un infini, f n'est pas dérivable au point x. Cependant, si f est continue au point x, il existe au point M une tangente parallèle à Oy. Par abus, on peut parler de dérivée infinie, les schémas ② et ③ illustrent deux cas parmi plusieurs.



3° - FORMULES DE DERIVATION.

Les tableaux suivants permettent de calculer des nombres dérivés ou d'exprimer des fonctions dérivées.

f(x)	f'(x)
Constante K	0
x^n	nx^{n-1} $(n \in \mathbb{N})$
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$ $(n \in \mathbb{N})$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$ (α exposant quelconque)

f(x)	f'(x)
sin x	cos x
cos x	−sin x
tg x	$(1 + \text{tg}^2 x)$ ou $\frac{1}{\cos^2 x}$
cotg x	$-(1 + \text{cotg}^2 x)$ ou $\frac{-1}{\sin^2 x}$
Log|x|	$\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$
e^x	e^x

Les formules suivantes permettent d'exprimer des dérivées dans la plupart des cas usuels (f, u, v, w sont supposées dérivables).

- Sommes $\quad f = u + v - w \Rightarrow f' = u' + v' - w'$
- Produit $\quad f = uv \quad \Rightarrow f' = u'v + uv'$
- Rapport $\quad f = \frac{u}{v} \quad \Rightarrow f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- Puissance α $\quad f = u^\alpha \quad \Rightarrow f' = \alpha u^{\alpha-1}u'$ (α exposant quelconque)
- Produit par λ $\quad f = \lambda u \quad \Rightarrow f' = \lambda u'$ si λ est constant

★ Composée de plusieurs fonctions dérivables.

Si $f = u o v o w$, autrement dit : si $f(x) = u(v[w(x)])$,

$f'(x) = u'(v) \times v'(w) \times w'(x)$, formule imparfaite mais très utile.

☆ Exemple : $f(x) = \cos(\sqrt{x^2-1})$, on veut $f'(x)$.

- On décompose f en posant : $f(x) = u$, $u = \cos v$, $v = \sqrt{w}$, $w(x) = x^2 - 1$,
- on obtient : $u'(v) = -\sin v$, $v'(w) = \frac{1}{2\sqrt{w}}$, $w'(x) = 2x$,
- d'où $f'(x) = \underbrace{-\sin(\sqrt{x^2-1})}_{u'(v)} \times \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}}_{v'(w)} \times \underbrace{2x}_{w'(x)} = \frac{-x\sin(\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2-1}}$
- il est entendu qu'on doit appliquer la formule en exprimant tous les termes en fonction de x.

☆ Exemples usuels : $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$ est donnée plus haut.

$(\mathrm{Log}|u|)' = \frac{u'}{u}$, $(e^u)' = e^u \times u'$, $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$, $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$, etc.

4° - CAS DES FONCTIONS RECIPROQUES.

☐ Sur un domaine I, si f est dérivable on sait que f est continue ; si de plus f est strictement monotone, on sait qu'elle définit une bijection. Dans ces conditions, la fonction réciproque f^{-1} vérifie $f \circ f^{-1}(x) = x$ et $f^{-1} \circ f(x) = x$ (sur I).

- Posant $f(x) = X$ pour simplifier, on obtient $f^{-1}(X) = x$.
- Dérivant comme une fonction composée, on a $(f^{-1})'(X) \times X' = 1$

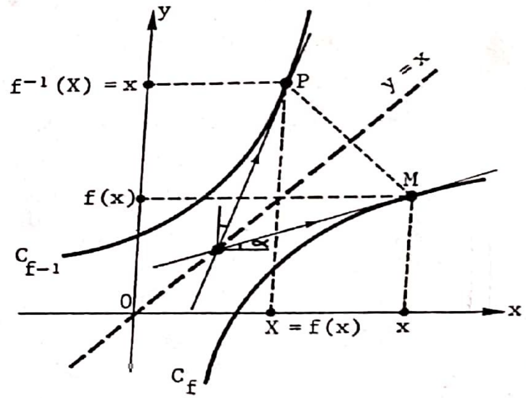
en d'autres termes : $(f^{-1})'(X) = \frac{1}{f'(x)}$

- Pour tout point X de $f(I)$, f^{-1} est dérivable, et l'on peut énoncer :

> Au point x, f a pour nombre dérivé $f'(x)$
> Au point $X = f(x)$, f^{-1} a pour nombre dérivé $\frac{1}{f'(x)}$

★ Si l'on admet les "dérivées infinies", cela reste valable pour $f'(x) = 0$.

☐ Interprétation graphique



- En repère orthonormé par exemple, le résultat précédent se traduit par la propriété géométrique suivante :
- En des "points réciproques" P et M des courbes représentatives de f^{-1} et f, les tangentes à ces courbes ont des pentes inverses l'une de l'autre.
- On pouvait prévoir ce résultat à l'aide de la relation $\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}$, puisque M, P, et les tangentes correspondantes sont symétriques par rapport à la 1ère bissectrice ($y = x$).

5° - DIFFERENTIELLES. DERIVEES SUCCESSIVES.

● ***Différentielles.***

En tout point x_0 où f est dérivable, on appelle :

différentielle de f en x_0

la fonction linéaire, de schéma $\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow f'(x_0) \times x \end{array}$

$f'(x) = 2x$

☆ Exemple : si $f(x) = x^2$, on obtient :

- Au point $x_0 = 2$, la différentielle a pour schéma $\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow 4x \end{array}$

Au point $x_0 = -3$, la différentielle a pour schéma $\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow -6x \end{array}$

★ Remarque : dans un même système d'axes, la tangente à C_f au point M_0 (d'abscisse x_0), et la droite issue de 0 représentant la différentielle en x_0, sont parallèles (même coefficient directeur $f'(x_0)$).

☐ Notations : pour des raisons qui ne peuvent pas être exposées dans ce livre, on désigne la différentielle de f au point x_0 par l'une des notations dy ou $f'(x_0)dx$.

- En pratique, on retiendra et utilisera sans justification :

$$\boxed{dy = f'(x)dx} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = f'(x)}$$

on pourra écrire $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x)}$, et l'on pourra appliquer ces formules à toute notation autre que y et x ; par exemple, si $x = g(t)$, on a $dx = g'(t)dt$. Ceci sera très utile pour les intégrales (chapitre 15).

Oh oui !

● ***Dérivées successives***

☐ A la manière dont on passe de f à f', si l'on peut passer de f' à ses nombres dérivés puis à sa dérivée, on dit que cette dernière est la dérivée seconde de f, et que f est deux fois dérivable.

- La dérivée seconde est notée f'' ou $\frac{d^2f}{dx^2}$

- Si l'on peut continuer, on obtient la dérivée troisième, notée f''' ou $\frac{d^3f}{dx^3}$, etc...
- Cas général : au rang n, on dit dérivée $n^{\text{ième}}$

on note : $f^{(n)}$ ou $\frac{d^nf}{dx^n}$.

☆ Exemples

1. Si $f(x) = x^3 + 3x + 2$, on a $f'(x) = 3x^2 + 3$, $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6$, puis $f^{(n)}(x) = 0$ pour $n \geqslant 4$.

2. Si $f(x) = \sin x$, on a $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$ donc $f'' = -f$, ce qui prouve : $f''' = -f'$, $f^{(4)} = -f''$ donc $f^{(4)} = f$; et "tout recommence".

6° - COMPLEMENTS.

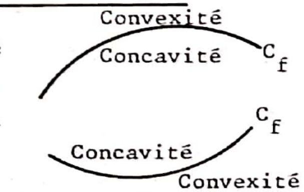
♦ ***Théorème*** : si f est dérivable,
- f est croissante lorsque $f'(x)$ est positive.
- f est décroissante lorsque $f'(x)$ est négative.

☐ Ce théorème (cité au chapitre 8) est admis, au niveau de ce livre.

♦ ***Théorème*** : si deux dérivées f' et g' sont égales sur un domaine I, les fonctions correspondantes diffèrent d'une constante, c'est-à-dire :

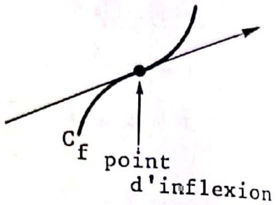
$$(f'(x) = g'(x),\ \forall x \in I) \Longrightarrow (f(x) = g(x) + K,\ \forall x \in I).$$

☐ ***Concavité*** : la notion intuitive de concavité d'une courbe (plane) C_f résulte des schémas. On peut dire que la concavité correspond à la notion courante d'"intérieur d'un virage".



● Graphiquement (si f est 2 fois dérivable) la concavité est "du côté y positif" lorsque $f''(x)$ est positive, "du côté y négatif" lorsque $f''(x)$ est négative.

☐ Inflexion : une notion intuitive d'inflexion est donnée par le "changement de côté" de la concavité, un point d'inflexion correspondant à l'endroit précis où la concavité "change de côté".

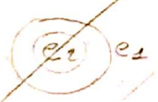


● Graphiquement, en un point d'inflexion, on peut dire que la courbe "traverse sa tangente".

● Les points d'une courbe d'équation y = f(x) (f 2 fois dérivable), pour lesquels f"(x) s'annule avec changement de signe, sont des points d'inflexion.

● La propriété précédente n'est pas caractéristique, il existe des points d'inflexion où f"(x) "est infinie", et des points où f"(x) est nulle sans qu'il y ait inflexion ; on peut trouver des exemples au chapitre 8, 5°).

$p(e_2/e_1) = \frac{p(e_2 \cap e_1)}{p(e_1)} = \frac{p(e_2)}{p(e_1)}$



$e_2 \cap e_1 = e_2$

CHAPITRE 10

PROBABILITES. AXIOMES

1° - INTRODUCTION.

☐ Soit un phénomène ou une expérience dont l'issue paraît soumise au hasard, par exemple le jet d'un dé à jouer, le tirage de 4 cartes d'un jeu de 32, etc... On ne peut pas prédire le résultat, mais on peut "mathématiser les choses". oui ! oui !

● En langage courant, lorsqu'on joue à pile ou face avec une pièce de monnaie, on dit qu'on a "une chance sur deux" d'avoir pile, et de même pour face.

● On sait bien qu'en jouant deux fois, il ne sort pas obligatoirement un pile et un face, malgré leur "chance sur deux" respective.

☐ La théorie des probabilités a pour but de préciser et de chiffrer les notions relatives aux phénomènes aléatoires (soumis au hasard).

★ Au niveau de ce livre, on se borne au cas des phénomènes dont les résultats possibles sont en nombre fini, ce qui permet des dénombrements (voir chapitre 3).

★ Le lecteur est vivement invité ~~à~~ ne pas traduire abusivement les résultats théoriques, car il n'est pas impossible qu'un résultat qui a "une chance sur dix" ne se produise pas, même en 500 expériences... oh !

Garde !

2° - DEFINITIONS.

Pour une expérience donnée (vraie ou imaginée), on appelle :

♦ **Evénement élémentaire** (ou cas possible) chacun des résultats qui pourrait être obtenu.

♦ **Evénement favorable** (ou cas favorable) chacun des résultats que l'on souhaite étudier ou obtenir.

☆ Exemple : dans le jet d'un dé à jouer usuel, il y a 6 cas possibles (obtention du 1, obtention du 2, ..., obtention du 6).

• Si l'on veut étudier l'obtention d'un résultat impair, il y a 3 cas favorables (obtention du 1, obtention du 3, obtention du 5).

♦ **Univers** : pour une expérience donnée, l'univers est l'ensemble (noté Ω) des événements élémentaires. ou cas possibles

♦ **Evénement** : un événement ("tout court") est une partie de Ω.

- La partie $\emptyset$ est l'événement impossible.
- Les parties à 1 élément sont les événements élémentaires.
- Les autres parties sont des événements.
- La partie pleine Ω est l'événement certain.

♦ **Ensemble des événements** : cet ensemble est $\mathcal{P}(\Omega)$, à ne pas confondre avec Ω.

☆ Exemples. Pour le jet d'un dé à jouer, si l'on symbolise chaque cas possible par le nombre correspondant, on a :

- $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$: univers.
- $\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset,\{1\},\{2\},\dots,\{2,3,4,5,6\},\Omega\}$: ensemble des événements.
- $\{2\}$: événement élémentaire "obtention du 2".
- $\{1,3,5\}$: événement "obtention d'un nombre impair".
- Ω (univers) est l'événement "obtention d'un résultat".

★ Remarque : on exclut de la théorie tout "faux problème" tel que : le dé reste en équilibre sur une arête... On pourrait convenir que ce genre de situation est $\emptyset$, bien que $\emptyset$ n'ait pas d'élément.

♦ **Evénements incompatibles** : deux événements e_1 et e_2 sont incompatibles, lorsque la réalisation de l'un exclut celle de l'autre.

$$e_1 \text{ et } e_2 \text{ incompatibles} \Leftrightarrow e_1 \cap e_2 = \emptyset$$

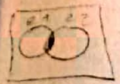
♦ **Evénements équiprobables** : événements qui ont des probabilités égales (la probabilité est définie au 4°).

♦ **Evénements indépendants** : deux événements sont indépendants lorsque la réalisation de l'un n'affecte pas la probabilité de l'autre (voir aussi 4°).

☐ Ne pas confondre indépendance et incompatibilité.

3° - NOTATIONS USUELLES.

☐ Soit un univers Ω, $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des événements correspondants, on désigne par e, e_1, e_2, ... des événements, c'est-à-dire des parties de Ω (ou des éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$) ; on peut envisager d'autres événements, en particulier les suivants :



● $e_1 \cap e_2$ (signifie e_1 et e_2) : événement qui est réalisé si et seulement si e_1 et e_2 sont réalisés "à la fois".

● $e_1 \cup e_2$ (signifie e_1 ou e_2) : événement qui est réalisé soit avec e_1 seul, soit avec e_2 seul, soit avec $e_1 \cap e_2$.

● $\bar{e}$ (signifie contraire de e), ou $\complement_\Omega e$, ou $\Omega - e$: $\bar{e}$ est réalisé si et seulement si e n'est pas réalisé.

● e_2 / e_1 (signifie e_2 sachant e_1) : événement tel que e_2 est réalisé en supposant que e_1 était réalisé.

☆ Exemples. Pour le jet d'un dé à jouer, on a déjà posé : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

On considère $e_1 = \{1,3,5\}$ (obtention d'un nombre impair)

$e_2 = \{1,2,3\}$ (obtention d'un nombre "petit").

$e_1 = \{1,3,5\}$
$e_2 = \{1,2,3\}$

• $e_1 \cap e_2 = \{1,3\}$ est l'obtention d'un nombre impair et petit.

• $e_1 \cup e_2 = \{1,2,3,5\}$, l'obtention d'un nombre impair ou petit.

• $\overline{e}_1 = \{2,4,6\}$, obtention de "tout sauf un impair", (donc d'un pair).

• e_2/e_1 : il s'agit de supposer e_1 réalisé, et dans cette hypothèse on examine e_2 ; e_2/e_1 est l'obtention d'un nombre "petit" dans le cas où le nombre est impair : on dénombre alors 3 cas possibles (1,3,5) et 2 cas favorables (1,3).

★ Pour e_2/e_1, tout se passe comme si l'univers était e_1.

4° - PROBABILITES. AXIOMES.

$\frac{e_2}{e_1} = \frac{\{1,2,3\}\ \text{petit}}{\{1,3,5\}\ \text{réalisé impair}}$

♦ **Définition** : une probabilité est une application, notée Prob, Pr ou P, de schéma

$$\text{Prob} : \left| \begin{array}{l} \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1] \\ e \longrightarrow \text{Prob}(e) \end{array} \right.$$

qui doit vérifier les deux axiomes :

1. $\text{Prob}(\Omega) = 1$ (le certain est de probabilité 1)
2. Si $e_1 \cap e_2 = \emptyset$, alors $\text{Prob}(e_1 \cup e_2) = \text{Prob}(e_1) + \text{Prob}(e_2)$

□ Commentaire : l'axiome 1 traduit la notion "100 % de chances", l'axiome 2 concerne les événements incompatibles : leur réunion a pour probabilité la somme des probabilités de chacun. Ces deux axiomes sont ceux des "mesures", l'application Prob réalise une "mesure des chances".

★ ***Probabilité « naturelle »*** : en réalité, une seule application traduit "raisonnablement" les notions intuitives, cette application est définie par :

$$\boxed{\text{Prob}(e) = \frac{\text{nombre de cas favorables à } e}{\text{nombre de cas possibles}}}$$

☆ Exemple. Pour le dé dont l'univers a déjà été noté $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

• Si $e = \{1,3,5\}$ on a $\text{Prob}(e) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

• $\text{Prob}(1) = \frac{1}{6}$, $\text{Prob}(2) = \frac{1}{6}$, ..., $\text{Prob}(6) = \frac{1}{6}$, autrement dit : les 6 résultats d'un jet sont équiprobables.

• $\text{Prob}(1 \text{ et } 2) = 0$, l'obtention de 1 exclut l'obtention de 2, autrement dit : 1 et 2 sont incompatibles.

• $\text{Prob}(1 \text{ ou } 2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, l'axiome 2 permettait de le prévoir $(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3})$.

• $\text{Prob}(\Omega) = \frac{6}{6} = 1$, car il y a autant de cas favorables que de possibles.

• $\text{Prob}(\emptyset) = 0$, car il n'y a aucun cas "favorable à rien", une fois le dé jeté il donnera un résultat (convention, fin du 2°).

◊ ***Propriétés essentielles.***

1. ● $\text{Prob}(e_1 \cup e_2) = \text{Prob}(e_1) + \text{Prob}(e_2) - \text{Prob}(e_1 \cap e_2)$ comme pour Card, et pour toute "mesure".
2. ● $\text{Prob}(\emptyset) = 0$, l'impossible a une probabilité nulle.
3. ● $\text{Prob}(\overline{e}) = 1 - \text{Prob}(e)$
4. ● $\text{Prob}(e_1 \cap e_2) = \text{Prob}(e_1) \times \text{Prob}(e_2/e_1) = \text{Prob}(e_2) \times \text{Prob}(e_1/e_2)$
5. ● Sauf $\text{Prob}(\emptyset) = 0$ et $\text{Prob}(\Omega) = 1$, toute valeur de Prob est strictement comprise entre 0 et 1.
6. ● Evénements indépendants : avec plus de précision qu'au 2°, on caractérise l'indépendance de e_1 et e_2 par :

$$\boxed{e_1 \text{ et } e_2 \text{ indépendants} \Leftrightarrow \text{Prob}(e_2/e_1) = \text{Prob}(e_2)}$$

★ Il revient au même de caractériser l'indépendance par la formule : $\boxed{\text{Prob}(e_1 \cap e_2) = \text{Prob}(e_1) \times \text{Prob}(e_2)}$

plus clair

□ Cette formule montre que "l'indépendance est réflexive", on peut échanger les rôles de e_1 et e_2 dans la définition. Lorsque l'indépendance n'a pas lieu, e_1 et e_2 sont dépendants.

5° - COMPLEMENTS.

| TRIBU

◆ Soit un univers Ω, et $\mathscr{P}(\Omega)$ l'ensemble des événements correspondants.

- Le couple $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega))$ est appelé espace probabilisable.

◆ Soit alors une application Prob définie comme au 4° (et vérifiant les axiomes).

- Le triplet $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),\text{Prob})$ est appelé espace probabilisé.

☐ En pratique, Prob est la probabilité "naturelle", mais cela n'exclut pas l'étude d'autres applications Prob "théoriquement valables".

☐ Cas général : si l'on n'étudie qu'une certaine catégorie d'événements relatifs à Ω, on ne s'intéresse qu'à certaines parties de Ω. Il est nécessaire que l'ensemble des parties étudiées possède certaines propriétés (sinon il est impossible de le probabiliser), les propriétés de tribu.

◆ Un sous-ensemble $\mathscr{B}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ est une tribu, lorsque :
1. $\Omega\in\mathscr{B}$ 2. $\forall e\in\mathscr{B} : \bar{e}\in\mathscr{B}$ 3. $\forall e\in\mathscr{B}, \forall e'\in\mathscr{B} : e\cup e'\in\mathscr{B}$

◆ Un espace probabilisable est un couple $(\Omega,\mathscr{B})$ où $\mathscr{B}$ est une tribu de $\mathscr{P}(\Omega)$.
$\mathscr{B}\subset\mathscr{P}(E)$

- $\mathscr{P}(\Omega)$ est une tribu, "la plus grande" possible.

◆ Un espace probabilisé est un triplet $(\Omega,\mathscr{B},\text{Prob})$, tel que :
1. $\mathscr{B}$ est une tribu de $\mathscr{P}(\Omega)$
2. Prob est une application $\left|\begin{array}{l}\mathscr{B}\longrightarrow[0,1]\\ e\longrightarrow\text{Prob}(e)\end{array}\right.$

qui vérifie les 2 axiomes déjà cités :
$\text{Prob}(\Omega)=1;\ e_1\cap e_2=\emptyset \Rightarrow \text{Prob}(e_1\cup e_2)=\text{Prob}(e_1)+\text{Prob}(e_2)$.

☆ Exemples. Pour $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ correspondant au jet d'un dé, $\mathscr{B}=\{\emptyset,\{1,3,5\},\{2,4,6\},\Omega\}$ est une tribu.
En posant $e_1=\{1,3,5\}$, $e_2=\{2,4,6\}$ et en prenant pour Prob

l'application définie sur $\mathscr{B}$ par :
$\text{Prob}(\emptyset)=0$, $\text{Prob}(e_1)=\text{Prob}(e_2)=\frac{1}{2}$, $\text{Prob}(\Omega)=1$,
on peut dire qu'on a probabilisé ce qui concerne les nombres pairs "en bloc", et les nombres impairs "en bloc" dans le jet d'un dé. On remarque l'analogie de ce "pair ou impair" avec "pile ou face".

CHAPITRE 11

VARIABLES ALEATOIRES

1° - INTRODUCTION.

☐ Au chapitre 10, on a symbolisé l'obtention d'un nombre par ce nombre, pour le jet d'un dé. D'une manière générale, il est nécessaire de symboliser les événements par des lettres ou des nombres, sinon l'on se perd dans des périphrases lourdes et incommodes.

☐ En pratique, on définit des "codages" des événements élémentaires à l'aide de valeurs numériques, le plus souvent prises dans $\mathbb{Z}$.

★ On commet un certain nombre d'abus, notamment celui où l'on définit une variable aléatoire comme étant une application, ainsi que celui où l'on confond cette application avec ses valeurs. Le lecteur ne s'y trompera pas. oui oui !

Sur deux

◆ **Définition** : l'univers Ω étant donné, on appelle variable aléatoire et on note X, toute application définie de Ω dans $\mathbb{R}$, permettant de décrire sans ambiguité les événements en les remplaçant par des valeurs numériques.

Schéma. $X : \begin{vmatrix} \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ e \longrightarrow X(e) \end{vmatrix}$ $= x \Leftrightarrow \boxed{e = X^{-1}(x)}$ $= (X = x)$ abus

Exploitant le

☆ Exemple et abus : au jeu de pile ou face, on peut décider de symboliser l'obtention de pile par P, de face par F ; puis on peut décider de "coder" P par 1, F par 0. On obtient ainsi la variable aléatoire $X : \Omega = \{P, F\} \longrightarrow \mathbb{R}$

définie par : $\begin{cases} P \longrightarrow X(P) = 1 \\ F \longrightarrow X(F) = 0 \end{cases}$

Nacguerelle

● Un abus très fréquent : écrire $X = 1$ pour désigner P, et $X = 0$ pour F.

● En toute rigueur, on doit écrire $P = X^{-1}(1)$ et $F = X^{-1}(0)$.

☐ En pratique, l'emploi de variables aléatoires facilite l'étude des probabilités proprement dites, à condition de "transposer" convenablement Prob.

☆ Exemple : reprenant l'exemple précédent, on pose :

$P=(X=1)$

$\text{Prob}(X=1) = \frac{1}{2}$ puisque $\text{Prob}(P) = \frac{1}{2}$, et $\text{Prob}(X=0) = \frac{1}{2}$ de même.

● On pourra donc s'intéresser à $\text{Prob}(X=x)$ pour différentes valeurs de x, de même qu'à $\text{Prob}(X \leqslant x)$, etc...

2° - FONCTIONS ASSOCIEES A UNE VARIABLE ALEATOIRE.

☐ Généralement, on utilise deux fonctions pour décrire un phénomène à l'aide d'une variable aléatoire X, ce sont les suivantes :

◆ Loi de probabilité (ou distribution de probabilité) :

fonction f, de schéma $f : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow f(x) = P(X=x) \end{vmatrix}$

définie par $f(x) = \text{Prob}(X=x)$

NB

◆ Fonction de répartition (ou fonction cumulative) : densité de probabilité

fonction F, de schéma $F : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow F(x) = P(X \leqslant x) \end{vmatrix}$ $= \frac{dF(x)}{dx}$

définie par $F(x) = \text{Prob}(X \leqslant x)$

☆ Exemple : soit un univers de 3 événements élémentaires représentés par $X = -2$, $X = 1$, $X = 3$ avec les probabilités respectives $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ (de somme 1).

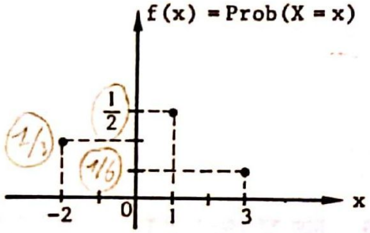
● Loi de probabilité : $f(x) = \text{Prob}(X=x)$ s'étudie directement.

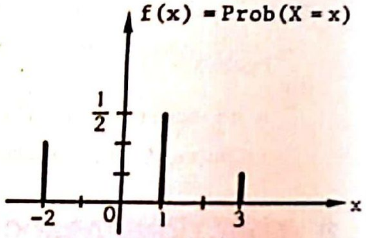
. $x \notin \{-2, 1, 3\} \Rightarrow f(x) = 0$ car $(X=x)$ est impossible, de probabilité nulle. $= f(x)$

$\Leftrightarrow F(x) = \int f(x)\, dx$

• $x = -2 \Rightarrow f(-2) = \text{Prob}(X = -2) = \frac{1}{3}$, de même $f(1) = \frac{1}{2}$ et $f(3) = \frac{1}{6}$.

• On obtient trois points hors de l'axe Ox, tous les autres sur cet axe ; on a coutume de ne tracer que les segments "verticaux" correspondants, d'où le diagramme en bâtons ci-dessous.





Attention

$P(X=-2) = 1/3$
$P(X=1) = 1/2$
$P(X=3) = 1/6$

• Fonction de répartition : $F(x) = \text{Prob}(X \leqslant x)$ s'étudie directement.

• Pour x fixé tel que $x < -2$, $X \leqslant x$ signifie $X < -2$, événement impossible, d'où $F(x) = 0$.

-2 • Pour $x = -2$, $X \leqslant x$ se réduit à $X = -2$, d'où $F(-2) = \frac{1}{3}$.

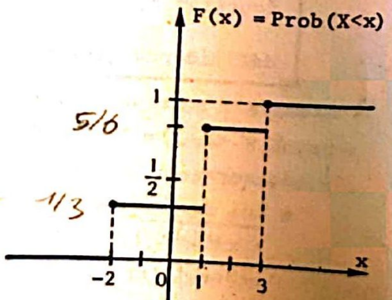
• Pour x fixé dans $[-2, 1[$, $X \leqslant x$ se réduit à $X = -2$, d'où $F(x) = \frac{1}{3}$.

1 • Pour $x = 1$, $X \leqslant x$ se réduit à $(X = -2) \cup (X = 1)$ d'où $F(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

• Pour x fixé dans $[1, 3[$, de même $F(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

3 • Pour $x = 3$, comme pour x fixé supérieur à 3, de même $F(x) = 1$.

• On obtient une représentation graphique "en escalier", ou courbe cumulative.



★ Remarques

1. Pour la loi de probabilité f, les valeurs sont dans [0,1] et la somme des valeurs est 1.
2. Pour la fonction de répartition F,
   $F(x) = 0$ pour tout x inférieur à la plus petite des valeurs de X,
   $F(x) = 1$ pour tout x supérieur (ou égal) à la plus grande.
   F est une fonction en escalier, croissante.

3°- VALEURS NUMERIQUES ASSOCIEES A UNE VARIABLE ALEATOIRE

☐ Généralement, on utilise trois valeurs numériques pour décrire un phénomène à l'aide d'une variable aléatoire X. $P(X = x_i)$

☐ Notations : les valeurs de X sont notées $x_1, x_2, \ldots, x_n$
les probabilités respectives : $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$

1 ◆ Espérance mathématique (ou moyenne) de X :
• Nombre noté E(x), ou m, défini par : $E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} [x_i \times f(x_i)]$

2 ◆ Variance de X, notée V(X), définie par $V(X) = \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - m)^2 \times f(x_i)$

• Cela revient à : $E(X)$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{i=n} [x_i^2 \times f(x_i)] - [E(x)]^2$$

3 ◆ Ecart-type (ou coefficient de dispersion) de X :
• Nombre noté $\sigma(X)$, défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

☆ Exemple : reprenant $X \in \{-2, 1, 3\}$ avec probabilités $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}$ (du 2°)

On obtient :

$$E(X) = -2 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}, \text{ ou } m = \frac{1}{3}$$

• Par la 1ère formule, $V(X) = \left(-2 - \frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} + \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{2} + \left(3 - \frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{6}$

• Par la 2ème formule, $V(X) = +4 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{2} + 9 \times \frac{1}{6} - \frac{1}{9}$

$[E(x)]^2 = (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$

- d'où $V(X) = \frac{29}{9}$
- On a donc $\sigma(X) = \frac{\sqrt{29}}{3}$, d'où $\sigma(X) \simeq \frac{5,4}{3} = 1,8$.

☐ Interprétations

- E(X) peut s'interpréter comme la "moyenne" des valeurs de X qui résulterait d'une infinité d'expériences. Elle n'est pas nécessairement l'une des valeurs attribuées à X.
- V(X) n'a pas d'interprétation simple, au niveau de ce livre.
- σ(X) peut s'interpréter comme un "écart" moyen entre la moyenne théorique E(X) et celle qu'on pourrait observer en réalisant des expériences ; le lecteur l'interprétera mieux à l'aide du chapitre 12 (3° et 4°). oui

4°- OPERATIONS SUR LES VARIABLES ALEATOIRES

◆ **Variables aléatoires indépendantes** : X et Y sont indépendantes, lorsque

tout événement relatif à X est indépendant de tout événement relatif à Y.

☐ En pratique : X et Y indépendantes signifie (pour tous x et y)

$$\text{Prob}[(X = x) \cap (Y = y)] = \text{Prob}(X = x) \times \text{Prob}(Y = y)$$

☐ Dans ce qui suit, il est entendu qu'il ne s'agit que de variables aléatoires indépendantes (ce qui explique les produits de probabilités qui interviennent).

◆ **Somme de X et Y** (indépendantes)

Z = X + Y est la variable aléatoire qui prend pour valeurs toutes les sommes possibles d'une valeur de X et d'une valeur de Y, avec la probabilité produit des probabilités respectives des termes.

De même pour X − Y, avec les différences "dans l'ordre $x_i - y_i$", et la probabilité : produit des probabilités des termes.

◆ **Produit de X et Y** (indépendantes)

T = XY est la variable aléatoire qui prend pour valeurs tous les produits possibles d'une valeur de X et d'une valeur de Y, avec la probabilité produit des probabilités respectives des termes.

◆ **Produit de X par la constante λ** (homothétie de rapport λ), avec $\lambda \neq 0$

X' = λX est la variable aléatoire qui prend pour valeurs les produits par λ des valeurs de X, avec la probabilité inchangée.

☆ Exemples : X et Y sont supposées indépendantes, et données à l'aide de tableaux.

X

Valeurs	−2	1	3
Probabilités	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Y

Valeurs	0	2
Probabilités	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

● Somme : on peut dresser 2 tableaux, l'un pour les sommes de valeurs, l'autre pour les produits des probabilités respectives.

Y \ X	−2	1	3
0	−2	1	3
2	0	3	5

Y \ X	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

- La valeur 3 est obtenue dans deux cas, qui sont évidemment incompatibles, on lui attribue donc la somme des probabilités $\frac{1}{12}$ et $\frac{1}{4}$ de chaque cas, soit $\frac{1}{3}$.

- On obtient : X + Y

Valeurs	−2	0	1	3	5
Probabilités	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$

- **Produit** : de même, on construit le tableau des produits des valeurs, celui des produits de probabilités est le même que le précédent.

X / Y	-2	1	3
0	0	0	0
2	-4	2	6

X / Y	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

- La valeur 0 est obtenue dans trois cas (incompatibles), on prend donc la probabilité $\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$, comme déjà dit plus haut.

- On obtient : XY

Valeurs	-4	0	2	6
Probabilités	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

Propriétés.

- E est linéaire : $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
  $E(\lambda X) = \lambda E(X)$

  Pour $X - Y$, $E(X-Y) = E(X) - E(Y)$
- Il se trouve que : $E(XY) = E(X)\,E(Y)$

  Ceci est dû à l'indépendance de X et Y.
- V et σ ne sont pas linéaires, cependant on a :

  $\boxed{V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)}$, les variances s'ajoutent dans les 2 cas.

  $\boxed{V(\lambda X) = \lambda^2 V(X)}$, d'où $\boxed{\sigma(\lambda X) = |\lambda|\sigma(X)}$

$N = 10$ $N_1 = 8$ Noires
$N_2 = 2$ Blanches

$n_1 = 3N$ $n = 5$
$n_2 = 2B$

$P(3N, 2B) = C_5^3\left(\frac{8}{10}\right)^3\left(\frac{2}{10}\right)^2$

CHAPITRE 12

LOIS ET THEOREMES DE PROBABILITES

$N = N_1 + N_2$

1° - TIRAGES DE BOULES.

☐ Notations. Une urne contient 2 sortes de boules, les indices 1 sont relatifs à une sorte, les indices 2 à l'autre. Le nombre total de boules est N, décomposé en N_1 et $N_2 = N - N_1$. Le nombre de boules tirées est n, décomposé de même en n_1 et n_2.

★ On suppose que chaque boule a la même probabilité d'être tirée que toute autre boule de l'urne, lors d'un tirage déterminé.

♦ **Tirage sans remise** (ou exhaustif) : chaque boule tirée est conservée, elle ne participe pas au tirage de la suivante, ou bien l'on tire "en bloc" les n boules ; on doit avoir $n \leqslant N$, $n_1 \leqslant N_1$, $n_2 \leqslant N_2$.

Loi des tirages sans remise : $\boxed{Prob(n_1, n_2) = \frac{C_{N_1}^{n_1} \times C_{N_2}^{n_2}}{C_N^n}}$

♦ **Tirage avec remise** (ou Bernoullien) : chaque boule tirée est examinée puis remise dans l'urne avant le tirage de la suivante, chaque tirage d'une boule est supposé indépendant des autres, et il n'y a pas de limitation de n, n_1 et n_2.

Loi des tirages avec remise : $\boxed{Prob(n_1, n_2) = C_n^{n_1}\left(\frac{N_1}{N}\right)^{n_1}\left(\frac{N_2}{N}\right)^{n_2}}$

★ On peut généraliser à 3, 4,.... sortes de boules dans la même urne.

2° - LOI BINOMIALE.

☐ La loi binômiale n'est autre que la loi des tirages avec remise, exprimée en termes de variables aléatoires.

- Soit l'univers Ω, soit e un événement $(e \in \mathcal{P}(\Omega))$, on pose $\text{Prob}(e) = p$. L'événement contraire de e est $\bar{e} = \Omega - e$, on a $\text{Prob}(\bar{e}) = q = 1 - p$.

- On imagine l'épreuve correspondante répétée n fois, chaque fois indépendante des autres, et l'on compte le nombre de fois où l'événement choisi e se réalise : soit X ce nombre.

- On peut écrire $X \in \{0, 1, 2, \ldots, k, \ldots, n\}$.

Loi binômiale : loi de probabilité de X, ou $\boxed{f(x) = \text{Prob}(X = x)}$

- Si $x \notin \{0, 1, \ldots, n\}$, on a $\text{Prob}(X = x) = 0$

Si $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, on écrit $\text{Prob}(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

- On dit aussi loi des épreuves répétées n fois.

Propriétés : $E(X) = np$, $V(X) = npq$

Preuves succinctes :

- En 1 épreuve, l'espérance "de e" est $1 \times p + 0 \times q = p$, en n épreuves indépendantes on sait qu'on a $E(X) = np$, par linéarité.
- De même, la variance "de e" est $1^2 \times p + 0^2 \times q - p^2 = p - p^2$, on peut l'écrire $p(1-p)$ ou pq, et on sait : $V(X) = pq + pq + \ldots + pq = npq$.

3° - INEGALITE DE BIENAYME-TCHEBYCHEV. important

Pour toute variable aléatoire X telle que $E(X) = m$ et $\sqrt{V(X)} = \sigma$, on peut écrire pour tout réel $\lambda > 0$, $(\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*)$

l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\text{Prob}(|X - m| > \lambda\sigma) < \frac{1}{\lambda^2}$$

très important

☐ Cette inégalité n'est utile que si $\lambda > 1$ et si l'on ne connaît que m et σ sans connaître la loi de probabilité de X, sinon l'on trouverait "exactement" la probabilité.

☆ Exemple : soit X telle que $E(X) = 4$ et $\sigma(X) = 0{,}5$.

- Si l'on choisit $\lambda = 2$, on a $\lambda\sigma = 1$, d'où $\text{Prob}(|X - 4| > 1) < \frac{1}{4}$.
- Autrement dit, la probabilité que l'écart $|X - 4|$ dépasse 1 est majorée par $\frac{1}{4}$ (strictement).
- On peut "passer au contraire" et dire que la probabilité d'avoir X dans $[3, 5]$ est au moins égale à $\frac{3}{4}$.

☐ Le nom d'écart-type (ou coefficient de dispersion) donné à $\sigma(X)$ est justifié par le rôle de σ dans l'inégalité précédente.

★ Remarque : si λ croît, $\frac{1}{\lambda^2}$ décroît, la majoration de probabilité diminue lorsque l'écart étudié augmente : on observe pourtant de tels écarts en réalité même pour des probabilités faibles.

4°- LOI DES GRANDS NOMBRES

important crucial Grandement

☐ Il s'agit d'inégalité, pour un grand nombre d'épreuves répétées.

☐ Données : un univers Ω, un événement $e \in \mathcal{P}(\Omega)$, et $\text{Prob}(e) = p$.

- On appelle succès l'obtention de e, sa probabilité est p.
- On appelle échec l'obtention de $\bar{e} = \Omega - e$, sa probabilité est $1 - p = q$.

☐ On considère n épreuves indépendantes (comme pour la loi binômiale).

- A la première épreuve, soit X_1 le nombre de succès ($X_1 = 1$ ou 0).
- A la deuxième épreuve, soit X_2 le nombre de succès ($X_2 = 1$ ou 0).
- Et ainsi de suite, $X_n = 1$ ou 0 est le nombre de succès à la $n^{\text{ième}}$ épreuve.

Le nombre de succès en n épreuves est $(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$, et la fréquence des succès en n épreuves est $F = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$

☐ La loi des grands nombres (d'épreuves) résulte de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à la variable aléatoire F.

• Calcul de E(F) : pour chaque X_i, $E(X_i) = 1 \times p + 0 \times q = p$, pour leur somme l'espérance est np ; pour F on a une homothétie de rapport $\frac{1}{n}$, d'où $E(F) = \frac{1}{n} \times np$; $E(F) = p$.

• Calcul de V(F) : pour chaque X_i, $V(X_i) = 1^2 \times p + 0^2 \times q - p^2 = p - p^2$, d'où $V(X_i) = p(1-p) = pq$. La variance de la somme des X_i est la somme des variances, soit npq. Par homothétie de rapport $\frac{1}{n}$, on a $V(F) = \frac{1}{n^2} \times npq$: $V(F) = \frac{pq}{n}$, d'où $\boxed{\sigma(F) = \sqrt{\frac{pq}{n}}}$.

• Inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour F :

$$\boxed{\text{Prob}\left(|F-p| > \lambda\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) < \frac{1}{\lambda^2}}$$

☐ On change de notations, on pose

$\lambda\sqrt{\frac{pq}{n}} = \varepsilon$, d'où $\lambda^2 = \varepsilon^2\frac{n}{pq}$ et $\frac{1}{\lambda^2} = \frac{pq}{n\varepsilon^2}$, d'où la

◊ Loi des grands nombres (ou théorème de Bernoulli)

$$\text{Prob}(|F-p| > \varepsilon) < \frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

dr!

☆ Exemple : au jeu de pile ou face, si l'obtention de pile est le succès, on a $p = \frac{1}{2}$, d'où $q = \frac{1}{2}$. La fréquence F des succès et la probabilité $\frac{1}{2}$ du succès vérifient :

$$\text{Prob}\left(\left|F-\frac{1}{2}\right| > \varepsilon\right) < \frac{\frac{1}{4}}{n\varepsilon^2}, \text{ soit } \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

• Si l'on joue 100 fois, la majoration devient $\frac{1}{400\varepsilon^2}$, on peut penser qu'on aura de 40 à 60 succès, autrement dit : la fréquence F telle que $0{,}4 \leq F \leq 0{,}6$ ou l'écart $|F-0{,}5| \leq 0{,}1$.

• Dans ces conditions, la loi des grands nombres donne :

$$\text{Prob}(|F-0{,}5| > 0{,}1) < \frac{1}{400(0{,}1)^2}, \text{ soit } \frac{1}{4}.$$

• On conclut, en passant au contraire, que la probabilité d'avoir de 40 à 60 succès en 100 épreuves, est au moins égale à $\frac{3}{4}$.

★ Remarque : on ne doit pas conclure qu'en réalité, il est impossible d'obtenir 30 fois pile en jouant 100 fois : c'est "peu probable", mais cela arrive parfois.

5° - THEOREME DE BAYES.

☐ Il s'agit de calculer la probabilité qu'un événement A qui s'est produit ait été causé par un événement e_1 relatif à $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \text{Prob})$.

• On sait A, on ne sait pas e_1, on examine (e_1/A).

• On considère alors $\overline{e_1} = \Omega - e_1$, on a le théorème :

◊ Théorème de Bayes (ou loi de probabilité d'une cause) :

$$\text{Prob}(e_1/A) = \frac{\text{Prob}(A/e_1)\text{Prob}(e_1)}{\text{Prob}(A/e_1)\text{Prob}(e_1) + \text{Prob}(A/\overline{e_1})\text{Prob}(\overline{e_1})}$$

☆ Exemple : soient 2 urnes U_1 et U_2, telles que la probabilité de tirer une boule blanche de U_1 est $\frac{98}{100}$, et de U_2 : $\frac{42}{100}$. On cache les urnes, on tire une boule au hasard d'une urne prise au hasard, et l'on constate que la boule est blanche. On suppose les urnes équiprobables (de probabilité $\frac{1}{2}$ chacune), on veut la probabilité pour que la boule ait été tirée de U_1.

• La boule blanche tirée correspond à A, l'urne U_1 à e_1, U_2 à $\overline{e_1}$.

• On obtient $\text{Prob}(U_1/A) = \dfrac{\frac{98}{100}\times\frac{1}{2}}{\frac{98}{100}\times\frac{1}{2} + \frac{42}{100}\times\frac{1}{2}}$, soit $\frac{7}{10}$

☐ Cas général : si $e_1, e_2, \ldots, e_n$ forment une partition de Ω, c'est-à-dire s'ils sont disjoints deux à deux et de réunion Ω, on a :

$$\text{Prob}(e_i/A) = \frac{\text{Prob}(A/e_i)\text{Prob}(e_i)}{\sum_{k=1}^{n} \text{Prob}(A/e_k)\text{Prob}(e_k)}$$

• Cette formule donne la probabilité de chacune des causes e_i.

X

CHAPITRE 13

SUITES. PROGRESSIONS

1° - SUITES.

☐ Introduction.

On considère une fonction $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow f(x) \end{array} \right.$, dont le domaine $\mathscr{D}_f$ contient $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$ qu'on désigne par S ($S = \mathbb{N}$ ou $S \subset \mathbb{N}$).

On considère f "restreinte à S", autrement dit les valeurs x de départ sont des valeurs entières.

Dans ces conditions, on note u la restriction de f à S, et l'on dit que l'application u est une suite, de schéma $u : \left| \begin{array}{l} S \longrightarrow \mathbb{R} \\ n \longrightarrow u(n) = f(n) \end{array} \right.$

♦ **Définition** : une suite u est une application de $\mathbb{N}$ (ou une partie) dans $\mathbb{R}$.

☐ Notations.

$u(n) = u_n$ ① Au lieu de donner le schéma de la suite u, on peut se borner à l'expression de u(n), on l'abrège même en u_n.

② On désigne la suite u correspondante par : suite $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, ou suite de terme général u_n, ou même : suite (u_n).

☆ Exemple : à partir de $f(x) = \frac{x^2-1}{x+3}$, on obtient :

- la suite $u : \left| \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ n \longrightarrow u(n) = \frac{n^2-1}{n+3} \end{array} \right.$

- on écrit : suite $\left\{\frac{n^2-1}{n+3}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$, suite de terme général $\frac{n^2-1}{n+3}$,

ou encore : suite $u_n = \frac{n^2-1}{n+3}$, suite $\left(\frac{n^2-1}{n+3}\right)$.

☐ En pratique, les suites ont pour domaine $\mathbb{N}^*$ ou $\mathbb{N}$, et l'on peut aussi écrire la "liste" des termes successifs, depuis u_1 ou u_0, sous la forme :

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots) \quad \text{ou} \quad u = (u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots).$$

◊ **Rang d'un terme** : entier égal à l'indice.
u_0 est de rang 0, u_1 de rang 1, ..., u_n est de rang n, ...

♦ **Suites particulières.**

- Si le domaine d'une suite est fini, la suite est finie, la liste ne comporte qu'un nombre fini de termes, exemple $(u_1, u_2, \ldots, u_{12})$, de telles suites sont peu intéressantes.

- Suite récurrente : suite donnée par la valeur de u_0 (ou u_1) et la manière d'en déduire successivement tous les termes.

☆ Exemple : la suite u définie par $\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 2 \\ u_n = \frac{u_{n-1}-1}{u_{n-1}+2} \end{array} \right.$ est récurrente.

On peut calculer u_1 par la formule où l'on suppose n = 1, d'où $u_1 = \frac{2-1}{2+2} = \frac{1}{4}$, de même pour u_2 (n = 2), etc..., mais ces calculs sont inutiles en général.

2° - NOTIONS ASSOCIEES AUX SUITES.

☐ On considère des suites infinies, de domaine $\mathbb{N}$ et de terme général u_n.

♦ **Suite strictement croissante** : telle que $u_{n+1} > u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

- Suite strictement décroissante : telle que $u_{n+1} < u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- Une suite soit croissante, soit décroissante, est dite monotone.

♦ **Suite alternée** : suite telle que $u_n u_{n+1} < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

☆ La suite $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ est alternée.

♦ Suite convergente : telle que u_n tend vers une limite finie lorsque n tend vers l'infini

☆ La suite $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge, la limite est 0.

♦ Suite divergente : suite non convergente.

☆ La suite $u_n = 1 + (-1)^n$ diverge car les termes valent alternativement 0 ou 2 suivant la parité de n : pas de limite.

☆ La suite $u_n = \frac{n^2-1}{n+3}$ diverge car la limite est infinie.

♦ Sous-suite (ou suite extraite) d'une suite (u_n).

- Lorsqu'on ne considère pas tous les termes de la suite (u_n), mais seulement ceux dont le rang n est défini par une loi donnée, ces termes forment une sous-suite de la suite (u_n).

☆ Si $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$, la sous-suite des termes de rang pair $(n = 2p)$ a pour terme général $\frac{1}{2p+1}$; celle des rangs impairs $(n = 2p + 1)$: $\frac{-1}{2p+2}$.

3° - CAS PARTICULIER DES PROGRESSIONS.

☐ Parmi l'ensemble des suites, deux sortes de suites récurrentes interviennent souvent : les suites arithmétiques, les suites géométriques, que l'on a coutume d'appeler progressions.

♦ Progression arithmétique : suite (récurrente) (u_n) telle que u_0 est donné, et $u_{n+1} = u_n + r \quad (\forall n \in \mathbb{N})$
avec r constante, $r \neq 0$; r est la raison.

♦ Progression géométrique : suite (récurrente) (u_n) telle que u_0 est donné, et $u_{n+1} = u_n \times q \quad (\forall n \in \mathbb{N})$
avec q constante, $q \neq 0$, $q \neq 1$, $q \neq -1$; q est la raison.

☐ On exclut des définitions les raisons relatives à des suites sans intérêt pratique.

◊ *Formules usuelles pour les progressions.*

● Terme général u_n en fonction de u_0, de la raison et du rang.

- Progression arithmétique : $u_n = u_0 + nr$
- Progression géométrique : $u_n = u_0 \times q^n$

★ Plus généralement, on a respectivement

$u_n = u_p + (n-p)r \qquad u_n = u_p \times q^{n-p} \quad (p \in \mathbb{N},\ p \leqslant n)$

● Terme général u_n en fonction du précédent et du suivant.

- Progression arithmétique : $u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$
- Progression géométrique : $|u_n| = \sqrt{u_{n-1} \times u_{n+1}}$

★ Plus généralement, on a respectivement

$u_n = \frac{u_{n-p} + u_{n+p}}{2} \quad , \qquad u_n^2 = u_{n-p} \times u_{n+p}$

☐ Ces formules sont celles des moyennes arithmétique et géométrique respectivement, d'où les noms des progressions.

● Somme S_n des n premiers termes d'une progression.

- Si la progression commence à u_0, on veut trouver $u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$.
- On préfère supposer que la progression commence par u_1, dans ce cas la somme à trouver est $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$; on a alors :
- Progression arithmétique : $S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$
- Progression géométrique : $S_n = u_1 \frac{1-q^n}{1-q}$

★ Cas particulier : si une progression géométrique de premier terme u_1 vérifie $|q| < 1$, la limite de S_n lorsque n tend vers l'infini existe (car $q^n \to 0$), on la note S,

$S = \lim\limits_{n \to \infty} (S_n) = \frac{u_1}{1-q}$

☆ Exemple : un lièvre blessé veut rejoindre son gîte distant de 300 mètres. Il parcourt 100 m et s'arrête. Il repart mais ne peut parcourir que le tiers de la distance précédente, et doit s'arrêter. Et ainsi de suite, le lièvre procède par étapes représentant le tiers de l'étape précédente. On veut savoir s'il arrivera au gîte.

Réponse : il parcourt $u_1 = 100$ m, $u_2 = \frac{1}{3}u_1$, $u_3 = \frac{1}{3}u_2, \ldots,$ $u_n = \frac{1}{3}u_{n-1}, \ldots$ La somme est la limite ci-dessus, soit $\dfrac{100\text{m}}{1-\frac{1}{3}} = 150$ m.
Le lecteur peut conclure. c'est triste !

4° - SOMMES USUELLES.

- Somme des n premiers nombres entiers (on exclut 0)

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Preuve : il s'agit d'une progression arithmétique, $u_1 = 1$, $u_n = n$, la formule $S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$ donne le résultat.

- Somme des carrés des n premiers entiers (on exclut 0)

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Il ne s'agit plus d'une progression, ni dans les cas suivants.

- Somme des cubes des n premiers nombres entiers (on exclut 0)

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

- Cas général : somme des puissances $p^{\text{ièmes}}$ ... : $\sum_{k=1}^{n} k^p$.

• On pose $\sum_{k=1}^{n} k = S(1)$, (déjà trouvée : $\frac{n(n+1)}{2}$),

et de même, $\sum k^2 = S(2), \ldots, \sum k^p = S(p)$.

☐ En écrivant le binôme de Newton $(1+x)^{p+1}$ pour $x = 1, 2, \ldots, n$, si on ajoute membre à membre "convenablement", il apparaît une relation générale entre $S(p)$, $S(p-1), \ldots, S(2)$, $S(1)$.

$$x = 1 : \quad \boxed{2^{p+1}} = 1 + C^1_{p+1}1 + C^2_{p+1}1^2 + \cdots + C^p_{p+1}1^p + 1^{p+1}$$

$$x = 2 : \quad 3^{p+1} = 1 + C^1_{p+1}2 + C^2_{p+1}2^2 + \cdots + C^p_{p+1}2^p + \boxed{2^{p+1}}$$

$$x = 3 : \quad 4^{p+1} = 1 + C^1_{p+1}3 + C^2_{p+1}3^2 + \cdots + C^p_{p+1}3^p + 3^{p+1}$$

$$\ldots \quad \ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x = n : \quad (n+1)^{p+1} = 1 + C^1_{p+1}n + C^2_{p+1}n^2 + \cdots + C^p_{p+1}n^p + n^{p+1}$$

$$\text{somme : } (n+1)^{p+1} = n + C^1_{p+1}S(1) + C^2_{p+1}S(2) + \cdots + C^p_{p+1}S(p) + 1$$

★ Remarque : les termes marqués de même manière s'éliminent.

• Pour $p = 2$, on a $(n+1)^3 = n + 3\frac{n(n+1)}{2} + 3\,S(2) + 1$, on en tire $S(2)$, c'est-à-dire $\sum_1^n k^2$. De même pour $p = 3$ et $S(3)$ ou $\sum_1^n k^3$. Et ainsi, de proche en proche, on obtient les expressions des sommes $S(p)$ ou $\sum_1^n k^p$.

1) Fonct. Vect
- D
- Lim. Cont. Dér
- Opérations

2) Cinématique
- Ciné.
- D. mvt
- Trajectoire, vitesse accélération
- Hodographe

5) Mvts part.
- chute libre
- Mvt circulaire

CHAPITRE 14

p1 → 5

FONCTIONS VECTORIELLES. CINEMATIQUE

temps

1° - FONCTIONS VECTORIELLES.

1 ◆ **Définition** : $\vec{f}$ est une fonction vectorielle lorsque son schéma est :

$$\vec{f} : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longrightarrow \vec{f}(t) \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \vec{f} : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \longrightarrow \vec{f}(t) \end{array} \right.$$

Commentaires

☐ L'image $\vec{f}(t)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$), autrement dit $\vec{f}$ représente 2 (ou 3) fonctions composantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

☆ Exemple : si $\vec{f}(t) = (3t^2, t^4+1)$ dans une base donnée de $\mathbb{R}^2$, $\vec{f}$ est constituée de : 2

$$f_1 : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longrightarrow f_1(t) = 3t^2 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad f_2 : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longrightarrow f_2(t) = t^4+1 \end{array} \right.$$

2 ◊ **Limites, continuités, dérivations**

☐ On définit $\lim\limits_{t \to a} \vec{f}(t)$, continuité de $\vec{f}$, dérivées $\vec{f}'$, $\vec{f}''$, ..., à partir des mêmes notions pour chaque fonction composante.

● $\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t))$ a une limite quand t tend vers a, lorsque $f_1(t)$ et $f_2(t)$ ont une limite quand t tend vers a.

- Dans ce cas, si $f_1(t) \longrightarrow \alpha$ et $f_2(t) \longrightarrow \beta$, on a : $\vec{f}(t) \longrightarrow (\alpha, \beta)$ de même s'il y a 3 composantes.

● $\vec{f} = (f_1, f_2)$ est continue (au point a, ou pour $t \in I$) lorsque f_1 et f_2 sont continues (en a, ou sur I).

● $\vec{f} = (f_1, f_2)$ est dérivable (au point a, ou pour $t \in I$) lorsque f_1 et f_2 sont dérivables (en a, ou sur I).

● Dans ce cas, si f_1' et f_2' désignent les dérivées de f_1 et f_2, et si la base est donnée une fois pour toutes, on a : $\vec{f}' = (f_1', f_2')$ de même pour $\vec{f}''$, etc... (ou s'il y a 3 composantes).

☆ Exemple : pour $\vec{f}(t) = (3t^2, t^4+1)$, on trouve $\vec{f}$ continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\vec{f}'(t) = (6t, 4t^3)$ et $\lim\limits_{t \to a} \vec{f}(t) = (3a^2, a^4+1)$.

3 ◊ **Opérations** : comme s'il s'agissait de vecteurs.

☆ Exemples : si $\vec{f}(t) = (3t^2, t^4+1)$ et $\vec{g}(t) = (t, t^2)$ on a :

- $(\vec{f}+\vec{g})(t) = \vec{f}(t) + \vec{g}(t) = (3t^2+t, t^4+t^2+1)$.
- Si λ est constant, $(\lambda\vec{f})(t) = \lambda\vec{f}(t) = (3\lambda t^2, \lambda t^4 + \lambda)$.
- En base orthonormée, $\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t) = 3t^3 + t^2(t^4+1)$,

$$\|\vec{f}(t)\| = \sqrt{9t^4 + (t^4+1)^2}, \quad \|\vec{g}(t)\| = \sqrt{t^2+t^4}.$$

2° - CINEMATIQUE GENERALE.

1 ◆ **Cinématique** : étude des mouvements, indépendamment de leurs causes.

☐ Dans ce livre, on se borne au cas du point (ou d'objet assimilable à un point).

☐ La variable est le "temps" t (explicitement ou non). En fait, il s'agit de la date t; repérée par rapport à une date 0 à l'aide d'unités non précisées en général (au contraire des sciences physiques).

☐ Un mouvement a toujours lieu par rapport à un repère donné. En pratique, on prend un repère orthonormé du plan affine (ou de l'espace affine) pour situer le point M, et la base de ce repère pour exprimer les vecteurs nécessaires (définis ci-après).

2 ◆ **Définition d'un mouvement** (cas du plan)

- Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, il est équivalent de connaître $M(x,y)$ ou $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$, d'où :

Le mouvement de M est défini par le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et par la fonction vectorielle : $t \longrightarrow \overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$.

$\overrightarrow{OM} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\quad x : t \longmapsto x(t)$, $\quad y : t \longmapsto y(t)$

Fonctions composantes

Scanné avec CamScanner

3 ♦ **Trajectoire, vitesses, accélérations** (cas du plan)

1 ● **Trajectoire** : ensemble des positions de M lorsque t varie.

● Ayant $M(t) = (x(t), y(t))$ par exemple, on dit que la trajectoire est une courbe paramétrée (de paramètre t).

● Si l'on élimine t entre x(t) et y(t), on obtient une équation cartésienne ; la courbe correspondante contient (ou est) la trajectoire.

2 ● **Vitesses** : on distingue vecteur vitesse et vitesse scalaire.

● Le vecteur vitesse de M est noté $\vec{V}(M)$, défini par :

$$\boxed{\vec{V}(M) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) \text{ dans la base donnée.}$$

● La vitesse scalaire est notée v(M), en général prise positive mais ce n'est pas une règle absolue ; si $v \geqslant 0$, v est définie par :

$$\boxed{v(M) = \|\vec{V}(M)\|} \quad \text{ou} \quad \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

3 ● **Accélérations** : on distingue vecteur accélération et accélération scalaire.

● Le vecteur accélération de M est noté $\vec{\Gamma}(M)$, défini par :

$$\boxed{\vec{\Gamma}(M) = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right).$$

● L'accélération scalaire est notée $\gamma(M)$, en général prise positive mais ce n'est pas une règle absolue ; si $\gamma \geqslant 0$, γ est définie par :

$$\boxed{\gamma(M) = \|\vec{\Gamma}(M)\|} \quad \text{ou} \quad \sqrt{x''^2 + y''^2}.$$

☆ Exemple : si $\overrightarrow{OM}(t) = (3t^2, t^4 + 1)$, on a $x(t) = 3t^2$, $y(t) = t^4 + 1$.

● Trajectoire : $t^2 = \frac{x}{3}$ d'où $y = \frac{x^2}{9} + 1$, la trajectoire est portée par la parabole d'équation $y = \frac{x^2}{9} + 1$; or $x \geqslant 0$, donc la trajectoire est la partie correspondante de la parabole.

● Vitesses : $\vec{V}(M) = (6t, 4t^3)$, $v(M) = \sqrt{36t^2 + 16t^6} = 2\sqrt{t^2(4t^4 + 9)}$ et si l'on sait $t \geqslant 0$, on a $v(M) = 2t\sqrt{4t^4 + 9}$.

● Accélérations : $\vec{\Gamma}(M) = (6, 12t^2)$, $\gamma(M) = \sqrt{36 + 144t^4} = 6\sqrt{1 + 4t^4}$.

★ Remarques

● On a $\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt}$, mais en général $\gamma \neq \frac{dv}{dt}$.

● $\vec{V}(M)$ est "significatif", lorsqu'on fait un schéma, si on le trace avec M pour origine : $\vec{V}(M)$ est tangent en M à la trajectoire.

● De même, $\vec{\Gamma}(M)$ est dans la concavité en général.

4 ◊ **Hodographe** : trajectoire du point $P(X(t), Y(t))$ tel que $\overrightarrow{OP} = \vec{V}(M)$.

● L'hodographe est aussi appelée indicatrice des vitesses, car à chaque instant, connaissant P on déduit $\vec{V}(M)$.

3° - MOUVEMENTS PARTICULIERS.

Classement par trajectoires

● Mouvement **rectiligne** : lorsque la trajectoire est sur une droite fixe.

● Mouvement **plan** : lorsque la trajectoire est dans un plan fixe.

● Mouvement **curviligne** ; lorsque la trajectoire est sur une courbe fixe.

En particulier, le mouvement circulaire (trajectoire : cercle).

Classement par $\vec{V}$ et $\vec{\Gamma}$

1 — ● Mouvement **accéléré** : lorsque $\vec{V} \cdot \vec{\Gamma} > 0$, ou $\|\vec{V}\|$ croissante.

2 — ● Mouvement **retardé** ou freiné ou décéléré dans les cas "contraires".

3 — ● Mouvement **uniforme** : lorsque $\vec{V} \cdot \vec{\Gamma} = 0$ $(\forall t)$, ou v constante, et uniformément varié lorsque γ est constante.

☆ **Chute libre** : la trajectoire est sur l'axe "vertical descendant" Oz.

● Il suffit de connaître la cote z de M, on a : $z''(t) = g$ constante, $z'(t) = gt + v_0$ (v_0 constante), $z(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + z_0$ (z_0 constante).

$$\begin{array}{l} \text{O} \\ \text{M(z)} \\ \downarrow \text{z} \end{array}$$

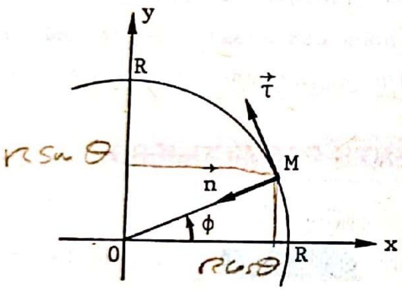
5

• Dans ce cas, on a $v(M) = gt + v_0$, non nécessairement positive, et $\gamma = g$: le mouvement est uniformément varié.

☆ **Mouvement circulaire** : on place l'origine O au centre du cercle.

• Il suffit de connaître $\widehat{\vec{Ox},\vec{OM}} = \phi(t)$ et le rayon R, car $\vec{OM} = (R\cos\phi, R\sin\phi)$.

• Soit $\vec{\tau}$ unitaire de $\vec{V}$, on a $\vec{\tau} \perp \vec{OM}$, on a $\vec{V} = (-R\phi'\sin\phi, R\phi'\cos\phi)$ d'où $\|\vec{V}\| = R|\phi'|$, et si $\phi'(t) \geqslant 0$ ($\forall t$) : $v = R\phi'$, $\vec{\tau} = (-\sin\phi, \cos\phi)$.



• Dans ces conditions, $\vec{V} = R\phi'\vec{\tau}$, et si $\vec{n}$ est déduit de $\vec{\tau}$ par rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$, $\vec{n}$ est unitaire de $\vec{MO}$, $\vec{n} = (-\cos\phi, -\sin\phi)$.

• On peut décomposer $\vec{\Gamma}$ en $\vec{\Gamma} = R\phi''\vec{\tau} + R\phi'^2\vec{n}$, on a $\gamma = R\sqrt{\phi''^2 + \phi'^4}$.

◊ $R\phi''$ est la composante tangentielle de $\vec{\Gamma}$, $R\phi'^2$ la composante normale.

★ Mouvement circulaire uniforme : v constante d'où ϕ' constante, $\phi'' = 0$.

• On pose $\phi' = \omega$ (vitesse angulaire), on a $\vec{V} = R\omega\vec{\tau}$, $\vec{\Gamma} = R\omega^2\vec{n}$.

CHAPITRE 15

INTEGRALES. PRIMITIVES. AIRES

1° - INTEGRALES D'UNE FONCTION EN ESCALIER.

□ Fonctions en escalier.

◆ **Définition** : $f(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$ est en escalier lorsqu'elle prend des valeurs constantes sur des intervalles successifs, les constantes pouvant changer suivant les intervalles.

☆ Exemples.

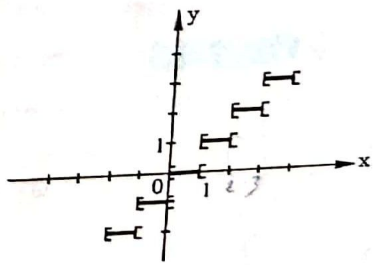
(1) Les fonctions de répartition des variables aléatoires (chapitre 11).

(2.) La fonction E, ou partie entière, E : $\left|\begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{Z} \\ x \to E(x)\end{array}\right.$, telle que E(x) est l'entier immédiatement inférieur (ou égal) à x.

• pour $x = 0,37$ $E(x) = 0$; de même, $\forall x \in [0,1[$.

• pour $x = -0,42$ $E(x) = -1$; de même, $\forall x \in [-1,0[$.

• etc... d'où la représentation graphique.



□ Intégrale sur [a, b] d'une fonction en escalier f;

◆ **Somme de Riemann** : Soient f (en escalier) et [a,b], donnés.
On a des intervalles successifs (en posant $x_0 = a$, et $x_n = b$) désignés par $]x_0,x_1[,]x_1,x_2[, \ldots,]x_i,x_{i+1}[, \ldots,]x_{n-1},x_n[$ tels que sur chacun, f a une valeur constante :
soient $k_0, k_1, \ldots, k_i, \ldots k_{n-1}$ les valeurs.

- La somme de Riemann (pour f et [a,b] donnés) est définie par :

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} (x_{i+1} - x_i) \times k_i$$

ou $(x_1 - x_0)k_0 + (x_2 - x_1)k_1 + \ldots + (x_n - x_{n-1})k_{n-1}$

◆ **Intégrale de f sur [a,b]** : nombre noté $\int_a^b f(x)dx$, défini par :

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \times k_i \quad \text{(somme de Riemann).}$$

☆ Exemple : Si $f(x) = E(x)$ précédente, son intégrale sur $[-1,+3]$ est :

$$\int_{-1}^{+3} E(x)dx = [0-(-1)](-1) + [1-0](0) + [2-1](1) + [3-2](2).$$

On trouve : $-1+1+2$, soit 2.

★ Remarque.

L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ représente la somme des aires algébriques des rectangles successifs, de "base" $(x_{i+1} - x_i)$, de "hauteur" k_i.

◇ **Propriétés** (notation allégée)

- Si $f \geqslant 0$ sur tous les intervalles contenus dans [a,b], $\left(\int_b^a f\right) \geqslant 0$.

- Linéarité : $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

  et : $\int_a^b (\lambda f) = \lambda \left(\int_a^b f\right)$ pour λ constant.

- Relation "de Chasles" : $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

  en particulier : $\int_a^b f = -\int_b^a f$.

2° - PRIMITIVES D'UNE FONCTION CONTINUE.

◆ **Définition** : si f est continue sur l'intervalle I, elle est la dérivée sur I d'une fonction F, appelée primitive de f (sur I).

$$F \text{ primitive de } f \Leftrightarrow F' = f \text{ (sur I)}$$

☆ Exemple : $f(x) = 2x$ est dérivée de $F(x) = x^2 + 3$ (sur $\mathbb{R}$), donc $F(x) = x^2 + 3$ est primitive de $f(x) = 2x$.

◇ **Propriété** : si $F(x)$ a pour dérivée $f(x)$, $F(x) + C$ aussi (avec C constante) ou : si F est primitive de f, F + Constante est primitive de f.

◇ **Notations** : l'ensemble des primitives de f (donnée) est noté $\int f(x)dx$.

- Si F est une primitive de f, on écrit aussi : $\int f(x)dx = F(x) + C$.

★ Par définition, si F est primitive de f, on peut écrire :

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

☆ Primitives usuelles (C désigne une constante quelconque).

f(x)	$\int f(x)dx$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$(1+\mathrm{tg}^2 x)$ ou $\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}\, x + C$
$(1+\mathrm{cotg}^2 x)$ ou $\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{cotg}\, x + C$

	f(x)	$\int f(x)dx$
	constante K	$Kx + C$
$\forall \alpha > 0$	x^α	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$
$\forall \alpha > 0, \alpha \neq 1$	$\frac{1}{x^\alpha}$	$\frac{-1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} + C$
$x > 0$ ou $x < 0$	$\frac{1}{x}$	$\mathrm{Log}\lvert x\rvert + C$
	e^x	$e^x + C$

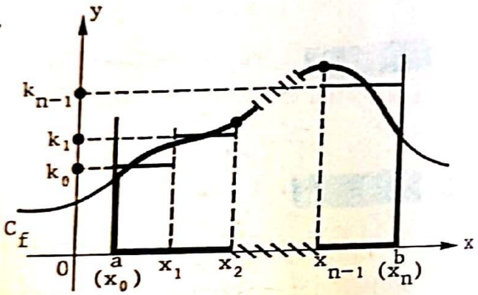
☐ Pour contrôler l'exactitude d'une primitive de f(x), il suffit de la dériver : on doit retrouver f(x).

☐ Toute formule de dérivation donne lieu à une formule pour les primitives :

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ donne $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$, etc ...

3°- INTEGRALES D'UNE FONCTION CONTINUE, CALCUL D'AIRES

☐ Problème de calcul d'une aire.



- Soit la fonction f, soit [a,b] un intervalle où f est continue et ne change pas de signe.
- On veut calculer l'aire du domaine D suivant :

$D = \{M(x,y)/a \leqslant x \leqslant b\ ,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$

- Graphiquement, D est limité par les parallèles à Oy d'équations $x = a$ et $x = b$, l'axe Ox ($y = 0$) et C_f ($y = f(x)$)

☐ Idée de la méthode.

- On partage [a,b] en n intervalles, on remplace f par une fonction en escalier "bien choisie", on est amené à faire une somme de Riemann qui donne une valeur approchée de l'aire.
- Ensuite on améliore le résultat pour arriver à la valeur exacte.

comment ?

☐ Application de la méthode

- On pose $x_0 = a$, $x_n = b$, le partage de [a,b] en n intervalles est défini par $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, b$.
- Sur chaque intervalle $]x_i\ , x_{i+1}[$, on prend pour constante k_i une des valeurs de f(x) pour $x \in]x_i\ , x_{i+1}[$.
- Une valeur approchée de l'aire est $\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)k_i$.

- Une valeur par excès est certainement obtenue si l'on prend pour chaque k_i la valeur maximum de f(x) sur $]x_i\ , x_{i+1}[$, (et une valeur par défaut de manière semblable).

- Intuitivement, si l'on augmente indéfiniment le nombre n, en diminuant la mesure de tous les segments $[x_i\ , x_{i+1}]$, les valeurs par excès et par défaut correspondantes encadrent l'aire cherchée de plus en plus près ; à la limite (si $n \to \infty$ et que $(x_{i+1} - x_i) \to 0$), on obtient l'aire exacte cherchée (résultat admis dans ce livre).

☐ Conclusion et définition

♦ On note $\int_a^b f(x)dx$ l'aire exacte du domaine D, on dit que :

$\int_a^b f(x)dx$ est l'intégrale définie de f sur [a,b]

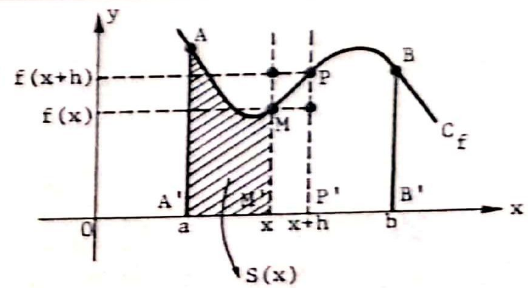
● On cherche un moyen de calculer $\int_a^b f(x)dx$, plus pratique que le précédent.

● Ce moyen est fourni par le théorème suivant.

◊ **Théorème**

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, où F est une primitive de f.

Preuve succincte : avec les notations de la figure, l'aire hachurée S(x) est limitée par A'A ($x = a$). A'M' (sur Ox), M'M (x supposé fixé, $a < x < b$), et un arc de C_f.



• On cherche le nombre dérivé de $S(x)$ au point x.

• $S(x+h)$ est limitée par $A'A$, $A'P'$, $P'P$ et C_f, donc $S(x+h)-S(x)$ est limitée par $M'M$, $M'P'$, $P'P$ et l'arc PM de C_f.

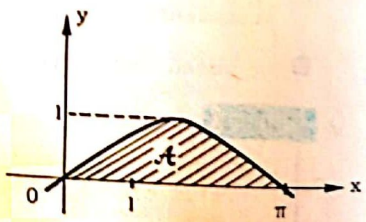
• Si h est "petit", cette aire "petite" est encadrée par : $\overline{M'P'} \times \overline{M'M}$ et $\overline{M'P'} \times \overline{P'P}$ (termes de sommes de Riemann), donc par $h \times f(x)$ et $h \times f(x+h)$; donc $\dfrac{S(x+h)-S(x)}{h}$ est encadré par $f(x)$ et $f(x+h)$; quand $h \longrightarrow 0$, on obtient $S'(x)$ encadrée par $f(x)$ et $f(x)$.

• D'où $S'(x) = f(x)$, il n'y a plus d'approximation ; d'où S est primitive de f.

1. Si $x = a$, $S(a) = 0$; si $x = b$, $S(b) = \int_a^b f(x)dx$, quantité cherchée.
2. Soit $F(x)$ une autre primitive : $F(x) = S(x) + C$. Alors, $F(b) - F(a)$ donne $(S(b) + C) - (S(a) + C) = S(b)$ car C disparaît et $S(a) = 0$.
3. Le théorème est démontré, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ (chacun vaut $S(b)$).

☆ Exemple

• Soit $f(x) = \sin x$; la courbe représentative en axes orthonormés est une sinusoïde, f ne change pas de signe sur $[0,\pi]$ par exemple.



• L'aire hachurée $\mathcal{A}$ est donnée par $\int_0^\pi \sin x\,dx$; une primitive est $-\cos x$, d'où :

$$\mathcal{A} = [-\cos \pi] - [-\cos 0] = (+1) - (-1) = 2$$

★ Remarques

● Unité d'aire : aire (positive) du carré de côté 1 en repère orthonormé (ou de la figure correspondante, dans d'autres repères).

● Signe de $\int_a^b f(x)dx$: l'étude des différents cas de figure où f garde le même signe et où on intervertit les rôles de a et b, donne la règle :

Règle pratique : en partant du point $(a,0)$ vers le point $(b,0)$ de l'axe Ox, en continuant "sur la lancée" à parcourir la frontière du domaine.

1. Si l'on obtient le sens positif, $\int_a^b f(x)dx$ est positive.
2. Si l'on obtient le sens négatif, $\int_a^b f(x)dx$ est négative.

● Les propriétés relatives à $\int_a^b f(x)dx$ si f est en escalier, se généralisent au cas de f continue, en particulier la linéarité.

4° - CALCUL DE PRIMITIVES.

☐ Sauf les cas où les primitives usuelles s'adaptent directement, on dispose de 2 méthodes d'intégration.

● *Intégration par parties.*

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

Preuve succincte : $(uv)' = u'v + uv'$ fournit $uv = \int u'v\,dx + \int uv'\,dx$, les notations différentielles ($u'\,dx = du$ et $v'dx = dv$) donnent le résultat.

● Règle : décomposer $f(x)dx$ en udv, de manière que : v soit facile à obtenir, $-\int v du$ aussi.

☆ Exemple : $\int \text{Log}\, x\,dx$; $u = \text{Log}\, x$, $dv = dx$ donnent $du = \dfrac{dx}{x}$, $v = x$; d'où $\int \text{Log}\, x\,dx = (\text{Log}\, x)x - \int x \dfrac{dx}{x}$, d'où $\int \text{Log}\, x\,dx = x\,\text{Log}\, x - x + C$.

● *Intégration par changement de variable.*

La formule : $x = \phi(t) \Rightarrow dx = \phi'(t)dt$, introduite dans $\int f(x)dx$, donne :

$$\boxed{\int f(x)dx = \int f\circ\phi(t) \times \phi'(t)dt}$$

● Règle : dans $f(x)dx$, chercher une différentielle intéressante qui jouerait le rôle de dt, adapter la formule précédente.

$x = \phi(t)$
$\frac{dx}{dt} = \phi'(t)$
$dx = \phi'(t)dt$

☆ Exemple : $\int \sin^3 x \cos x\,dx$; $\cos x\,dx$ est la différentielle de $\sin x$; on pose $\sin x = t$, d'où $\cos x\,dx = dt$, il vient $\int t^3 dt$, on obtient $\frac{t^4}{4}$, d'où $\int \sin^3 x \cos x\,dx = \frac{\sin^4 x}{4} + C$.

★ ***Attention!*** En pratique le changement de variable se présente sous la forme $t = \phi^{-1}(x)$ et non pas $x = \phi(t)$, donc si l'on applique la méthode à $\int_a^b f(x)dx$,

| ϕ doit être bijective sur $[a,b]$,

5° - COMPLEMENTS.

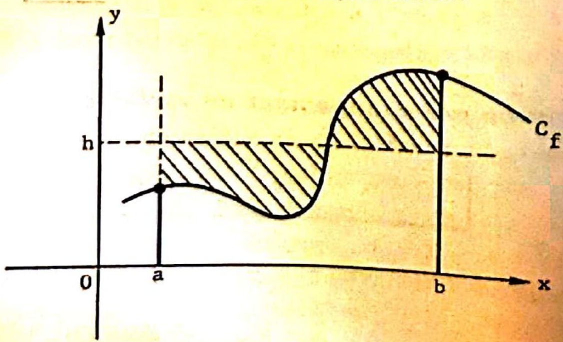
□ *Valeur moyenne de f sur (a, b)*

◊ Définition : la valeur moyenne de f sur $[a,b]$ est le nombre h, tel que :

$$h = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

☆ Exemple : sur $[0,2\pi]$, si $f(x) = \sin x$, on obtient : $h = \frac{1}{2\pi}[-\cos 2\pi + \cos 0]$, la valeur moyenne est 0 ; de même, sur $[0,\pi]$ on obtient $\frac{2}{\pi}$, etc...

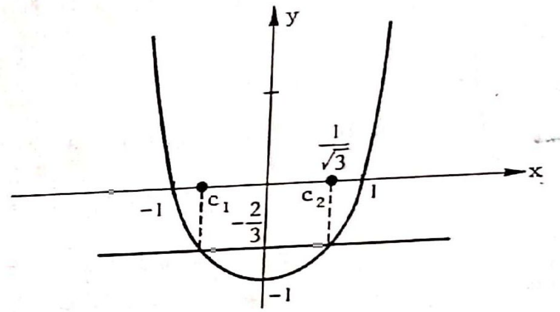
★ Graphiquement (en axes orthonormés), $h(b-a) = \int_a^b f(x)dx$ montre que h est la valeur sur $]a,b[$ de la fonction en escalier réalisant l'égalité des aires correspondantes.



◊ ***Théorème de la moyenne.***

Si f est continue sur $[a,b]$, il existe au moins un point c de $]a,b[$ tel que $f(c) = h$ (valeur moyenne).

☆ Exemple : sur $[-1,+1]$, si $f(x) = x^2 - 1$, on obtient : $h = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}(x^2-1)dx$, $h = \frac{-2}{3}$; $x^2 - 1 = \frac{-2}{3}$ donne $x^2 = \frac{1}{3}$; on trouve 2 points : $c_1 = \frac{-1}{\sqrt{3}}$, $c_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \simeq 0,58$.



★ On peut rapprocher la notion de valeur moyenne de celle de valeur efficace (en sciences physiques).

Scanné avec CamScanner

CHAPITRE 16

LOGARITHME NEPERIEN

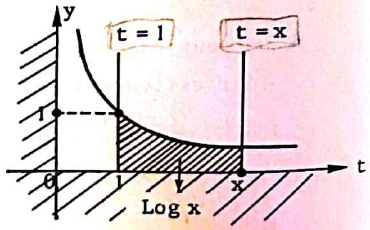
1° - DEFINITIONS, PREMIERES PROPRIETES.

☐ Il n'est pas possible de définir $\int \frac{dx}{x}$ par des formules de type algébrique, on a créé une primitive particulière de la fonction $f : t \longrightarrow \frac{1}{t}$, celle qui s'annule pour $t = 1$.

◆ **Définition** : on appelle logarithme népérien (ou naturel) de x $(x > 0)$, et on note Log x (ou ln x), l'intégrale $\int_1^x \frac{dt}{t}$.

$$\text{Pour } x > 0 : \operatorname{Log} x = \int_1^x \frac{dt}{t} \Leftrightarrow (\operatorname{Log} x)' = \frac{1}{x}$$

☐ Graphiquement, si l'on représente pour $t > 0$: la branche d'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{t}$ et les droites d'équations $t = 1$, $t = x$, Log x est représenté par l'aire indiquée.



◇ **Propriétés**

- Si $x = 1$, par définition Log 1 = 0 (graphiquement, l'aire est nulle).
- Par la règle des signes des intégrales, on obtient :

Log x > 0	pour $x > 1$
Log x < 0	pour $0 < x < 1$

- Par dérivation des fonctions composées, on obtient pour $f(x) = \operatorname{Log}|x|$, $f'(x) = \frac{1}{x}$ si $x > 0$, $f'(x) = \frac{-1}{-x}$ si $x < 0$, d'où :

$$f(x) = \operatorname{Log}|x| \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

2° - FONCTION LOG.

☐ L'interprétation graphique de $\int_1^x \frac{dt}{t}$ par les aires permet de retrouver la plupart des résultats suivants.

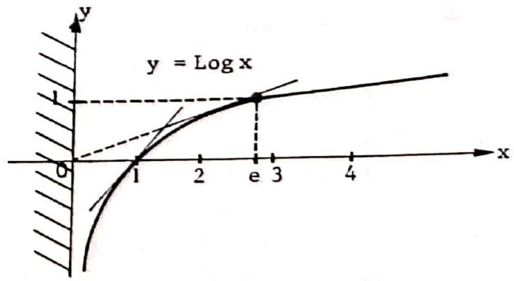
★ Etude de Log : $\begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow \operatorname{Log} x \end{array}$

- Domaine de définition : $x > 0$ d'après la définition initiale de Log x, d'où Log x est définie si et seulement si x est strictement positif.
- Valeurs limites : quand $x \longrightarrow 0^+$, Log x est négatif, on obtient $\lim_{x \to 0^+} (\operatorname{Log} x) = -\infty$. De même, $\lim_{x \to +\infty} (\operatorname{Log} x) = +\infty$.
- Variations : la dérivée est positive ($\frac{1}{x}$ pour $x > 0$), donc fonction croissante.
- Valeurs usuelles : Log 1 = 0 (correspond au point sur Ox de la courbe) ; en ce point, tangente parallèle à la 1ère bissectrice.

On note e la valeur telle que Log e = 1 $(e \simeq 2{,}71828\ldots)$.

Au point correspondant, la tangente à la courbe est dirigée par $(1, \frac{1}{e})$ donc elle passe par l'origine.

- Représentation graphique ci-contre.



Propriété : si l'on restreint Log selon le schéma :

Log : $\begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow \operatorname{Log} x \end{array}$

on obtient une bijection (continue, croissante).

3° - PROPRIETES DIVERSES.

◇ **Limites**

- Quand $x \longrightarrow 0^+$, $\operatorname{Log} x \longrightarrow -\infty$, mais $x \operatorname{Log} x \longrightarrow 0^-$, et

$x^\alpha \operatorname{Log} x \longrightarrow 0^-$ (α positif quelconque)

- Quand $x \longrightarrow +\infty$, $\operatorname{Log} x \longrightarrow +\infty$, mais : $\dfrac{\operatorname{Log} x}{x} \longrightarrow 0^+$, et

$\dfrac{\operatorname{Log} x}{x^\alpha} \longrightarrow 0^+$ (α positif quelconque)

- Quand $x \longrightarrow 0$, on peut écrire $\operatorname{Log}(1+x) \simeq x$, ou

$\dfrac{\operatorname{Log}(1+x)}{x} \longrightarrow 1$

◊ **Logarithme d'un produit** : $\operatorname{Log}(ab) = \operatorname{Log} a + \operatorname{Log} b$ (a et b positifs)

Preuve succincte : par dérivation de fonction composée ; $(\operatorname{Log} u)' = \dfrac{u'}{u}$, d'où $\operatorname{Log}(ax)' = \dfrac{a}{ax} = \dfrac{1}{x}$; $\operatorname{Log}(ax)$ et $\operatorname{Log} x$ ont même dérivée, d'où $\operatorname{Log}(ax) = \operatorname{Log} x + C$. Pour $x = 1$: $\operatorname{Log} a = 0 + C$, d'où $C = \operatorname{Log} a$. On remplace x par b, on obtient la formule.

◊ **Autres formules** : on déduit de la précédente, les formules $\operatorname{Log} a^2 = 2\operatorname{Log} a$, $\operatorname{Log}\dfrac{1}{b} = -\operatorname{Log} b$, $\operatorname{Log}\dfrac{a}{b} = \operatorname{Log} a - \operatorname{Log} b$, et finalement

$\operatorname{Log}(a^\alpha) = \alpha \operatorname{Log} a$ (α exposant quelconque)

4° - EXEMPLES.

- Résoudre : $\operatorname{Log}(x+1) + \operatorname{Log}(x-2) = 0$.

. Méthode : prévoir le domaine des solutions, calculer ensuite.

• $\operatorname{Log}(x+1)$ nécessite $x+1 > 0$, $x > -1$; de même $x > 2$; finalement les solutions devront vérifier : $x > 2$. On peut écrire :

• $\operatorname{Log}(x+1) + \operatorname{Log}(x-2) = \operatorname{Log}[(x+1)(x-2)] = \operatorname{Log}(x^2-x-2)$;

Log est bijective, $\operatorname{Log} 1 = 0$, on est amené à : $x^2 - x - 2 = 1$, ou $x^2 - x - 3 = 0$; $\Delta = 13$, on écrit 2 solutions : $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ à rejeter, $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$ (valable), l'équation a une solution.

- Résoudre $\operatorname{Log}[(x+1)(x-2)] = 0$.

• $(x+1)(x-2) > 0$ donne pour domaine : $x < -1$ ou $x > 2$; et les calculs déjà faits donnent 2 solutions : $\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$, $\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$, toutes deux valables.

CHAPITRE 17

EXPONENTIELLES ET LOGARITHMES

1° - EXPONENTIELLE DE BASE e.

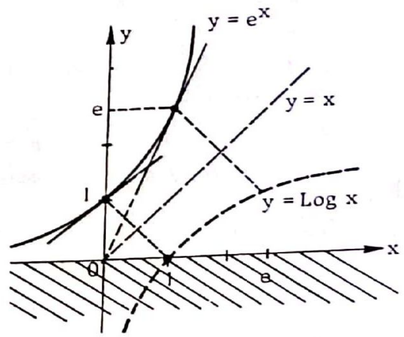
Log est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, elle admet une réciproque, d'où la définition suivante.

♦ **Définition** : on appelle exponentielle de base e et l'on note exp, la bijection réciproque de Log.

- Schéma exp : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, $x \longrightarrow \exp(x)$ ou e^x

- On emploie le plus souvent la notation e^x ($e \simeq 2{,}71828\ldots$, chapitre 16).

☐ Graphiquement, la courbe représentative de l'exponentielle se déduit de celle du logarithme népérien par symétrie relativement à la première bissectrice ($y = x$) ; on retrouve ainsi la plupart des résultats suivants.



★ Fonction exponentielle (de base e).

• Domaine de définition : $\mathbb{R}$, ou $]-\infty, +\infty[$.

Propriété : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$

• Valeurs limites : quand $x \longrightarrow -\infty$, $e^x \longrightarrow 0^+$

quand $x \longrightarrow +\infty$, $e^x \longrightarrow +\infty$

• Variations : exp est croissante (réciproque d'une fonction croissante).

• Valeurs usuelles : $e^0 = 1$ (correspond au point sur Oy) ; pas de point sur Ox ; $e^1 = e$ correspond au point $(1, e)$ où la tangente à la courbe passe par 0.

• Représentation graphique donnée à la page précédente.

◊ ***propriétés diverses.***

• ***Equivalence*** : pour $y > 0$, $\boxed{y = e^x \Leftrightarrow x = \operatorname{Log} y}$

• ***Dérivée*** : dérivant $x = \operatorname{Log} y$ comme fonction composée, on obtient $1 = \frac{y'}{y}$, ou $y' = y$, d'où : $\boxed{f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x}$

et par suite $f^{(m)}(x) = e^x$ et $\int e^x dx = e^x + C$.

• ***Limites***

• Quand $x \to -\infty$, $e^x \to 0^+$, puis : $xe^x \to 0^-$, et

$\boxed{x^\alpha e^x \to 0}$ (α exposant quelconque)

• Quand $x \to +\infty$, $e^x \to +\infty$, puis $\frac{e^x}{x} \to +\infty$, et

$\boxed{\frac{e^x}{x^\alpha} \to +\infty}$ (α exposant quelconque).

• $e^\varepsilon \simeq 1 + \varepsilon$, si ε est "petit" (et $e^0 = 1$, à la limite).

• ***Exponentielle d'une somme*** : $\boxed{e^{a+b} = e^a \times e^b}$

Preuve succincte : on pose $e^a = A$, $e^b = B$, on sait : $a = \operatorname{Log} A$ et $b = \operatorname{Log} B$, d'où $a + b = \operatorname{Log} A + \operatorname{Log} B = \operatorname{Log}(AB)$; par réciprocité $e^{a+b} = AB$, d'où $e^{a+b} = e^a \times e^b$.

• ***Autres formules*** : on déduit de la précédente, les formules $e^{2a} = (e^a)^2$, $e^{-b} = \frac{1}{e^b}$, $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$, et finalement ($\alpha$ exposant quelconque) $\boxed{(e^a)^\alpha = e^{\alpha a}}$

En particulier : $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$, $e^{-1} = \frac{1}{e}$, $e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}, \ldots$

2° - LOGARITHMES DIVERS.

☐ Commentaire : lorsqu'on dispose d'autres logarithmes que le logarithme népérien Log, on passe par réciprocité à d'autres exponentielles que la précédente (voir paragraphe 3°). De plus, parmi les logarithmes, le logarithme décimal est très utile pour certains calculs.

☐ ***Bases.***

♦ $\boxed{\text{La base d'un logarithme est le nombre } a \text{ tel que } \log a = 1}$

• La base de Log (népérien) est e ($\operatorname{Log} e = 1$, $e \simeq 2{,}718$).

☐ ***Logarithme de base a.***

♦ Définition : le nombre a étant donné ($a > 0$, $a \neq 1$), On appelle logarithme de base a, on note $\log_a$, la fonction de schéma $\log_a$: $\begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow \log_a(x) \end{array}$ telle que $\boxed{\log_a(x) = \frac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log} a}}$

◊ Propriétés

• $\log_a(1) = 0$ puisque $\log_a(1) = \frac{\operatorname{Log} 1}{\operatorname{Log} a}$ et $\operatorname{Log} 1 = 0$

• Il suffit de connaître Log, la fonction $\log_a$ est le produit de Log par $\frac{1}{\operatorname{Log} a}$; $\log_a x$ et $\operatorname{Log} x$ sont proportionnels.

• Dérivée : si $f(x) = \log_a(x)$, $f(x) = \frac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log} a}$ donne $\boxed{f'(x) = \frac{1}{x \operatorname{Log} a}}$

• $\log_a$ est croissante si $\operatorname{Log} a > 0$ ou $a > 1$ (décroissante si $0 < a < 1$).

• Les deux allures des courbes représentatives sont rappelées en fin de chapitre.

★ ***Logarithme décimal.***

◊ Pour la base dix, on note $\log_{10}$ par log (sans indice 10) et on l'appelle logarithme décimal.

◊ On pose $\frac{1}{\operatorname{Log} 10} = M$ ($M \simeq 0{,}434$), on a $\boxed{\log x = \frac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log} 10} = M \operatorname{Log} x}$

• Des tables donnent les valeurs approchées de $\log x$ pour x variant de 1 à 10000 "1 par 1" ; on utilise les tables et les formules telles que $\log(ab) = \log a + \log b$, $\log(a^{\alpha}) = \alpha \log a$ (valables par proportionnalité) pour effectuer commodément des calculs.

◊ **Propriétés** (dues à la base 10 de log et de la numération usuelle).

• $\log 10 = 1 \Rightarrow \log(10^n) = n$ et $\log(10^{-n}) = -n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

• Tout nombre positif x étant encadré par deux puissances successives de 10, $\log x$ est encadré par les exposants puisque log (décimal) est une fonction croissante.

☆ Exemples : $x = 97{,}233$: $x \in [10^1 ; 10^2] \Rightarrow \log x = 1 + 0, \ldots$

$x = 0{,}037$: $x \in [10^{-2} ; 10^{-1}] \Rightarrow \log x = -2 + 0, \ldots$

☐ Conventions

• L'entier immédiatement inférieur (ou égal) à $\log x$ est nommé ***caractéristique*** de $\log x$ (caractéristique : entier relatif).

• La valeur décimale à rajouter pour obtenir $\log x$ est nommée ***mantisse*** de $\log x$ (mantisse : positive ou nulle, inférieure à 1).

• Les tables ne donnent que les mantisses, l'utilisateur doit trouver les caractéristiques par ses propres moyens.

☆ Exemples

• log 97,233 a pour caractéristique 1. On cherche à 9723,3 dans la table (on fait une approximation entre 9723 et 9724), on obtient d'après la table : 98 781 ; $\log 97{,}233 \simeq 1{,}98\,781$.

• log 0,037 a pour caractéristique −2. On cherche à 37, à 370 ou à 3700 dans la table, on obtient 56 820 ; on n'effectue pas $-2 + 0{,}56\,820$, on convient d'écrire : $\log 0{,}037 = \bar{2}{,}56\,820$.

• ***cologarithme*** : opposé du logarithme, noté colog au lieu de −log. Ainsi (pour $a > 0$) : $\operatorname{colog} a = -\log a = \log \frac{1}{a}$.

• ***Calculs par logarithmes décimaux.***

☐ Convention : comme dans les exemples précédents, on garde les mantisses lues dans les tables, on les fait précéder de la caractéristique sans signe si elle est positive, ou surmontée du signe − si elle est négative, on adapte colog à cette convention.

☆ Exemple : si $a = \frac{0{,}037}{97{,}233}$, on peut présenter le calcul selon le plan suivant.

N	log N	colog N
0,037	$\bar{2}{,}56\,820$	——
97,233	1,98 781	$\bar{2}{,}01219$

$$\begin{array}{r} \bar{2}{,}56\,820 \\ \bar{2}{,}01\,219 \\ \hline \bar{4}{,}58\,039 \end{array}$$

• $\log a = \log 0{,}037 + \operatorname{colog} 97{,}233 = \bar{4}{,}58\,039$

• 58 039 (côté log) provient de 3805 3 (correction entre 3805 et 3806).

• $\bar{4}$ montre que a est compris entre 10^{-4} et 10^{-3} ; finalement $a \simeq 0{,}000\,380\,53$.

3° - EXPONENTIELLES DIVERSES.

◆ **Définitions**

● L'exponentielle de base a est la réciproque de $\log_a$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ notée $\exp_a$, de schéma $\exp_a$: $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \longmapsto \exp_a(x). \end{cases}$

● La base est celle de $\log_a$, on a $\exp_a(1) = a$.

☐ Notations

• On note plus commodément $\exp_a(x)$ sous la forme a^x.

◊ **Propriétés diverses**

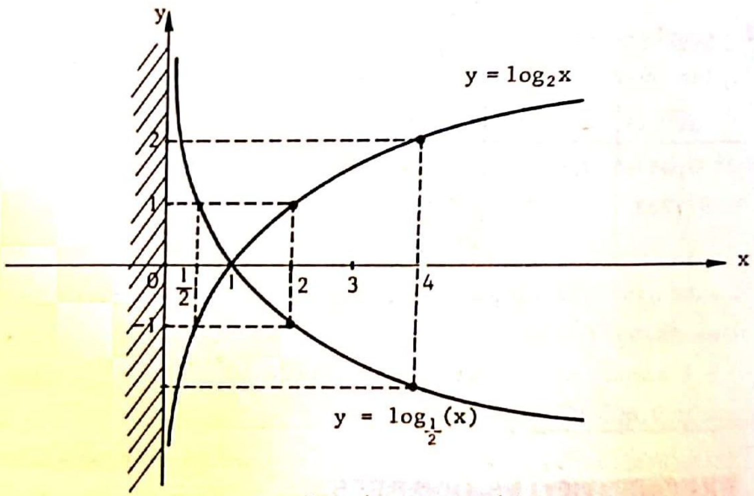
• Equivalence : pour $y > 0$, $y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y = \frac{\operatorname{Log} y}{\operatorname{Log} a}$.

On peut écrire : $y = a^x \Leftrightarrow y = e^{x \operatorname{Log} a}$

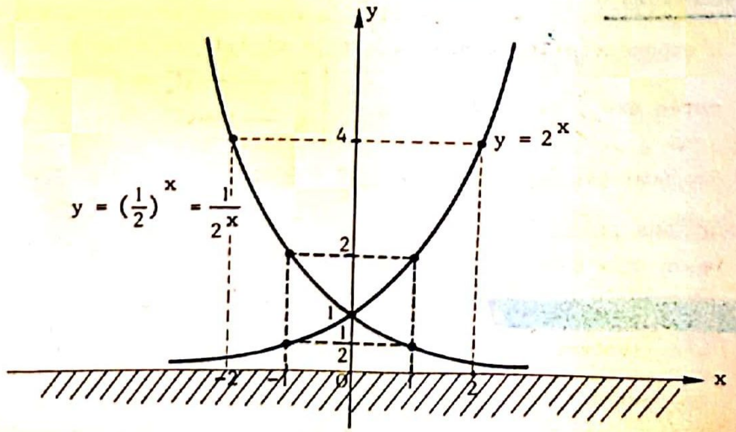
• Dérivée : dérivant $y = e^{x \operatorname{Log} a}$, on obtient $y' = e^{x \operatorname{Log} a} \times \operatorname{Log} a$, on peut écrire $y' = (\operatorname{Log} a) a^x$.

• Il suffit de connaître les résultats relatifs à e^x, on en déduit ceux relatifs à a^x : $a^x = e^{x \operatorname{Log} a}$ ou $(e^{\operatorname{Log} a})^x$.

☐ Représentations graphiques de $\log_2$, $\log_{\frac{1}{2}}$, $\exp_2$, $\exp_{\frac{1}{2}}$.



$\log_{\frac{1}{a}}(x) = -\log_a(x)$



$\exp_{\frac{1}{a}}(x) = \exp_a(-x)$, $\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x} = a^{-x}$

---

1) Fonction de LEIBNIZ
D
P

3) Formules de LEIBNIZ
D

2) Bar((Ai, αi))
D1
D2
P

4) Applications pratiques

CHAPITRE 18

BARYCENTRES.

FONCTIONS $f(M) = \lambda_1 MA_1^2 + \ldots$

☐ Commentaire : ce chapitre rappelle les notions fondamentales relatives aux points pondérés, dans le cas de 3 points $A_1A_2A_3$ munis respectivement des coefficients $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$. Les résultats s'adaptent à n points pondérés (A_i, λ_i), et sont souvent donnés dans de tels cas $(n \geq 2)$, sans que n soit précisé.

1° - FONCTION DE LEIBNIZ.

◆ Définition : 3 points pondérés $(A_1,\lambda_1), (A_2,\lambda_2), (A_3,\lambda_3)$ étant donnés, la fonction de Leibniz transforme tout point M en un vecteur $\vec{f}(M)$ selon la formule :

$$M \longrightarrow \vec{f}(M) = \lambda_1\overrightarrow{MA_1} + \lambda_2\overrightarrow{MA_2} + \lambda_3\overrightarrow{MA_3}$$

◇ Propriétés

1. Injectivité : on pose $\vec{f}(M) - \vec{f}(M') = \vec{0}$, on cherche si $M = M'$; $\vec{f}(M) - \vec{f}(M')$ se transforme en $(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\overrightarrow{MM'}$, d'où les cas :

$\lambda_1\overrightarrow{MA_1} - \lambda_1\overrightarrow{M'A_1} = \lambda_1(\overrightarrow{MA_1} - \overrightarrow{M'A_1}) = \lambda_1(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{A_1M'}) = \lambda_1\overrightarrow{MM'}$

• Si $\lambda + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, $\vec{f}(M) = \vec{f}(M')$ pour tous points, donc $\vec{f}(M) = \vec{C}$, $\vec{C}$ est constant, $\vec{f}$ non injective. ($\vec{C} = \vec{f}(0)$, ou $\vec{f}(A\ )$, etc...).

• Si $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \neq 0$, il reste $\overrightarrow{MM'} = \vec{0}$, $M = M'$, $\vec{f}$ est injective.

2. Surjectivité : on pose $\vec{f}(M) = \vec{v}$ ($\vec{v}$ donné), on cherche M ; introduisant un point 0 quelconque (fixé), on obtient : $(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\overrightarrow{OM} = \vec{f}(0) - \vec{v}$.

• Si $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, il reste $\vec{0} = \vec{C} - \vec{v}$, avec $\vec{C}$ constant et $\vec{v}$ quelconque, pas de solution en général, $\vec{f}$ n'est pas surjective.

• Si $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \neq 0$, il existe exactement une solution $\overrightarrow{OM}$ par vecteur $\vec{v}$, $\vec{f}$ est surjective (et même bijective).

3. Bijectivité : d'après 1 et 2,

$\vec{f}$ est bijective si et seulement si l'on a : $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \neq 0$.

$\vec{f}$ est une application constante lorsque $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 0$.

2° - BARYCENTRE DES POINTS PONDERES $(A_1,\lambda_1),(A_2,\lambda_2),\ldots$

□ Pour $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \neq 0$, la fonction de Leibniz définie à l'aide des points pondérés $(A_1,\lambda_1),(A_2,\lambda_2),(A_3,\lambda_3)$ est bijective : il existe donc un antécédent et un seul de $\vec{0}$, cet antécédent est désigné par G et on l'appelle barycentre des points pondérés donnés (A_i,λ_i).

♦ **Définition 1** : le barycentre des points pondérés (A_i,λ_i) est le point G (unique) défini par : $\boxed{\sum \lambda_i \neq 0 \quad \text{et} \quad \sum(\lambda_i \overrightarrow{GA_i}) = \vec{0}}$ ⟺

$\sum \lambda_i(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OA_i}) = \vec{0}$

• Introduisant un point O quelconque (fixé), on obtient : $(\sum \lambda_i)\overrightarrow{OG} = \sum(\lambda_i \overrightarrow{OA_i})$, d'où la définition équivalente :

♦ **Définition 2** : le barycentre des points pondérés (A_i,λ_i) est le point G (unique) défini par : $\boxed{\sum \lambda_i \neq 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OG} = \dfrac{\sum(\lambda_i \overrightarrow{OA_i})}{\sum \lambda_i}}$

• Si tous les coefficients λ_i sont égaux, le barycentre G est appelé isobarycentre (ou centre de gravité) des points $A_1, A_2, \ldots$

♦ 5 **Propriétés**

C 1 • **Commutativité** : on peut changer l'ordre des points pondérés dans les définitions, donc aussi dans la détermination de G.

A 2 • **Associativité** : dans la recherche du barycentre G de (A_1,λ_1), $(A_2,\lambda_2),(A_3,\lambda_3),\ldots$, on peut remplacer (A_1,λ_1) et (A_2,λ_2) par leur barycentre "partiel" G_1 pondéré par $(\lambda_1+\lambda_2)$ sous la condition : $\lambda_1+\lambda_2 \neq 0$.

• G est alors barycentre de $(G_1, \lambda_1+\lambda_2),(A_3,\lambda_3),\ldots$

3 • **Produit des coefficients par $\alpha \neq 0$** : remplacer (A_1,λ_1), $(A_2,\lambda_2),\ldots$ par $(A_1,\alpha\lambda_1),(A_2,\alpha\lambda_2),\ldots$ ne modifie pas le barycentre.

• En particulier si $\alpha = \dfrac{1}{\sum \lambda_i}$, la définition 2 se simplifie.

4 • **Coordonnées du barycentre** : la définition 2, "projetée" sur les axes, donne : $x(G) = \dfrac{\lambda_1 x(A_1)+\lambda_2 x(A_2)+\ldots}{\lambda_1+\lambda_2+\ldots}$, de même pour $y(G)$ et les $y(A_i)$, etc...

5 • **Fonction de Leibniz lorsqu'il y a un barycentre** : on trouve au 1°) $\vec{f}(M)-\vec{f}(M') = (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\overrightarrow{MM'}$; avec $M'=G$, on obtient :

$\boxed{\vec{f}(M) = (\lambda_1+\lambda_2+\ldots)\overrightarrow{MG}}$

3° - FORMULES DE LEIBNIZ.

★ Rappels du chapitre 2. → Trigonométrie pratique

- En base orthonormée, le produit scalaire (euclidien) des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'exprime en fonction des composantes par $\vec{u}\cdot\vec{v} = XX'+YY'$, (+ ZZ' dans l'espace), la norme de $\vec{u}$ par $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \sqrt{X^2+Y^2}$, et l'on a une deuxième expression du produit scalaire :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\;\|\vec{v}\|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}).$$

Commentaire □ Dans le cas actuel, les vecteurs sont des bipoints, on peut écrire : $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}} = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$ $= AB = \overline{AB} = d(A,B)$

Pour éviter les racines carrées, on s'intéresse à $\|\overrightarrow{AB}\|^2$, donc à $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$; on simplifie l'écriture en AB^2. $\|\overrightarrow{AB}\|^2 = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = AB^2$

♦ **Fonction $f(M) = \lambda_1 MA_1^2 + \lambda_2 MA_2^2 + \ldots$**

• Les points pondérés (A_i,λ_i) étant donnés, la fonction f ci-dessus associe à tout point M la quantité $\sum(\lambda_i MA_i^2)$, quantité analogue à une aire (voir ci-après une autre expression).

• Soit $M' \neq M$, on a : $MA_1^2 = (\overrightarrow{MM'}+\overrightarrow{M'A_1})\cdot(\overrightarrow{MM'}+\overrightarrow{M'A_1})$, on obtient : $MA_1^2 = MM'^2 + M'A_1^2 + 2\,\overrightarrow{MM'}\cdot\overrightarrow{M'A_1}$; de même avec les autres points A_i, d'où, à l'aide de la fonction $\vec{f}$ de Leibniz, une deuxième expression :

$$f(M) = (\sum \lambda_i)MM'^2 + 2\vec{f}(M')\cdot\overrightarrow{MM'} + f(M')$$

• Suivant qu'on a : $\sum \lambda_i = 0$ ou $\sum \lambda_i \neq 0$, on sait respectivement $\vec{f}(M') = \vec{c}$ ou $\vec{f}(G) = \vec{0}$ (G barycentre des points pondérés).

• D'où les deux formules de Leibniz :

$$\boxed{\begin{array}{l} 1.\ \text{si } \sum \lambda_i = 0\ ,\ f(M) = f(M') + 2\vec{c}\cdot\overrightarrow{MM'} \\ 2.\ \text{si } \sum \lambda_i \neq 0\ ,\ f(M) = f(G) + (\sum \lambda_i)GM^2 \end{array}}$$

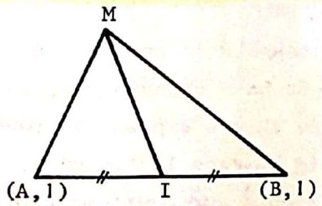
4° - APPLICATIONS PRATIQUES.

1☆ **Pour 2 points (A,1),(B,1) de "poids" égaux :**

- G est l'isobarycentre, c'est-à-dire le milieu de I de [A,B]
- La 2ème formule de Leibniz donne :

$MA^2 + MB^2 = IA^2 + IB^2 + 2IM^2$, or :

$IA^2 = IB^2 = \dfrac{AB^2}{4}$, d'où le



Théorème de la médiane :

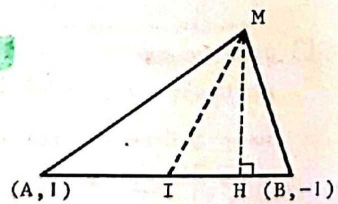
$$\boxed{MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}}$$

(dans tout triangle).

2☆ **Pour 2 points (A,1),(B,-1) de "poids" opposés :**

- Il n'y a pas de barycentre, $\vec{f}(M) = \vec{C}$ devient :

$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \vec{C}$, d'où $\vec{C} = \overrightarrow{BA}$.



- La 1ère formule de Leibniz donne, en prenant M' au milieu I de AB :

$$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{MI},$$

or $$2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{MI} = 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IM} = 2\overline{AB} \times \overline{IH},$$

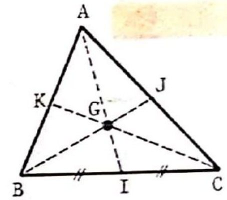
($\overline{AB}$ et $\overline{IH}$ sont mesurés sur le même axe), d'où le

Théorème de la projection de la médiane

$\boxed{MA^2 - MB^2 = 2\overline{AB}\ \overline{IH}}$ (dans tout triangle).

- Si l'on part de (A,-1) et (B,1), on a : $MB^2 - MA^2 = 2\overline{BA}\cdot\overline{IH}$.

3☆ **Pour 3 points (A,1),(B,1),(C,1) non alignés, de "poids" égaux :**



- L'isobarycentre de B et C est le milieu I, l'isobarycentre G est donc barycentre de (I,2) et (A,1), on obtient $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.
- De même pour les autres utilisations de l'associativité, d'où :

> G est le point de concours des médianes (centre de gravité du triangle).
> G est aux $\frac{2}{3}$ de chaque médiane (à partir du sommet).

4☆ **Ensemble des points M tels que f(M) = k**

- L'ensemble est "défini" par $\lambda_1 MA_1^2 + \lambda_2 MA_2^2 + \ldots = k$, d'où
- Si $\sum \lambda_i = 0$: droite ou plan perpendiculaire à $\vec{c}$.
- Si $\sum \lambda_i \neq 0$, $f(G) + (\sum \lambda_i)GM^2 = k$. Ayant calculé f(G), on obtient $GM^2 = \dfrac{k - f(G)}{\sum \lambda_i}$; suivant que le second membre est négatif, nul, positif, on obtient ∅, {G}, un cercle ou une sphère.

< 0 >

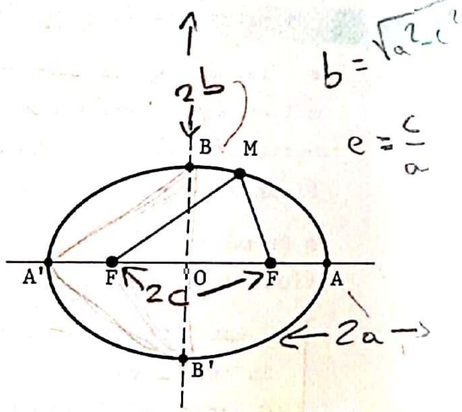
CHAPITRE 19

CONIQUES

1° - ELLIPSE.

Définition 1 : l'ensemble des points M du plan, tels que la somme de leurs distances à 2 points donnés F et F' (foyers) est constante (valeur 2a) est appelé :

$\boxed{\text{ellipse : } MF' + MF = 2a}$



Propriétés et notations

1 • Axes de symétrie : droite FF' (axe focal) et médiatrice BB' de [FF'].

2 • Centre de l'ellipse : centre de symétrie, ou milieu O de [FF'].

3 • Grand-axe : droite AA' (ou FF'), ou segment [AA'], ou mesure 2a de [AA'].

4 • Petit-axe : droite BB', ou segment [BB'], ou mesure 2b de [BB'].

5 • Distance focale : distance 2c des foyers ; on a $\boxed{b = \sqrt{a^2 - c^2}}$

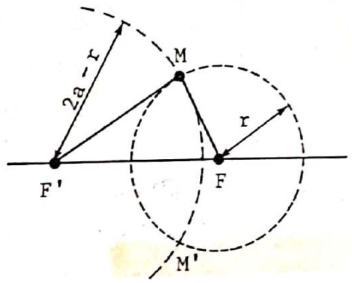
6 • Excentricité : nombre noté e tel que $e = \frac{c}{a}$ $(e < 1)$.

7 • Sommets : points A, A' et points B, B' de l'ellipse, situés sur les axes de symétrie.

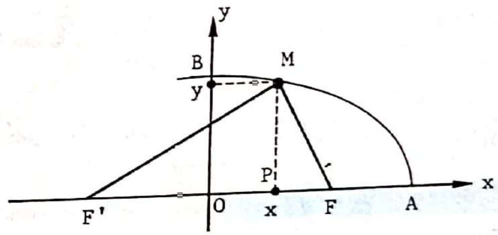
☆ Constructions pratiques d'une ellipse.

1. Fixer les extrémités d'un fil de longueur 2a en F et F' ($FF' = 2c < 2a$), tendre les parties MF, MF' du fil et faire varier M "en gardant la tension".

2. Choisir un rayon r pour tracer le cercle (F, r), tracer le cercle $(F', 2a - r)$, ces cercles se coupent en 2 points M, M' de l'ellipse (on doit prendre $a - c \leqslant r \leqslant a + c$).



Equation : l'ensemble des points M(x, y) du plan, (repère orthonormé) vérifiant l'équation suivante, est une $\boxed{\text{ellipse : } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.}$



Preuve succincte : l'axe Ox étant l'axe focal, l'axe Oy étant l'autre axe de symétrie, on a les relations du triangle FMF' (chapitre 18, 4°).

$$\begin{cases} MF'^2 - MF^2 = 2\overline{F'F}\cdot\overline{OP} = 4cx \\ MF'^2 + MF^2 = 2MO^2 + \frac{FF'^2}{2} = 2(x^2 + y^2) + 2c^2 \end{cases}$$

$MF'^2 - MF^2 = (MF' - MF)(MF' + MF) = 4cx$ et $MF' + MF = 2a$ donnent $MF' - MF = \frac{2cx}{a}$.

$$\begin{cases} MF' + MF = 2a \\ MF' - MF = \frac{2cx}{a} \end{cases} \quad \text{fournit} \quad MF' = a + \frac{cx}{a},\ MF = a - \frac{cx}{a},$$

on obtient $2(x^2 + y^2) + 2c^2 = \left(a + \frac{cx}{a}\right)^2 + \left(a - \frac{cx}{a}\right)^2$ qu'on ramène à $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, à l'aide de $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

★ ***Remarques.***

• Si l'axe Oy est l'axe focal (et Ox l'autre axe de symétrie), l'équation devient $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

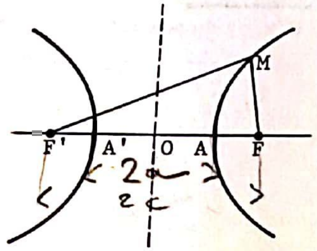
• On peut écrire $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ ou $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ pour la demi-ellipse telle que $y \geq 0$; l'étude de $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ conduit au tracé de l'ellipse (en complétant par symétrie).

• Si F et F' sont confondus, la définition 1 ou l'équation montrent que le cercle est une ellipse particulière ($e = 0$, $a = b$).

2° - HYPERBOLE.

♦ **Définition 1** : l'ensemble des points M du plan tels que la valeur absolue de la différence de leurs distances à 2 points donnés F, F' (foyers) est constante (valeur 2a), est appelé :

$\boxed{\text{hyperbole : } |MF' - MF| = 2a}$



◊ **Propriétés et notations** : analogues à celles de l'ellipse.

• Droite FF' : axe focal ou transverse ; milieu O de [FF'] : centre.

• Grand-axe : droite AA' (ou FF'), ou segment [AA'], on mesure 2a de [AA'].

• Distance focale : distance 2c des foyers.

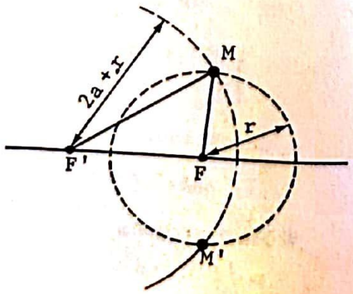
• Petit axe (ou axe non-transverse) : médiatrice de [FF'], ou valeur 2b telle que $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

• Excentricité : nombre noté e tel que $e = \frac{c}{a}$ ($e > 1$).

• Sommets : points A, A' de l'hyperbole situés sur l'axe focal.

☆ Construction pratique d'une hyperbole :

choisir un rayon r pour tracer le cercle (F, r), tracer le cercle (F', 2a + r), ces cercles se coupent en 2 points M, M' de l'hyperbole (on doit prendre $r \geq c - a$).



♦ ***Equation*** : l'ensemble des points M(x,y) du plan (repère orthonormé) vérifiant l'équation suivante,

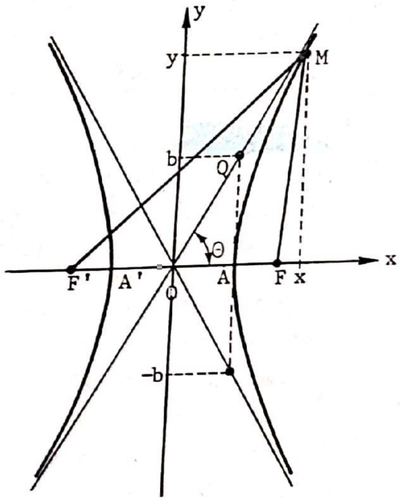
est une $\boxed{\text{hyperbole : } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$

Preuve succincte : Ox axe focal, Oy médiatrice de [FF'], relations du triangle comme dans le cas de l'ellipse, jusqu'à la relation :

$(MF' - MF)(MF' + MF) = 4cx$; on peut supposer $x \geq a$, $MF' - MF = 2a$,

d'où $\begin{cases} MF' + MF = \frac{2cx}{a} \\ MF' - MF = 2a \end{cases}$, d'où

$MF' = \frac{cx}{a} + a$, $MF = \frac{cx}{a} - a$, et l'on termine comme pour l'ellipse ; de même si $x \leq -a$.



★ ***Remarques.***

• Si l'axe Oy est l'axe focal (et Ox l'autre axe de symétrie), l'équation devient $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$.

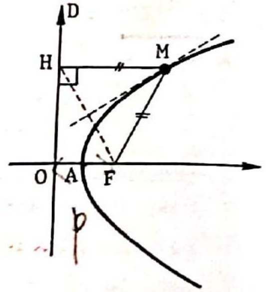
• On peut écrire $y = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$ ou $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ pour les deux "demi-branches" de l'hyperbole telles que $y \geq 0$; l'étude de $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ conduit au tracé de l'hyperbole (complété par symétrie), et on constate les propriétés suivantes :

l'hyperbole possède deux asymptotes (issues du centre O), d'équations $y = \frac{b}{a}x$ et $y = \frac{-b}{a}x$ (si Ox est l'axe transverse).

• Construction d'une asymptote : joindre le centre au point Q, tel que $x_Q = x_A = a$, $y_Q = b$; on voit l'utilité de b ($b = \sqrt{c^2 - a^2}$) dans le cas de l'hyperbole (schéma précédent).

• Si θ est l'angle "non orienté" d'une asymptote avec Ox, on a : $\operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a}$, $\cos\theta = \frac{1}{e}$ (ou $\frac{a}{c}$).

3° - PARABOLE.



◆ **Définition 1** : l'ensemble des points M du plan équidistants d'un point donné F (foyer) et d'une droite donnée D (directrice), tels que $F \notin D$, est appelé $\boxed{\text{parabole : } d(M,F) = d(M,D)}$

◊ **Propriétés**

- Axe de symétrie : droite OF (perpendiculaire à D passant par F).
- Paramètre : mesure p de [OF].
- Sommet : A, milieu de [OF].

☆ Construction pratique d'un parabole

Choisir un point H de D, tracer la perpendiculaire à D en H et la médiatrice de [FH], leur intersection est un point M de la parabole (voir plus loin : la médiatrice de [FH] est la tangente en M à la parabole).

◆ ***Equations*** : l'ensemble des points M(x,y) du plan, (repère orthonormé) vérifiant l'équation suivante, est une $\boxed{\text{parabole} : y^2 = 2px - p^2}$

- Avec d'autres axes, on a $y^2 = 2px$.

Preuve succincte : l'axe des x étant l'axe de symétrie, l'axe des y étant la directrice, la définition est équivalente à :

$MF^2 = MH^2$, $(x-p)^2 + y^2 = x^2$,

d'où $y^2 = 2px - p^2$ (fig. 1).

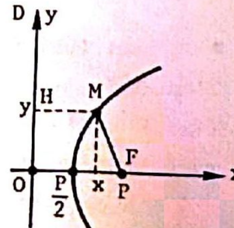


fig. 1

- Si l'on prend l'axe des y selon la tangente au sommet,

$$(x-\tfrac{p}{2})^2 + y^2 = (x+\tfrac{p}{2})^2$$

donne $y^2 = 2px$ (fig. 2).

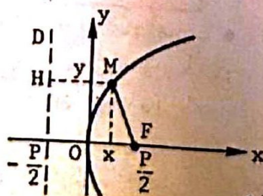
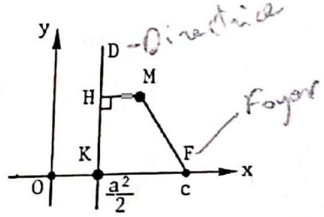


fig. 2

★ ***Remarque*** : on peut écrire $y = \sqrt{p(2x-p)}$ pour la demi-parabole telle que $y \geq 0$, dans le cas de la figure 1 (ou $y = \sqrt{2px}$ dans l'autre cas) l'étude de la fonction correspondante conduit au tracé de la parabole (complété par symétrie).

4° - CONIQUES DEFINIES GEOMETRIQUEMENT.

□ Les 2 modes de définition suivants sont communs à l'ellipse, à l'hyperbole et à la parabole, ils constituent des définitions 2 et 3 de ces courbes.



$d(M,F) = MF$
$d(M,D) = MH$

◆ **Définition 2** (foyers et directrices)

- Etant donnés un point F et une droite D ($F \notin D$) appelés foyer et directrice associée, et un nombre e positif appelé excentricité,

l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MF}{MH} = e$ est une conique :

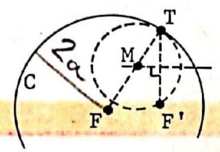
ellipse si $0 < e < 1$, parabole si $e = 1$, hyperbole si $e > 1$.

Preuve succincte : pour la parabole, c'est la définition déjà rappelée au 3°. Pour l'ellipse ou l'hyperbole, il suffit de retrouver les équations déjà vues, à partir de $MF^2 = e^2MH^2$, donc il suffit de savoir replacer les axes à partir de F, D, e donnés.

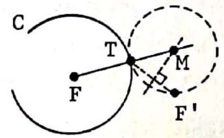
- Ox est perpendiculaire à D et passe par F, Oy s'en déduit dès qu'on a déterminé O ; on dispose de e, et de $d(F,D) = FK$ supposé donné.
- On a 3 formules : $\overline{OF} = c$, $\overline{OK} = \frac{a^2}{c}$, $e = \frac{c}{a}$.
- Si $e < 1$ (ellipse), $c < a$ d'où $\overline{OF} < \overline{OK}$ et $\overline{OK} - \overline{OF} = FK$; $\frac{a^2}{c} - c = FK$ et $\frac{c}{a} = e$ déterminent a et c, $\overline{FO} = -c$ détermine O, etc...
- Si $e > 1$ (hyperbole), de même $c > a$, $\overline{OF} > \overline{OK}$, $\overline{OF} - \overline{OK} = c - \frac{a^2}{c} = FK$, on détermine O comme précédemment, etc....

★ Remarque : la parabole ne possède qu'un couple (F,D) de foyer et directrice, l'ellipse et l'hyperbole en ont deux, par symétrie relative au centre O de la courbe.

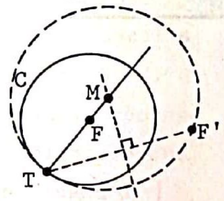
◆ **Définition 3** (ensemble de centres de cercles)



● Etant donné un cercle C (centre F, rayon 2a) appelé cercle directeur, et un point F' (F' ∉ C) d'un même plan,



> l'ensemble des points M du plan qui sont centres de cercles passant par F' et tangents à C est une conique : ellipse pour F' intérieur à C, sinon hyperbole.

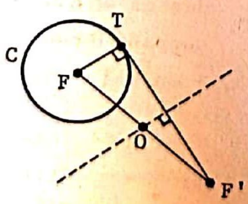


● En remplaçant C par une droite D (F' ∉ D) : parabole.

Preuve succincte : pour la parabole, c'est la définition déjà rappelée au 3°. Pour l'ellipse ou l'hyperbole, on choisit un point T de C : la droite FT et la médiatrice de [F'T] se coupent en M ; suivant les cas, MF + MT = 2a et MT = MF' amènent à MF + MF' = 2a, ou bien MF − MT = MF − MF' = 2a ou MT − MF = MF' − MF = 2a, on retrouve les définitions 1.

★ Remarques

● C(F,2a) et le point F' peuvent être changés en C'(F',2a) et F : l'ellipse ou l'hyperbole possèdent 2 cercles directeurs, centrés aux foyers. Dans chaque cas, le point associé (par la définition 3) est l'autre foyer.



● Dans le cas de l'hyperbole, la médiatrice de [F'T] peut être parallèle

à la droite FT : cette médiatrice est alors une asymptote de la courbe :

> les asymptotes de l'hyperbole sont les médiatrices des segments [F'T] qui sont tangents au cercle directeur C.

☐ Commentaire : en géométrie, les ellipses, hyperboles, paraboles constituent l'ensemble des coniques propres, (souvent abrégées en "coniques") ; le cercle est une ellipse de foyers confondus ($e = 0$) mais échappe à la définition par foyers et directrices ; cependant, on inclut les cercles dans les coniques propres, en général.

5° - CONIQUES DEFINIES ANALYTIQUEMENT.

☐ Généralités

● En pratique, le repère est orthonormé et l'on considère 5 coefficients donnés a, b, c, d, e tels que $(a,b) \neq (0,0)$, auxquels est associée l'expression $f(x,y) = ax^2 + by^2 + 2cx + 2dy + e$.

● L'ensemble des solutions (x,y) de l'équation $f(x,y) = 0$ peut être représenté graphiquement par l'ensemble des points M(x,y) dont les coordonnées vérifient l'équation (courbe d'équation $f(x,y) = 0$).

◇ Les ensembles précédents sont appelés coniques.

● On distingue les coniques propres et les coniques dégénérées.

◇ Diverses formes des courbes d'équation $ax^2 + by^2 + 2cx + 2dy + e = 0$.

● si $b = 0$: $ax^2 + 2cx + 2dy + e = 0$ (avec $a \neq 0$).

• Ou bien $d = 0$, alors il reste un trinôme du 2° degré en x, suivant les cas on a 2 droites parallèles à Oy, une droite double parallèle à Oy, ou ∅ : coniques dégénérées.

• Ou bien $d \neq 0$, alors on obtient la forme $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, on reconnaît une parabole d'axe parallèle à Oy.

● si $a = 0$: $by^2 + 2cx + 2dy + e = 0$ (avec $b \neq 0$).

• Ou bien $c = 0$, on obtient 2 droites (ou une double) parallèles à Ox, ou $\emptyset$: coniques dégénérées.

• Ou bien $c \neq 0$, on obtient la forme $x = \alpha y^2 + \beta y + \gamma$, on reconnaît une parabole d'axe parallèle à Ox (en échangeant x et y : $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$).

• Si $a = b$: $a(x^2+y^2) + 2cx + 2dy + e = 0$ (avec $a \neq 0$), on obtient la forme $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$, on sait qu'il s'agit d'un cercle, éventuellement réduit à un point, ou $\emptyset$.

★ Cas "général" $a \neq b$, $ab \neq 0$: on peut toujours remplacer les termes en x par une forme canonique, de même pour les termes en y, on peut ensuite conclure.

☆ Exemple : $9x^2 - 4y^2 + 18x + 16y + 29 = 0$

• $9x^2 + 18x = 9(x^2+2x) = 9[(x+1)^2 - 1]$.

• $-4y^2 + 16y = -4(y^2 - 4y) = -4[(y-2)^2 - 4]$.

• L'équation devient : $9(x+1)^2 - 9 - 4(y-2)^2 + 16 + 29 = 0$, d'où $9(x+1)^2 - 4(y-2)^2 = -36$; on ramène 1 au second membre en divisant par -36, d'où $\dfrac{(y-2)^2}{9} - \dfrac{(x+1)^2}{4} = 1$.

• On reconnaît l'hyperbole de centre $\Omega\ (-1,2)$, d'axe focal parallèle à Oy, pour laquelle $a = 3$ et $b = 2$, d'où $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{13}$; dans ce cas les asymptotes (passant par Ω) ont pour pentes $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$ et $-\frac{a}{b} = -\frac{3}{2}$, (et non pas $\frac{b}{a}$ et $-\frac{b}{a}$ comme dans le cas où Ox est axe focal).

☐ Conclusion : sauf les cas "sans x^2" ou bien "sans y^2", on peut toujours se ramener à une des formes symbolisées par $\pm \dfrac{(x-\alpha)^2}{\lambda} \pm \dfrac{(y-\beta)^2}{\mu} = 1$ ou 0, ce qui permet de conclure : ensemble $\emptyset$, ou bien 2 droites sécantes, ou bien 1 point, ou bien ellipse (ou cercle), ou bien hyperbole, dont on précise aisément les caractéristiques correspondantes.

6° - COMPLEMENTS SUR LES CONIQUES PROPRES.

1 ◊ Représentations paramétriques

• Ellipse : $x = a\cos t$, $y = b\sin t$. Si t varie de 0 à 2π par exemple, la courbe est "décrite une fois". Autres équations : $x = a\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = b\dfrac{2t}{1+t^2}$.

• Cercle : $x = R\cos t$, $y = R\sin t$. Dans ce cas, t peut être mis en évidence par $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$ (ou $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) + \pi$), et le rayon est $|R|$.

• Hyperbole : $x = \dfrac{a}{\cos t}$, $y = b\,\mathrm{tg}\,t$. Si t varie de 0 à 2π par exemple, la courbe est "décrite une fois". Autres équations : $x = a\dfrac{1+t^2}{1-t^2}$, $y = b\dfrac{2t}{1-t^2}$.

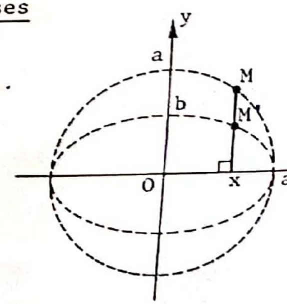
2 ◊ Cercle et affinité orthogonale

• Affinité orthogonale d'axe Oy et de rapport λ (λ constante non nulle) : transformation où $M(x,y)$ devient $M'(x,\lambda y)$; on conserve l'abscisse, on multiplie l'ordonnée par λ.

• Affinité orthogonale d'axe Ox et de rapport μ : $M(x,y) \longrightarrow M'(\mu x, y)$.

• Transformés de cercles ou d'ellipses

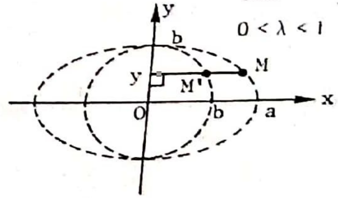
1. le cercle d'équation $x^2 + y^2 = a^2$ devient (par l'affinité d'axe Oy, de rapport λ), la courbe d'équation $x'^2 + \dfrac{y'^2}{\lambda^2} = a^2$ ou $\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{(\lambda a)^2} = 1$: ellipse d'axe focal Ox si $|\lambda| < 1$, Oy si $|\lambda| > 1$, dont le cercle précédent est appelé cercle principal.



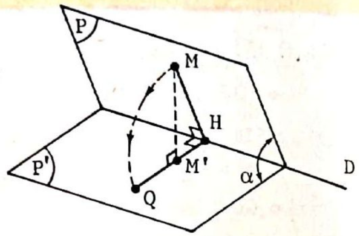
cas $\mu = \frac{b}{a}$

2. L'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ devient (par l'affinité d'axe Ox, de rapport μ) la courbe d'équation $\dfrac{x'^2}{(\mu a)^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = 1$: ellipse en général, cercle si $|\mu| = \frac{b}{a}$ (car $x'^2 + y'^2 = b^2$).

cas $0 < \lambda < 1$



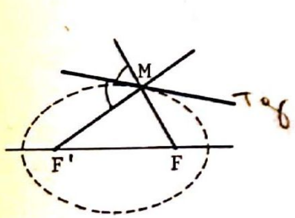
• Conséquence : si 2 plans P et P', sécants en D, font entre eux un angle de mesure $\alpha (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$, un point $M \in P$ se projette $M' \in P'$; M et M' se projettent en H sur D ; on a $HM' = HM \cos\alpha$, et si l'on rabat P sur P' par rotation (de α) autour de D, M vient en Q, la relation subsiste : $HM' = HQ \cos\alpha$. Si M décrivait un cercle, M' décrit une ellipse, on dit que l'ellipse est projection d'un cercle égal à son cercle principal. Le cercle est dans P, l'ellipse dans P'.



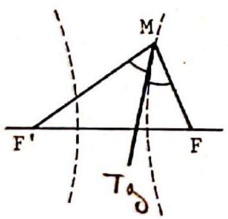
3 ◊ Tangentes aux coniques

• Les "demi" coniques ayant des équations de types $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ ou $y = \sqrt{2px}$, elles admettent des tangentes puisque les fonctions correspondantes sont dérivables (éventuellement avec "dérivées infinies").

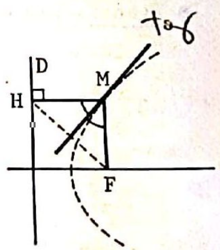
• Construction des tangentes : d'après les rappels suivants.



Ellipse : la tangente est bissectrice extérieure de $\widehat{MF, MF'}$



Hyperbole : la tangente est bissectrice intérieure de $\widehat{MF, MF'}$



Parabole : la tangente est bissectrice de $\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MH}$, (ou médiatrice de [FH]).

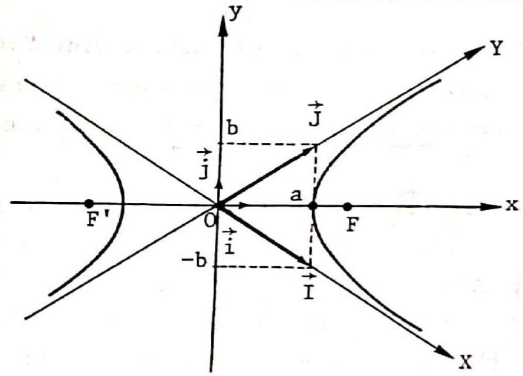
4 ◊ Hyperbole rapportée à ses asymptotes

• Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l'équation de l'hyperbole est $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, (Ox axe focal), les asymptotes sont dirigées

par $\vec{I} = a\vec{i} - b\vec{j}$ et par $\vec{J} = a\vec{i} + b\vec{j}$ (non unitaires en général).

• Si l'on prend $(O, \vec{I}, \vec{J})$ pour repère, on écrit, $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = X\vec{I} + Y\vec{J}$, d'où $x = aX + aY$, $y = -bX + bY$, l'équation devient $(X+Y)^2 - (-X+Y)^2 = 1$. d'où $XY = \frac{1}{4}$ (repère non normé en général).

• Si l'on "rend $\vec{I}$ et $\vec{J}$ unitaires", puisque $\sqrt{a^2 + b^2} = c$ (demi-distance focale) on obtient $\boxed{XY = \frac{c^2}{4}}$ (repère normé, non orthogonal en général).



CHAPITRE 20

DROITE VECTORIELLE $\mathbb{R}$
DROITE AFFINE $\mathbb{R}$

1° - DROITE VECTORIELLE $\mathbb{R}$.

☐ Comme il arrive souvent, les cas les plus "simples" sont les plus malaisés à interpréter convenablement : l'ensemble $\mathbb{R}$ (des nombres réels) est un cas fondamental dans lequel on doit éviter toute confusion.

$(\mathbb{R},+,\times)$

- Le corps $\mathbb{R}$ est l'ensemble $\mathbb{R}$ muni de l'addition et de la multiplication (internes), agissant sur les nombres réels (qui sont éléments de $\mathbb{R}$).
- L'espace vectoriel $\mathbb{R}$, ou droite vectorielle $\mathbb{R}$, est l'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la même addition que pour le corps, et du produit par un réel λ pris dans "un autre" corps $\mathbb{R}$; cette opération est externe.
- On dit souvent $\mathbb{R}$, sans préciser s'il s'agit du corps ou d'autre chose.

★ Remarques.

- Tout réel x pourrait être considéré comme un vecteur de l'espace $\mathbb{R}$; en choisissant une base, c'est-à-dire un "réel-vecteur" a, fixé et non nul, le "vecteur" x aurait une composante λ sur cette base a, on écrirait $x = \lambda a$; λ serait donc le rapport $\frac{x}{a}$ des réels (et non des vecteurs) x et a.
- La base canonique (ou naturelle) de l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ est le "réel-vecteur" 1 ; alors, $x = \lambda 1$ s'interprète de la manière suivante : x et 1 sont des "vecteurs", la composante λ est un nombre, évidemment égal au "réel-nombre" x.

- En pratique, on évite la plupart des confusions en notant par exemple $\vec{i}$ la base canonique, et $x\vec{i}$ le vecteur dont la composante est le nombre réel x.

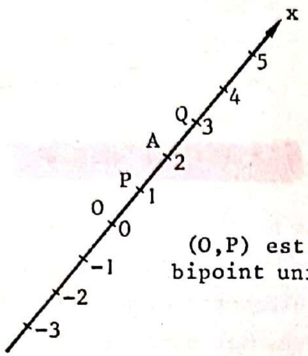
2° - DROITE AFFINE $\mathbb{R}$.

☐ A partir de l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ précédent (ensemble des vecteurs $x\vec{i}$ pour x réel), on crée l'espace affine, encore noté $\mathbb{R}$, dont les éléments doivent être considérés comme des points (mais non comme des vecteurs, ni comme des nombres), de la manière suivante :

- Au vecteur $x\vec{i}$ et au point P, on fait correspondre le point Q, défini par $Q = P + x\vec{i}$, l'opération (externe) désignée par $+$ devant vérifier les axiomes d'espace affine rappelés au chapitre 1.
- L'espace vectoriel initial est dit directeur de l'espace affine obtenu.
- En pratique, on écrit alors $Q - P = x\vec{i}$, et on convient d'écrire $Q - P$ sous la forme $\overrightarrow{PQ}$: de cette manière, le couple (P,Q) de points représente un vecteur $x\vec{i}$ dont le point P devient l'origine fixée, le point Q étant l'extrémité qui s'en déduit ; mais si l'on change le point P en P', il existe alors un autre point Q' tel que $\overrightarrow{P'Q'} = x\vec{i}$.
- On peut dire que l'espace affine $\mathbb{R}$ est un "espace de points" ; d'une certaine manière, les bipoints (couples de points) de cet espace, représentent l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ (espace de vecteurs).
- L'espace affine $\mathbb{R}$ est souvent appelé droite affine $\mathbb{R}$, ou simplement $\mathbb{R}$.

☆ Exemples graphiques

On a coutume de représenter l'espace affine $\mathbb{R}$, par un axe gradué Ox, et les points de cet espace par les graduations qui leur correspondent.



(O,P) est le bipoint unité

● C'est ainsi que le point x est souvent confondu avec le nombre réel x qui correspond à la graduation x.

● Si l'on fait correspondre le point O et le nombre 0, le point P et le nombre 1, le point Q et le nombre 3, le bipoint (P,Q) conduit à écrire : $Q - P = 3 - 1 = 2$; on écrit donc $\overrightarrow{PQ} = 2\vec{i}$, où $\vec{i}$ correspond par exemple à (O,P).

● On aurait $\overrightarrow{OP} = \vec{i}$, mais si A correspond à 2, on a aussi : $\overrightarrow{PA} = \vec{i}$, $\overrightarrow{AQ} = \vec{i}$; de même, $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i}$, $\overrightarrow{QP} = -2\vec{i}$, et ainsi de suite.

□ Conclusion : suivant que $\mathbb{R}$ est le corps $\mathbb{R}$, la droite vectorielle $\mathbb{R}$, ou la droite affine $\mathbb{R}$, les notions correspondantes sont essentiellement différentes.

● Dans bien des cas, c'est au lecteur à faire la part des choses, et à s'accommoder des abus commis au sujet de $\mathbb{R}$. Par exemple, on dit : la valeur de f au point x, alors que si l'on a

$$f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1} \end{array} \right. ,$$

il est évident que x ne désigne pas un point, mais un nombre réel, du corps $\mathbb{R}$, sinon comment calculer f(x) ?

3° - APPLICATIONS LINEAIRES DE $\mathbb{R}$ DANS $\mathbb{R}$.

□ Dans ce 3°, $\mathbb{R}$ désigne l'espace vectoriel (éléments de type $x\vec{i}$, x réel), sauf mention contraire, et l'on note $\vec{f}$, $\vec{g}$, ... les applications étudiées.

◆ Application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: application $\vec{f}(\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R})$ telle que pour tous vecteurs $x\vec{i}, y\vec{i}, \ldots$ et tous scalaires λ

(nombres réels), $\vec{f}$ vérifie : $\vec{f}[\lambda(x\vec{i}) + (y\vec{i})] = \lambda\vec{f}(x\vec{i}) + \vec{f}(y\vec{i})$.

◊ Propriété caractéristique : $\vec{f}$ est linéaire si et seulement si $\vec{f}$ est de type : $\vec{f}(\vec{v}) = m\vec{v}$, où m est un nombre réel. On dit que $\vec{f}$ est une homothétie vectorielle (de rapport m).

☆ Exemples

- Si $m = 0$, $\vec{f}(\vec{v}) = \vec{0} = 0 \cdot \vec{i}$, $\vec{f}$ est l'application nulle (notée $\vec{0}$).
- Si $m = 1$, $\vec{f}(\vec{v}) = \vec{v}$, $\vec{f}$ est l'identité (notée Id).
- Si $m = -1$, $\vec{f}(\vec{v}) = -\vec{v}$, $\vec{f}$ est la symétrie centrale (ou -Id).

◊ Opérations sur les applications linéaires

● Somme : $(\vec{f} + \vec{g})$ est l'application définie par :
$$(\vec{f} + \vec{g})(\vec{v}) = \vec{f}(\vec{v}) + \vec{g}(\vec{v}), \forall \vec{v} \in \mathbb{R}$$

● Produit par le réel λ : $(\lambda\vec{f})$ est l'application définie par :
$$(\lambda\vec{f})(\vec{v}) = \lambda \times \vec{f}(\vec{v}), \forall \vec{v} \in \mathbb{R}$$

● Composée : $\vec{g}\circ\vec{f}$ est l'application définie par :
$$\vec{g}\circ\vec{f}(\vec{v}) = \vec{g}[\vec{f}(\vec{v})], \forall \vec{v} \in \mathbb{R}$$

★ Remarque : Si $\vec{f}(\vec{v}) = m\vec{v}$ et $\vec{g}(\vec{v}) = m'\vec{v}$, on a :
$(\vec{f} + \vec{g})(\vec{v}) = (m + m')\vec{v}$, $(\lambda\vec{f})(\vec{v}) = (\lambda m)\vec{v}$, $\vec{g}\circ\vec{f}(\vec{v}) = (m'm)\vec{v}$;
Comparer ces résultats avec leurs homologues pour $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ (où les rapports m et m' sont remplacés par des matrices).

4° - APPLICATIONS AFFINES DE $\mathbb{R}$ DANS $\mathbb{R}$.

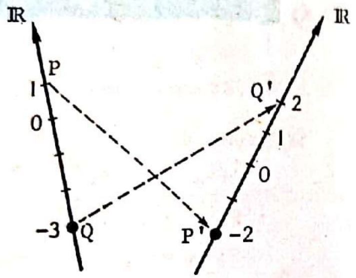
□ Dans ce 4°, $\mathbb{R}$ désigne l'espace affine (éléments de type P, Q, P', Q',...), sauf mention contraire.

◆ Application affine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: application $f(\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R})$ telle que pour tous points P, Q,... et leurs transformés $P' = f(P)$, $Q' = f(Q)$,... il existe une même application linéaire $\vec{f}$ (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, espaces vectoriels) vérifiant :
$$f(Q) = f(P) + \vec{f}(\overrightarrow{PQ}), \text{ ou } \overrightarrow{P'Q'} = \vec{f}(\overrightarrow{PQ}).$$

● $\vec{f}$ est dite partie linéaire de f (ou application linéaire associée à f).

• $\vec f$ est déterminée dès que l'on connaît les transformés par f de deux points distincts.

☆ Exemple : Si P est représenté par 1 et Q par −3, et f(P) = P' représenté par −2, f(Q) = Q' par 2, on a : $\overrightarrow{P'Q'} = Q' - P'$ ou $4\vec i$, $\overrightarrow{PQ} = Q - P$ ou $-4\vec i$, $\overrightarrow{P'Q'} = \vec f(\overrightarrow{PQ})$ s'écrit : $4\vec i = \vec f(-4\vec i)$, donc $\vec f$ est définie par $\vec f(\vec v) = -\vec v$, c'est la symétrie centrale.



• Il s'ensuit qu'on connaît Q' ou f(Q), dès qu'on a $\vec f$ et P' = f(P) pour P fixé, par $Q' = P' + \vec f(\overrightarrow{PQ})$, soit ici : $Q' = P' - \overrightarrow{PQ}$.

◊ **Invariants par f (affine)** : points confondus avec leur image par f.

A invariant par f $\Leftrightarrow$ A = f(A).

• Si f(P) = P' est connu, et si $\vec f$ associée est connue ($\vec f(\vec v) = m\vec v$), f(A) = A s'écrit : $f(P) + m\overrightarrow{PA} = A$, $m\overrightarrow{PA} = A - P'$, $m\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{P'A}$.

• En introduisant l'origine O, on obtient $(1-m)\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{PP'} + (1-m)\overrightarrow{OP}$, donc il existe en général un point invariant unique (si $m \neq 1$), défini par $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{1-m}\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{OP}$, où P' désigne f(P).

• Pour tout autre point Q de transformé Q', $f(Q) = f(A) + m\cdot\overrightarrow{AQ}$ s'écrit $Q' = A + m\overrightarrow{AQ}$, d'où $\overrightarrow{AQ'} = m\overrightarrow{AQ}$; on dit que :

f est l'homothétie affine de centre A, de rapport m,
$\vec f$ est l'homothétie vectorielle de rapport m (partie linéaire de f).

CHAPITRE 21

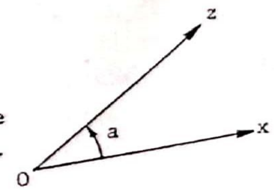
ANGLES TRANSFORMATIONS USUELLES DU PLAN

☐ Avertissement : dans ce chapitre, le mot plan désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ ou l'espace affine $\mathbb{R}^2$ correspondant, l'orientation est la même qu'en trigonométrie, l'orthogonalité est prise au sens usuel (où les angles sont droits). Eventuellement, le lecteur verra d'après le contexte s'il s'agit d'éléments affines (points, droites,...) ou vectoriels (vecteurs, directions,...).

1° - ANGLES DANS LE PLAN.

Angles de « demi-axes ».

Voir au chapitre 2 la notation $\widehat{\vec{Ox},\vec{Oz}}$, la mesure "principale" a ($a \in [0,2\pi[$), l'ensemble des mesures $\{a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, la notation $\widehat{\vec{Ox},\vec{Oz}} = a$ (mod 2π).



• Angle droit : angle dont une mesure est $\frac{\pi}{2}$, ou bien angle dont une mesure est $-\frac{\pi}{2}$.

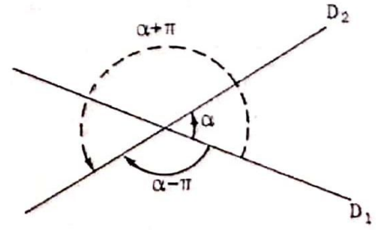
• Formule de Chasles : $\widehat{\vec{Ox},\vec{Oz}} = \widehat{\vec{Ox},\vec{Ox_1}} + \widehat{\vec{Ox_1},\vec{Ox_2}} + \dots + \widehat{\vec{Ox_n},\vec{Oz}}$.

En particulier : $\widehat{\vec{Oz},\vec{Ox}} = -\widehat{\vec{Ox},\vec{Oz}}$

$\widehat{\vec{Ox},\vec{Oy}} = \widehat{\vec{Oz},\vec{Ot}} \Leftrightarrow \widehat{\vec{Ox},\vec{Oz}} = \widehat{\vec{Oy},\vec{Ot}}$.

Angles de droites.

• Soient 2 droites D_1, D_2 : l'angle de ces droites est noté $\widehat{D_1,D_2}$ et défini comme l'un quelconque des angles de demi-axes que l'on peut définir à partir d'un demi-axe de D_1 et d'un demi-axe de D_2 (dans cet ordre).



● Si l'un de ces derniers a pour mesure α, tout autre a pour mesure $\alpha + \pi$ ou $\alpha - \pi$ (mod 2π), ce qui revient à dire : toutes les mesures de $\widehat{D_1,D_2}$ sont représentées par $\{\alpha + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

● En pratique, on écrit $\boxed{\widehat{D_1,D_2} = \alpha \pmod{\pi}}$.

◊ **Propriétés**

● Bissectrices : pour un angle de demi-axes, les bissectrices sont deux demi-axes opposés, constituant une seule droite ; pour un angle de droites, les bissectrices sont 2 droites perpendiculaires.

● Directions isogonales : deux couples (D_1,D_2) et (D_3,D_4) constituent 4 directions isogonales, lorsque D_1,D_2 et D_3,D_4 ont mêmes directions de bissectrices.

● Droites anti-parallèles : deux couples (D_1,D_2) et (D_3,D_4) constituent 4 droites anti-parallèles, lorsque les directions correspondantes sont isogonales.

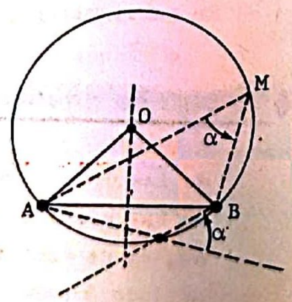
isogonalité ou anti-parallélisme, reviennent à :

$$\widehat{D_1,D_3} + \widehat{D_2,D_4} = 0 \pmod{\pi}.$$

2° - ENSEMBLES DE POINTS DEFINIS PAR ANGLES.

♦ **Ensemble des points M tels que $\widehat{MA,MB} = \alpha \pmod{\pi}$**

● A et B sont donnés distincts, α est une mesure donnée ; l'angle de droites $\widehat{MA,MB}$ a l'une de ses mesures constante et égale à α, si et seulement si M est sur le cercle (points A et B exclus) défini par :



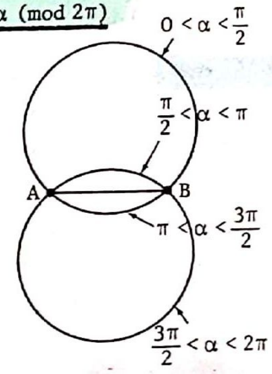
• centre O, situé sur la médiatrice de [AB] et sur la droite définie par $\widehat{AB,AO} = \frac{\pi}{2} - \alpha \pmod{\pi}$

• rayon OA ou OB, $\left(OA = \frac{AB}{2\sin\alpha}\right)$.

● Le cas particulier $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (ou $\alpha = -\frac{\pi}{2}$) donne le cercle de diamètre AB.

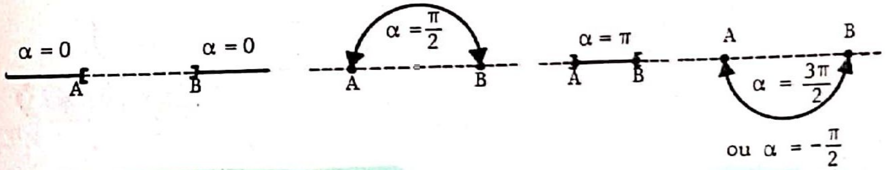
♦ **Ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = \alpha \pmod{2\pi}$**

● Il s'agit d'angle de demi-axes, l'ensemble est un seul des 4 arcs limités par A et B sur le cercle défini précédemment ou sur son symétrique par rapport à la droite AB.



● Le schéma, compte tenu de la position de A et B, donne l'arc en fonction de la "position" de α dans $]0,2\pi[$.

● Les points A et B ne font pas partie des ensembles, les cas particuliers "limites" sont schématisés ci-dessous.



♦ ***Condition de cocyclisme.***

● 4 points distincts A, B, C, D (non alignés) sont cocycliques (sur un même cercle) si et seulement si :

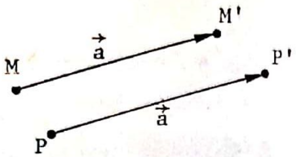
$$\boxed{\widehat{CA,CB} = \widehat{DA,DB} \pmod{\pi}}$$

3° - TRANSLATIONS DU PLAN.

♦ **Définition** : la translation de vecteur $\vec{a}$ (donné) est l'application affine notée $T_{\vec{a}}$, de schéma $T_{\vec{a}} : M \longrightarrow T_{\vec{a}}(M) = M'$, telle que

$$\boxed{M' = M + \vec{a} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{MM'} = \vec{a}}$$

• On peut écrire : $P' = P + \vec{a}$, $M' = M + \vec{a}$, d'où : $P' - M' = P - M$, ou $\overrightarrow{M'P'} = \overrightarrow{MP}$, donc la partie linéaire de $T_{\vec{a}}$ est l'identité vectorielle.



◊ **Propriétés**

• $T_{\vec{o}}$ est l'identité affine.

• $T_{\vec{a}} \circ T_{\vec{b}} = T_{\vec{b}} \circ T_{\vec{a}} = T_{\vec{a}+\vec{b}}$, la composition revient à la somme des vecteurs des translations (commutative).

• $(T_{\vec{a}})^{-1} = T_{-\vec{a}}$; toute translation est bijective.

• Une droite est transformée en une droite parallèle, un cercle en un cercle de même rayon.

4° - HOMOTHETIES.

♦ **Définition** : l'homothétie de centre A, de rapport λ est l'application affine notée $H_{(A,\lambda)}$, de schéma $H_{(A,\lambda)} : M \longrightarrow H_{(A,\lambda)}(M) = M'$, telle que :

$$M' = A + \lambda \overrightarrow{AM} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{AM'} = \lambda \overrightarrow{AM}$$

• La partie linéaire de $H_{(A,\lambda)}$ est l'homothétie vectorielle $h_\lambda : \vec{v} \longrightarrow \lambda\vec{v}$.

◊ **Propriétés**

• $H_{(A,0)}$ transforme tout point M en le point A donné.

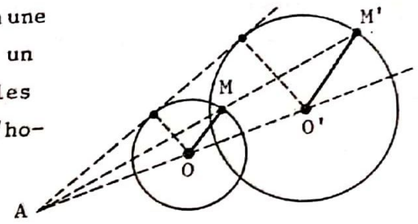
• $H_{(A,1)}$ est l'identité du plan affine.

• $H_{(A,-1)}$ est la symétrie affine de centre A.

• $H_{(A,\lambda)} \circ H_{(A,\mu)} = H_{(A,\mu)} \circ H_{(A,\lambda)} = H_{(A,\lambda\mu)}$, la composition d'homothéties de même centre revient au produit des rapports correspondants (commutatif).

• Si $\lambda \neq 0$, $\left[H_{(A,\lambda)}\right]^{-1} = H_{(A,\frac{1}{\lambda})}$; toute homothétie de rapport non nul est bijective, son centre est l'unique point invariant.

• Une droite est transformée en une droite parallèle, un cercle en un cercle (voir schéma) tels que les centres se correspondent par l'homothétie, etc....



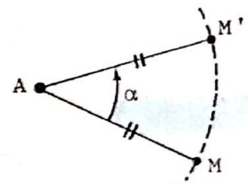
5° - ROTATIONS.

♦ **Définition** : la rotation de centre A et d'angle α est l'application affine notée $R_{(A,\alpha)}$, de schéma :

$R_{(A,\alpha)} : M \longrightarrow R_{(A,\alpha)}(M) = M'$

telle que :

$$(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}}) = \alpha \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{AM'}\| = \|\overrightarrow{AM}\|$$



• La partie linéaire de $R_{(A,\alpha)}$ est la rotation vectorielle d'angle α, dont la matrice (en base orthonormée) est de type

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

◊ **Propriétés**

• $R_{(A,2k\pi)}$ est l'identité du plan affine.

• $R_{(A,\pi+2k\pi)}$ est la symétrie affine de centre A.

• $R_{(A,\alpha)} \circ R_{(A,\beta)} = R_{(A,\beta)} \circ R_{(A,\alpha)} = R_{(A,\alpha+\beta)}$, la composition de rotations de même centre revient à la somme des angles (commutative).

• $\left[R_{(A,\alpha)}\right]^{-1} = R_{(A,-\alpha)}$; toute rotation est bijective, son centre est l'unique point invariant (si $\alpha \neq 0$, mod 2π).

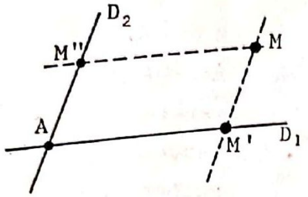
6° - PROJECTIONS AFFINES.

♦ **Définition** : 2 doites affines D_1 et D_2 sécantes en A étant données, la projection sur D_1 parallèlement à D_2 est l'application affine notée pr_{D_1}, de schéma :

pr_{D_1} : $M \longrightarrow pr_{D_1}(M) = M'$,

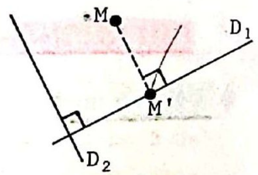
telle que :

$\boxed{M' \in D_1 \quad \text{et} \quad MM' \,//\, D_2}$



• En échangeant les rôles de D_1 et D_2, on a pr_{D_2} : $M \longrightarrow M''$ ($M'' \in D_2$, $MM'' // D_1$).

★ Cas particulier : si D_1 est perpendiculaire à D_2 ($D_1 \perp D_2$), il s'agit de projection orthogonale (ou simplement projection) et l'on a $M' \in D_1$, $MM' \perp D_1$.



◊ Propriétés (si pr_{D_1} est "parallèlement à D_2" et inversement, et si D_1 et D_2 se coupent en A).

• $pr_{D_1} \circ pr_{D_2} = pr_{D_2} \circ pr_{D_1}$, application constante (tout point M vient en A).

• $pr_{D_1} \circ pr_{D_1} = pr_{D_1}$ (répéter une même projection ne change pas le point projeté).

• Tout point de D_1 est invariant par pr_{D_1}.

• Les projections ne sont pas injectives.

7° - SYMETRIES ET REFLEXIONS.

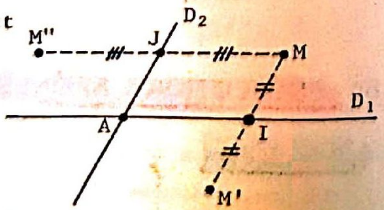
Définition : 2 droites affines D_1 et D_2 sécantes en A étant données, la symétrie d'axe D_1 parallèlement à D_2 est l'application affine notée S_{D_1}, de schéma S_{D_1} : $M \longrightarrow S_{D_1}(M) = M'$, telle que

$\boxed{MM' \,//\, D_2 \text{ et le milieu I de } [MM'] \text{ est sur } D_1}$

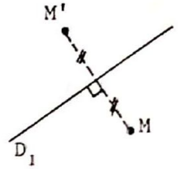
• En échangeant les rôles de D_1 et D_2, on a :

S_{D_2} : $M \longrightarrow M''$

tel que $MM'' // D_1$ et le milieu J de $[MM'']$ est sur D_2.



★ Cas particulier : si D_1 est perpendiculaire à D_2 ($D_1 \perp D_2$), il s'agit de symétrie orthogonale (ou réflexion) d'axe D_1, et on a S_{D_1} : $M \longrightarrow M'$ tel que D_1 est médiatrice de $[MM']$.



◊ Propriétés (si S_{D_1} est "parallèlement à D_2" et inversement, et si D_1 et D_2 se coupent en A).

• $S_{D_1} \circ S_{D_2} = S_{D_2} \circ S_{D_1} = H_{(A,-1)}$, symétrie de centre A, ou $R_{(A,\pi+2k\pi)}$.

• $(S_{D_1})^{-1} = S_{D_1}$, une symétrie est bijective, égale à sa réciproque (elle fait partie de l'ensemble des involutions) ; tout point de D_1 est invariant.

8° - COMPLEMENTS.

◆ Similitude : composée (commutative) d'une rotation et d'une homothétie de même centre, notée $S_{(A,\lambda,\alpha)}$ à partir de $H_{(A,\lambda)}$ et $R_{(A,\alpha)}$

◆ Involution : transformation f telle que : $\boxed{f \circ f = Id \text{ ou } f^{-1} = f}$

• Une involution est nécessairement bijective.

◆ Isométrie : transformation f qui "conserve" la distance (euclidienne).

• Si P et Q ont pour transformés P' et Q' par f,

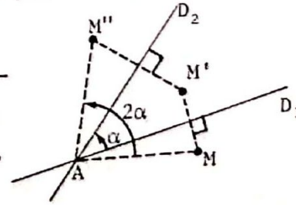
$\boxed{f \text{ isométrie} \Longleftrightarrow d(M',P') = d(M,P) \quad \forall M, \forall P}$

◊ Déplacement : transformation f qui est une isométrie, dont la partie linéaire $\vec{f}$ est une rotation vectorielle.

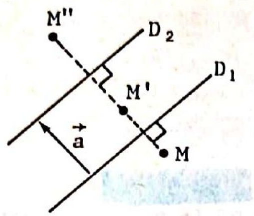
◊ Anti-déplacement : isométrie qui n'est pas un déplacement.

☆ Exemples de composées

1. Composées de 2 réflexions d'axes sécants en A : $S_{D_2} \circ S_{D_1} = R_{(A,2\alpha)}$ et $S_{D_1} \circ S_{D_2} = R_{(A,-2\alpha)}$ (où $\widehat{D_1,D_2} = \alpha \bmod \pi$, donc 2α est défini mod 2π).



2. Composées de 2 réflexions d'axes parallèles : $S_{D_2} \circ S_{D_1} = T_{2\vec{a}}$ et $S_{D_1} \circ S_{D_2} = T_{-2\vec{a}}$ (ou $\vec{a}$ applique D_1 sur D_2 par translation).



● Rappels divers

• Produit scalaire de 2 vecteurs $\vec{u} = (X,Y)$, $\vec{v} = (X',Y')$ de $\mathbb{R}^2$:

application ϕ : $\left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{u},\vec{v}) \longrightarrow \phi(\vec{u},\vec{v}) \end{array}\right.$ telle que, pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, ... et tous scalaires λ, ... l'on ait :

1. ϕ symétrique : $\phi(\vec{v},\vec{u}) = \phi(\vec{u},\vec{v})$
2. ϕ bi-linéaire : linéaire "en u", $\phi(\lambda\vec{u}+\vec{u}',\vec{v}) = \lambda\phi(\vec{u},\vec{v}) + \phi(\vec{u}',\vec{v})$
   linéaire "en v", $\phi(\vec{u},\lambda\vec{v}+\vec{v}') = \lambda\phi(\vec{u},\vec{v}) + \phi(\vec{u},\vec{v}')$
3. ϕ définie-positive : $\phi(\vec{u},\vec{u}) \geqslant 0$, $\phi(\vec{u},\vec{u}) = 0$ si et seulement si $\vec{u} = \vec{0}$.

• Produit scalaire usuel : euclidien, tel que $\boxed{\phi(\vec{u},\vec{v}) = XX' + YY'}$ (en base orthonormée), noté plutôt $\vec{u}\cdot\vec{v} = XX' + YY'$.

• Norme, distance : la norme de $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$ est $\|\vec{u}\| = \sqrt{\phi(\vec{u},\vec{u})}$

la distance de 2 points (M,P), notée d(M,P) est $\boxed{d(M,P) = \|\overrightarrow{MP}\|}$.

Dans le cas euclidien (en base ou repère orthonormés),

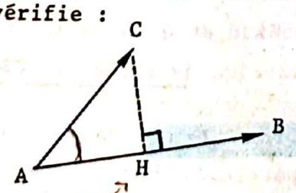
$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\quad d(M,P) = \sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2}$

• Le produit scalaire euclidien vérifie :

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

d'où l'importante formule :

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH}$



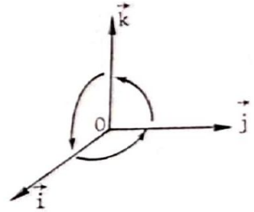
$\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$

CHAPITRE 22

ANGLES. TRANSFORMATIONS USUELLES DE L'ESPACE

☐ Avertissement : dans ce chapitre, le mot espace désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ ou l'espace affine $\mathbb{R}^3$ correspondant, l'orientation est celle "des physiciens", l'orthogonalité est prise au sens usuel (où les angles sont droits). Eventuellement, le lecteur verra, d'après le contexte, s'il s'agit d'éléments affines (points, droites, plans,...) ou vectoriels (vecteurs, directions de droites, directions de plans,...).

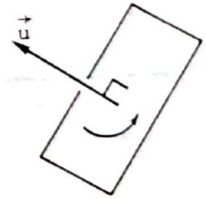
1° - ANGLES DANS L'ESPACE.



☐ Orientation de l'espace : en base ou repère orthonormés usuels, le sens positif est celui par lequel on va de $\vec{i}$ sur $\vec{j}$, de $\vec{j}$ sur $\vec{k}$, de $\vec{k}$ sur $\vec{i}$, etc...

• Les plans correspondants sont donc orientés, les angles situés dans ces plans peuvent être orientés, c'est-à-dire mesurés comme vu au chapitre 21.

?



• Si un axe dirigé par $\vec{u}$ est donné, tout plan orthogonal à $\vec{u}$ possède l'orientation induite par celle de l'espace : celle qui, en mettant $\vec{u}$ en 3ème position, serait la même que pour $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

◆ Mesures d'angles dans l'espace : sauf les cas qui découlent des rappels précédents, des angles tels que $\widehat{\vec{u},\vec{v}}$ et $\widehat{D_1,D_2}$ ne sont pas orientables ni discernables l'un de l'autre : on les mesure "élémentairement" par une valeur prise dans $[0,\pi[$ en général.

• La mesure élémentaire de $\widehat{\vec{u},\vec{v}}$ est fournie par $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ tiré de la comparaison des deux formules (euclidiennes, base orthonormée) $\vec{u}\cdot\vec{v} = XX' + YY' + ZZ'$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ où $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$, de même pour $\|\vec{v}\|$.

◆ **Produit vectoriel** de 2 vecteurs (base orthonormée et orientée).

• Le produit vectoriel est un produit interne (au contraire du produit scalaire) défini (à partir de $\vec{u}$ et $\vec{v}$) de l'une ou l'autre des manières suivantes :

X Y Z X — x' y' z' x'

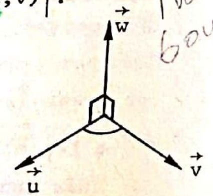
1. $\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} YZ' - ZY' \\ ZX' - XZ' \\ XY' - YX' \end{pmatrix}$ (produits en croix)

2. $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{w}$ tel que :

direction

- le support de $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.
- le sens de $\vec{w}$ vérifie : $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ de même sens que $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
- la norme de $\vec{w}$ vérifie $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,|\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})|$.

tire-bouchon



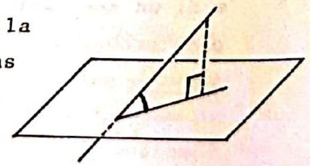
• Le produit vectoriel est anti-commutatif, $\vec{u}\wedge\vec{v} = -\vec{v}\wedge\vec{u}$.

• Le produit vectoriel n'est pas associatif.

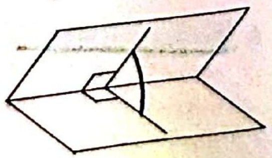
• Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls : $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}/\!/\vec{v}$.

• Dans la base orthonormée $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: $\vec{i}\wedge\vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j}\wedge\vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k}\wedge\vec{i} = \vec{j}$.

◆ **Angle d'une droite et d'un plan** : angle de la droite et de sa projection orthogonale dans ce plan, (nécessairement mesuré de 0 à $\frac{\pi}{2}$).



◆ **Angle de 2 plans** : angle de 2 droites, chacune dans un des plans et orthogonale à la droite d'intersection des plans.

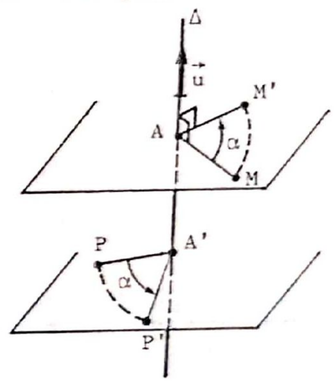


2° - TRANSFORMATIONS DE L'ESPACE.

◆ ***Translation, homothétie*** : comme dans le cas du plan.

◆ ***Rotation autour d'un axe Δ*** : si $\vec{u}$ est vecteur directeur de Δ, dans tout plan perpendiculaire à Δ on a l'orientation induite (rappelée au 1°), d'où :

la rotation d'axe Δ, d'angle α est l'application (affine) notée $R_{(\Delta,\alpha)}$ définie par : $R_{(\Delta,\alpha)}(M) = M'$ tel que, dans le plan passant par M orthogonal à Δ, l'on ait $M' = R_{(A,\alpha)}(M)$, (A intersection de l'axe et du plan).



• De même pour P : $R_{(\Delta,\alpha)}(P) = P'$ tel que $P' = R_{(A',\alpha)}(P)$, etc.

◆ ***Projections*** : on distingue 2 cas, projection sur une droite parallèlement à un plan, et projection sur un plan parallèlement à une droite.

• Projection orthogonale (sur une droite, ou sur un plan) : définie de manière similaire à la projection orthogonale plane (chapitre 21).

◆ ***Symétries*** : on distingue 3 cas, symétrie par rapport à un point, symétrie par rapport à une droite parallèlement à un plan, symétrie par rapport à un plan parallèlement à une droite.

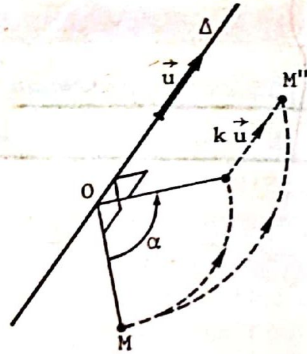
• Symétrie orthogonale par rapport à une droite : identique à une rotation d'angle π autour de l'un ou l'autre des axes portés par la droite.

• Réflexion plane ou symétrie orthogonale par rapport à un plan : analogue à la transformation d'un objet par un miroir plan.

◊ Involution, isométrie, déplacement et anti-déplacement sont définis comme dans le cas du plan (chapitre 21).

3° - COMPLEMENTS.

◆ **Composée rotation-translation :**



• On appelle vissage la composée (commutative) d'une rotation d'axe dirigé par $\vec{u}$ et d'une translation de vecteur $k\vec{u}$, ($k \neq 0$, k fixé).

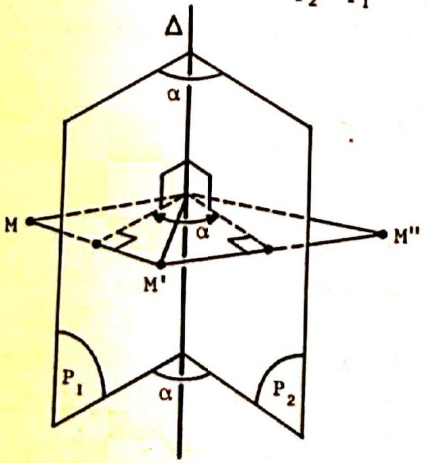
• M est transformé en M'' comme si l'on vissait (ou dévissait) un écrou.

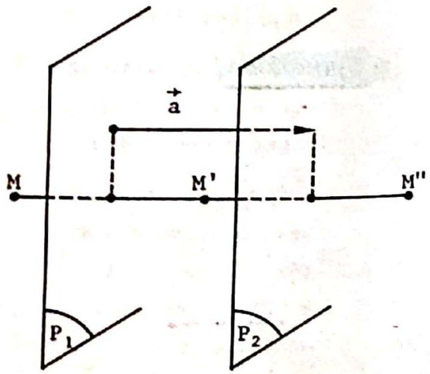
◆ **Composée de 2 réflexions de plans P_1 et P_2.**

• Si P_1 et P_2 sont sécants selon Δ, et si leur angle a une mesure α, la composée est une rotation d'axe porté par Δ, d'angle 2α ou $-2\alpha \pmod{2\pi}$ suivant les cas.

• Si $P_1 // P_2$, la composée est une translation de vecteur orthogonal à P_1 et P_2, double du vecteur qui fait passer d'un plan à l'autre par translation. Sur le second schéma, on aurait :

$$S_{P_2} \circ S_{P_1} = T_{2\vec{a}}, \quad S_{P_1} \circ S_{P_2} = T_{-2\vec{a}}.$$





CHAPITRE 23

APPLICATIONS LINEAIRES OU AFFINES DU PLAN

1° - RAPPELS DE GEOMETRIE EUCLIDIENNE.

☐ Le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$ est muni d'une base orthonormée $(\vec{i},\vec{j})$, le plan affine $\mathbb{R}^2$ est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, le produit scalaire est euclidien (d'où norme et distance euclidiennes).

◆ ***Droite vectorielle*** (de vecteur directeur $\vec{u}$ non nul) :
ensemble des vecteurs $\vec{v}$ tels que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$).

• Si $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$, en posant $\vec{v} = X\vec{i} + Y\vec{j}$, on obtient :

$\begin{cases} X = \lambda a \\ Y = \lambda b \end{cases}$ (équations paramétriques),

ou $aY - bX = 0$ (équation cartésienne).

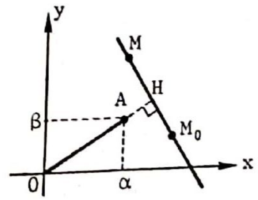
◆ ***Droite affine*** (passant par M_0 et dirigée par $\vec{u}$ non nul) :
ensemble des points M tels que $M = M_0 + \lambda\vec{u}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), ou $\overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{u}$.

• Si $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$, avec $M_0(x_0,y_0)$ donné on a $M(x,y)$ par :

$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \end{cases}$ (paramétriques),

ou $ay - bx = ay_0 - bx_0$ (cartésienne).

• Réciproquement, si l'on a $\alpha x + \beta y = \gamma$, avec $\begin{pmatrix}-\beta \\ \alpha\end{pmatrix}$ non nul, ce vecteur est directeur de la droite ; on préfère souvent interpréter l'équation par :



$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}$ est orthogonal à la droite.

$\overrightarrow{OH} = \dfrac{\gamma}{\alpha^2+\beta^2}\overrightarrow{OA}$ définit la projection orthogonale H de O sur la droite.

◊ *Orthogonalité, parallélisme.*

Pour 2 droites D et D' d'équations $\alpha x + \beta y = \gamma$ et $\alpha' x + \beta' y = \gamma'$,

- D//D' $\Leftrightarrow \alpha\beta' - \beta\alpha' = 0$
- D $\perp$ D' $\Leftrightarrow \alpha\alpha' + \beta\beta' = 0$

(on écrit les propriétés pour les vecteurs directeurs).

2° - APPLICATIONS LINEAIRES. MATRICES.

☐ Le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$ est muni de la base $(\vec{i},\vec{j})$, quelconque ou orthonormée. Une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ est appelée endomorphisme ; si de plus elle est bijective, on dit : automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

♦ *Matrice dans la base* $(\vec{i},\vec{j})$ d'un endomorphisme $\vec{f}$:

- Si $\vec{f}$ est défini par : $\vec{v} = X\vec{i} + Y\vec{j} \longrightarrow \vec{f}(\vec{v}) = \vec{v}' = X'\vec{i} + Y'\vec{j}$,

avec $\begin{cases} X' = aX + bY \\ Y' = cX + dY \end{cases}$, la matrice de $\vec{f}$, notée Mat $\vec{f}$,

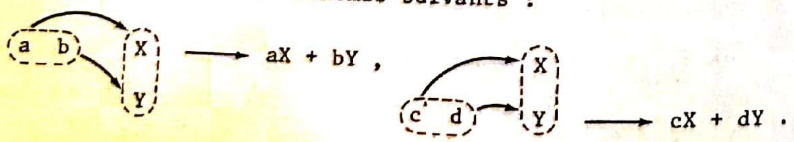
est le tableau des composantes de $\vec{f}(\vec{i})$ et $\vec{f}(\vec{j})$ mises en colonnes selon le schéma :

$$\text{Mat } \vec{f} = \begin{array}{c|cc} & \vec{f}(\vec{i}) & \vec{f}(\vec{j}) \\ \hline \vec{i} & a & b \\ \vec{j} & c & d \end{array}$$

- L'utilisation du produit "lignes par colonnes" traduit l'endomorphisme par :

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aX + bY \\ cX + dY \end{pmatrix}$$

- La règle découle des schémas suivants :



◊ *Opérations sur les matrices* (dans une même base).

- Egalité : par les égalités terme à terme.
- Somme : par les sommes terme à terme.
- Produit par λ réel : par le produit de chaque terme par λ.
- Produit : par les produits "lignes par colonnes".

Exemples : si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 2\lambda & \lambda \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

◊ Correspondances endomorphismes - matrices.

Si, dans une même base, Mat $\vec{f}$ = F et Mat $\vec{g}$ = G, on a :

$$\vec{f} = \vec{g} \Leftrightarrow F = G \quad , \quad \text{Mat}(\vec{f} + \vec{g}) = F + G$$

$$\text{Mat}(\vec{f} \circ \vec{g}) = F \times G \quad , \quad \text{Mat}(\lambda\vec{f}) = \lambda F$$

☆ *Matrices usuelles.*

- Endomorphisme nul $(\vec{v} \longrightarrow \vec{0})$, matrice nulle $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- Identité $(\vec{v} \longrightarrow \vec{v})$, matrice unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Homothétie de rapport λ $(\vec{v} \longrightarrow \lambda\vec{v})$, matrice $\lambda I = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$
- Projection sur $\vec{i}$ parallèlement à $\vec{j}$, matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- Projection sur $\vec{j}$ parallèlement à $\vec{i}$, matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Symétrie centrale $(\vec{v} \longrightarrow -\vec{v})$, matrice $-I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- Symétrie d'axe $\vec{i}$ parallèlement à $\vec{j}$, matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- Symétrie d'axe $\vec{j}$ parallèlement à $\vec{i}$, matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Rotation d'angle α (mod 2π) en base orthonormée :

matrice $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Scanné avec CamScanner

◊ ***Déterminant de la matrice*** $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: nombre, noté dét A ou encore $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, défini par dét A = ad − bc (produit en croix).

- Dans les produits : $\text{dét}(\lambda A) = \lambda^2 \text{dét} A$, $\text{dét}(AB) = (\text{dét} A)(\text{dét} B)$.

◊ ***Inverse d'une matrice*** : si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, la matrice inverse, notée A^{-1}, existe si et seulement si dét $A \neq 0$, alors :

$A^{-1} = \dfrac{1}{\text{dét} A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, et si $A = \text{Mat}\,\vec{f}$, alors $\text{Mat}(\vec{f}^{-1}) = A^{-1}$.

♦ ***Noyau, image*** (d'un endomorphisme $\vec{f}$)

- Noyau de $\vec{f}$: ensemble des vecteurs $\vec{v}$ tels que $\vec{f}(\vec{v}) = \vec{0}$, noté Ker $\vec{f}$. $\text{Ker}\,\vec{f} = \{\vec{v} / \vec{f}(\vec{v}) = \vec{0}\}$.
- Image de $\vec{f}$: ensemble des transformés de tous les vecteurs $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$, noté Im $\vec{f}$. $\text{Im}\,\vec{f} = \{\vec{w} / \vec{w} = \vec{f}(\vec{v}),\ \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^2\}$.

3° - APPLICATIONS AFFINES ET LINEAIRES ASSOCIEES.

☐ Le plan affine $\mathbb{R}^2$ est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ quelconque ou orthonormé, son espace vectoriel directeur est le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de la base $(\vec{i}, \vec{j})$. Une application affine f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ est définie par la donnée d'un point et de son transformé par f, et par la donnée de la partie linéaire de f, soit $\vec{f}$ (endomorphisme ou automorphisme).

★ L'étude des applications affines de $\mathbb{R}^2$ est rappelée au chapitre 25, à l'aide des nombres complexes.

On peut aussi utiliser les rappels suivants.

♦ Formules de définition.

- Soit f (affine), transformant M(x,y) en M'(x',y'), on a :

$\begin{cases} x' = ax + by + \alpha \\ y' = cx + dy + \beta \end{cases}$, α et β sont les coordonnées de f(O).

- La partie linéaire $\vec{f}$ a pour matrice $F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, (visible sur les formules).
- Si $\vec{f}$ est par exemple une homothétie (vectorielle), f est dite homothétie affine ; de même pour les autres noms des transformations.
- Invariants : un point invariant est défini par f(M) = M, d'où : x' = x et y' = y. Suivant les cas, il n'y a aucun point invariant, ou bien un, ou bien une infinité, cela peut renseigner sur la nature de f(ou de $\vec{f}$).

◊ Propriétés diverses, où f, g sont affines et leurs parties linéaires $\vec{f}$, $\vec{g}$ ont pour matrices F, G :

- f injective ⟺ $\vec{f}$ injective ⟺ Ker $\vec{f} = \{\vec{0}\}$ ⟺ dét F ≠ 0.
- Dans le cas actuel $(\mathbb{R}^2)$:
  f injective ⟺ f surjective ⟺ f bijective, d'où des équivalences avec chacun des résultats précédents.
- La composée gof est affine, sa partie linéaire est $\vec{g}o\vec{f}$ et cette dernière a pour matrice la matrice produit GF.
- Si f est bijective, sa réciproque f^{-1} a pour partie linéaire $\vec{f}^{-1}$ et cette dernière a pour matrice la matrice F^{-1} (inverse de F).
- Si dét F ≠ 0 (f et $\vec{f}$ sont des bijections) on a Ker $\vec{f} = \{\vec{0}\}$ et de plus : Im$\vec{f} = \mathbb{R}^2$ ou aussi Imf = $\mathbb{R}^2$.

4° - APPLICATIONS LINEAIRES ET STRUCTURES.

♦ L'ensemble des endomorphismes de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$, noté $\mathscr{L}(E)$ ou $\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$, est muni des opérations suivantes : somme d'applications, produit par λ réel, composition o.

- $(\mathscr{L}(E),+)$ est un groupe abélien ; avec le produit par λ réel, on a un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, appelé l'espace $\mathscr{L}(E)$.
- $(\mathscr{L}(E),+,o)$ est un anneau unitaire (unité Id), non commutatif, appelé l'anneau $\mathscr{L}(E)$.

◊ **Sous-ensembles de $\mathscr{L}(E)$.**

- Les automorphismes (endomorphismes bijectifs) de $E = \mathbb{R}^2$, constituent un sous-ensemble, noté GL(E) ou GL($\mathbb{R}^2$), de $\mathscr{L}(E)$.
- (GL(E),o) est un groupe, alors que ($\mathscr{L}(E)$,o) ne l'est pas, ce groupe est appelé groupe linéaire de E, ou groupe GL(E).
- A son tour, GL(E) possède un sous-groupe (pour o), appelé groupe orthogonal de E et noté O(E).

♦ **Eléments de $\mathscr{L}(E)$, GL(E), O(E).**

● $\mathscr{L}(E)$ a pour éléments tous les endomorphismes (applications linéaires) de E dans E : endomorphisme nul, identité, homothéties, projections, symétries et symétrie centrale, rotations, et leurs composés (notamment similitudes, antirotations).

● GL(E) a pour éléments tous les automorphismes de E sur E (endomorphismes bijectifs, ou inversibles) : homothéties de rapport non-nul, involutions (telles que $\vec{f} = \vec{f}^{-1}$ ou $\vec{f} \circ \vec{f} = Id$).

Toute involution est une symétrie (centrale, ou par rapport à D_1 parallèlement à D_2, ou orthogonale), ou une composée de symétries.

● O(E) a pour éléments toutes les isométries vectorielles de E (endomorphismes qui conservent le produit scalaire ou la norme), appelées aussi automorphismes orthogonaux : par définition,

$$\vec{f} \in O(E) \Leftrightarrow \vec{f}(\vec{u}) \cdot \vec{f}(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v} \quad (\forall \vec{u}, \forall \vec{v})$$
$$\text{ou } \|\vec{f}(\vec{u})\| = \|\vec{u}\| \quad (\forall \vec{u}).$$

- Si $\vec{f} \in O(E)$, $\vec{f}^{-1}$ aussi, donc $\vec{f}^{-1}$ a les mêmes propriétés.
- Tous les éléments de O(E), ou isométries, sont les rotations, les réflexions (symétries orthogonales), la symétrie centrale, et leurs composées ; certaines sont des involutions.
- Matrices des isométries (base orthonormée) :

$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$: rotation d'angle α (mod 2π) ou cas particulier.

$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$: antirotation (composée de rotation et réflexion)

- L'ensemble des rotations est un sous-groupe de O(E), l'ensemble des antirotations n'est pas un sous-groupe de O(E).

5° - APPLICATIONS AFFINES.

□ Si f est une application affine de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ (espaces affines), elle possède une partie linéaire $\vec{f}$ dont les propriétés se répercutent souvent à f (de même que le nom : par exemple $\vec{f}$ projection vectorielle, d'où f projection affine, etc...).

◊ L'ensemble des applications affines de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ n'a pas de nom particulier, il comprend les éléments de types suivants :

- application constante : $\forall M$, $M \longrightarrow A$ (A fixé).
- identité : $M \longrightarrow M$ ($\forall M$).
- translation : $M \longrightarrow M'$ ($M' = M + \vec{a}$, $\vec{a}$ fixé).
- homothétie : $M \longrightarrow M'$ ($\overrightarrow{AM'} = \lambda \overrightarrow{AM}$, A fixé, λ réel fixé).
- projections quelconques ou orthogonales.
- symétries quelconques, orthogonales, ou par rapport à un point.
- rotations quelconques (d'angle donné, de centre donné).
- Composées des précédentes (notamment : similitudes affines).

♦ **Involutions affines** : telles que $f \circ f = Id$ ou $f = f^{-1}$.

- Nécessairement, une involution est bijective.
- Toute involution (affine) est une symétrie.
- f involution (affine) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{f admet au moins un point invariant} \\ \text{et } \vec{f} \text{ est une symétrie (vectorielle).} \end{cases}$

♦ **Isométries affines** : conservent la distance (euclidienne).

- Si l'on pose $f(M) = M'$ et $f(P) = P'$,
  f isométrie (affine) $\Leftrightarrow d(M',P') = d(M,P)$, ($\forall M, \forall P$).
- f isométrie (affine) $\Leftrightarrow \vec{f}$ (partie linéaire) est isométrie (vectorielle).

★ Parmi les isométries affines :

Déplacements : tels que la partie linéaire soit une rotation vectorielle).

Antidéplacements : toutes isométries non-déplacements.

● Certaines isométries sont aussi des involutions : les symétries.

● Les déplacements sont : rotations, translations, et composées.

● Les antidéplacements sont : réflexions, composés d'une réflexion et d'une translation parallèle à l'axe de réflexion.

CHAPITRE 24

APPLICATIONS LINEAIRES OU AFFINES DE L'ESPACE

1° - RAPPELS DE GEOMETRIE EUCLIDIENNE.

☐ L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni d'une base orthonormée $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, l'espace affine $\mathbb{R}^3$ est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, le produit scalaire est euclidien (d'où norme et distance euclidiennes).

♦ ***Plan vectoriel*** (de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ non nuls, non colinéaires) : ensemble des vecteurs $\vec{v}$ tels que $\vec{v} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}'$ $(\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R})$.

● Si $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ et $\vec{u}' = a'\vec{i} + b'\vec{j} + c'\vec{k}$, en posant

$\vec{v} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$, on obtient : $\begin{cases} X = \lambda a + \mu a' \\ Y = \lambda b + \mu b' \\ Z = \lambda c + \mu c' \end{cases}$ (équations paramétriques)

● On a une équation cartésienne (en éliminant λ et μ) de type $\alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0$.

♦ ***Plan Affine*** (passant par M_0, dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ précédents) : ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $M = M_0 + \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}'$, ou $\overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}'$.

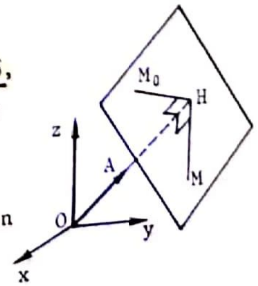
● Avec les notations précédentes, et $M_0(x_0,y_0,z_0)$, on obtient

$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \mu a' \\ y = y_0 + \lambda b + \mu b' \\ z = z_0 + \lambda c + \mu c' \end{cases}$, ou une équation de type $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$, (en éliminant λ et μ)

● Réciproquement, si l'on a $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$, on peut interpréter cette équation par :

$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ est orthogonal au plan,

$\overrightarrow{OH} = \dfrac{\delta}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}\,\overrightarrow{OA}$ définit la projection orthogonale H de O sur le plan.



◇ Plans parallèles, plans orthogonaux : si et seulement si les "vecteurs $\vec{OA}$" correspondants sont respectivement parallèles, orthogonaux.

◆ ***Droite vectorielle*** (de vecteur directeur $\vec{u}$ non nul) : ensemble des vecteurs $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$; si $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ et $\vec{v} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$,

on a les équations paramétriques $\begin{cases} X = \lambda a \\ Y = \lambda b \\ Z = \lambda c \end{cases}$

ou 2 équations de plans (éliminer λ), par exemple $\begin{cases} bX - aY = 0 \\ cY - bZ = 0 \end{cases}$

◆ ***Droite affine*** (passant par M_0 et dirigée par $\vec{u}$ non nul) :

ensemble des points M tels que $M = M_0 + \lambda\vec{u}$, d'où $\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}$

ou 2 équations de plans en éliminant λ : $\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = \delta' \end{cases}$

- Réciproquement, l'intersection de 2 plans (affines) est une droite dont on a des points particuliers, soit dans (xOy) en posant z = 0, soit dans (yOz) en posant x = 0, etc..., et dont on a un vecteur directeur $\vec{u}$ en exprimant que $\vec{u}$ est orthogonal à la fois à $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$, ou colinéaire au produit vectoriel $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$.

◇ Droites parallèles, droites orthogonales : si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont respectivement parallèles, orthogonaux.

◇ Droite orthogonale à un plan : on exprime qu'un vecteur directeur de la droite est parallèle au vecteur $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ tiré de l'équation du plan $(\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta)$.

◇ Droite parallèle à un plan : on exprime qu'un vecteur directeur de la droite est orthogonal au vecteur $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ tiré de l'équation du plan.

◇ Angle d'une droite et d'un plan : angle de la droite et de sa projection orthogonale dans le plan ; on exprime le cosinus en calculant de 2 manières un produit scalaire convenable, par $XX' + YY' + ZZ'$ et par $\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos(\vec{u},\vec{v})$.

◇ Angle de 2 plans : angle de 2 droites, respectivement prises dans chaque plan, chacune orthogonale à la direction commune aux deux plans ; on exprime le cosinus en calculant des 2 manières un produit scalaire convenable.

2° - APPLICATIONS LINEAIRES. MATRICES.

On généralise les notions similaires (dans $\mathbb{R}^2$) au cas actuel (dans $\mathbb{R}^3$) pratiquement "mot à mot", compte tenu des rappels suivants.

◆ Matrice dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ d'un endomorphisme $\vec{f}$:

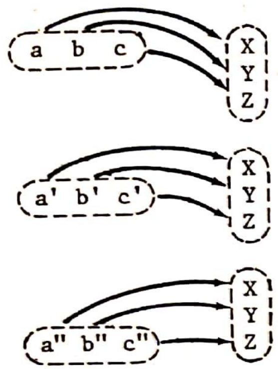
- Si $\vec{f}$ est défini par : $\vec{v} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} \longrightarrow \vec{f}(\vec{v}) = \vec{v}' = X'\vec{i} + Y'\vec{j} + Z'\vec{k}$

avec $\begin{cases} X' = aX + bY + cZ \\ Y' = a'X + b'Y + c'Z, \\ Z' = a''X + b''Y + c''Z \end{cases}$ la matrice de $\vec{f}$, notée Mat $\vec{f}$, est la tableau des composantes de $\vec{f}(\vec{i})$, $\vec{f}(\vec{j})$, $\vec{f}(\vec{k})$ mises en colonnes selon le schéma :

$$\text{Mat } \vec{f} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \vec{f}(\vec{i}) & \vec{f}(\vec{j}) & \vec{f}(\vec{k}) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \vec{i} \rightarrow \\ \vec{j} \rightarrow \\ \vec{k} \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \end{array}$$

- L'utilisation du produit "lignes par colonnes" traduit l'endomorphisme par $\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$, d'où $\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aX + bY + cZ \\ a'X + b'Y + c'Z \\ a''X + b''Y + c''Z \end{pmatrix}$

la règle découlant des schémas :



$\rightarrow aX + bY + cZ.$

$\rightarrow a'X + b'Y + c'Z.$

$\rightarrow a''X + b''Y + c''Z.$

• Opérations sur les matrices : égalité, par égalités terme à terme ; somme, par somme terme à terme ; produit par λ réel, par produit de chaque terme par λ ; produits, par produits "lignes par colonnes".

Exemples : si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,

$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, $\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -\lambda \\ 3\lambda & \lambda & 2\lambda \\ -2\lambda & \lambda & 3\lambda \end{pmatrix}$,

$AB = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 0 & 13 & 11 \\ 1 & -7 & 4 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 14 \\ 3 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & 8 \end{pmatrix}$.

• Les correspondances endomorphismes – matrices sont les mêmes que dans le cas de $\mathbb{R}^2$, les matrices usuelles $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, λI pour l'homothétie de rapport λ, $-I$ pour la symétrie centrale, ...

◊ Déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$: nombre noté dét A, et calculé par l'une des règles suivantes :

• développement par rapport à la 1ère colonne :

$\text{dét} A = a\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} - a'\begin{vmatrix} b & c \\ b'' & c'' \end{vmatrix} + a''\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}$, où $\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix}$ est le mineur de a (obtenu en supprimant dans A la ligne et la colonne de a, de même pour le mineur $\begin{vmatrix} b & c \\ b'' & c'' \end{vmatrix}$ de a', etc..., et où l'on alterne les signes devant a(+), a'(−), a''(+).

• Développement par rapport à la 2ème colonne :
$\text{dét} A = -b\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} + b'\begin{vmatrix} a & c \\ a'' & c'' \end{vmatrix} - b''\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$, où $\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix}$ est le mineur de b (obtenu en supprimamt ligne et colonne de b), etc..., et où les signes devant b(−), b'(+), b''(−) alternent.

• Le signe par lequel on doit commencer s'obtient par la règle suivante : le 1er terme de A est affecté de +, ensuite, on alterne les signes à chaque passage d'un terme à l'autre, selon le schéma $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$, cette règle d'alternance aboutit toujours au même signe pour un élément donné, quel que soit le chemin suivi pour y arriver, (on n'a pas le droit d'aller en "diagonale")

☆ Exemple : si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, on peut choisir la 1ère ligne à cause d'un terme nul, on a :

$\text{dét} A = (+)1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} (-)0\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} (+)(-1)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 - 5 = -4.$

A partir de la 2ème colonne, on a de même :

$\text{dét} A = (-)0\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} (+)1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} (-)1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 1 - 5 = -4.$

• Dans les produits, $\text{dét}(\lambda A) = \lambda^3 \,\text{dét} A$, $\text{dét}(AB) = (\text{dét} A)(\text{dét} B)$.

◊ Inverse d'une matrice : si $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$, la matrice inverse, notée A^{-1}, existe si et seulement si dét $A \neq 0$, et un moyen rapide de la déterminer est de résoudre le système $\begin{cases} aX + bY + cZ = X' \\ a'X + b'Y + c'Z = Y' \\ a''X + b''Y + c''Z = Z' \end{cases}$ par rapport à X, Y, Z : les termes de A^{-1} sont alors mis en évidence.

• Si $A = \text{Mat}\,\vec{f}$, alors $\text{Mat}(\vec{f}^{-1}) = A^{-1}$.

3° - APPLICATIONS AFFINES ET LINEAIRES ASSOCIEES.

Les rappels faits au chapitre 23, 3°, s'adaptent pratiquement mot à mot au cas actuel, en tenant compte seulement de la dimension 3 au lieu de la dimension 2.

- Dans le cas des points invariants, il peut arriver qu'on ait une infinité de points d'un même plan, ou bien d'une même droite ; quoi qu'il en soit, cela peut renseigner sur la nature de l'application.

4° - APPLICATIONS LINEAIRES ET STRUCTURES.

Les rappels faits au chapitre 23, 4°, s'adaptent pratiquement mot à mot, en remplaçant $E = \mathbb{R}^2$ par $E = \mathbb{R}^3$, etc...

- Les éléments de $\mathscr{L}(E)$, $GL(E)$, $O(E)$ sont, pour $E = \mathbb{R}^3$, analogues à ceux du cas $E = \mathbb{R}^2$; maintenant les projections sont sur un plan parallèlement à une droite, ou sur une droite parallèlement à un plan, de même pour les symétries et les réflexions.
- Les matrices de rotations et d'antirotations sont modifiées par rapport au cas de $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ représente une rotation lorsque les "vecteurs-colonnes" $\begin{pmatrix} a \\ a' \\ a'' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ b' \\ b'' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ c' \\ c'' \end{pmatrix}$ vérifient certaines relations et le déterminant de la matrice est $+1$; de même pour une antirotation et déterminant égal à -1.

5° - APPLICATIONS AFFINES.

☐ Les rappels faits au chapitre 23, 5°, s'adaptent pratiquement mot à mot, compte tenu du changement de dimension, et de ce que les symétries et projections sont par rapport à des plans parallèlement à des droites (ou inversement).

CHAPITRE 25

LES COMPLEXES EN GEOMETRIE PLANE

1°- PASSAGE DES COMPLEXES AUX POINTS ET AUX VECTEURS

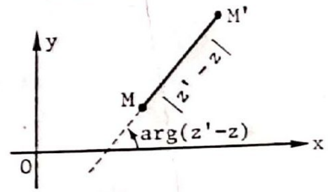
☐ Au chapitre 7, la bijection (en axes orthonormés) qui associe $z = a + ib$ et $M(a,b)$ est précisée.

☐ Le passage d'espace vectoriel (directeur) à espace affine établit aussi une bijection entre $M(a,b)$ et $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$; on peut alors, à l'aide de la relation de Chasles ($\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}$), associer à M et M', d'affixes z et z', le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ d'affixe $z' - z$.

★ Remarques, pour $\overrightarrow{MM'}$:

$\|\overrightarrow{MM'}\|$ ou $d(M,M') = |z' - z|$

$\widehat{\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{MM'}} = \arg(z' - z), \bmod 2\pi$.



2° - APPLICATIONS AFFINES PLANES.

☐ Les bijections rappelées ci-dessus permettent d'établir une correspondance bijective entre les transformations planes usuelles et certaines fonctions complexes.

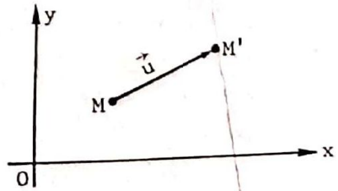
☆ Exemple 1 : translation de vecteur $\vec{u}$ donné.

- Si $\vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, il lui correspond $b = \alpha + i\beta$, et

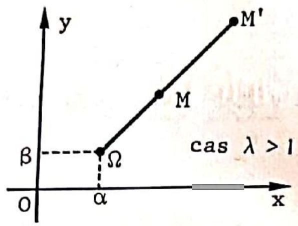
$T_{\vec{u}} : M \longrightarrow M' = M + \vec{u}$

se traduit par :

$f : z \longrightarrow z' = z + b$.



☆ Exemple 2 : homothétie de centre Ω, de rapport λ (réel non nul, $\lambda \neq 1$).



- Si $\Omega(\alpha,\beta)$ est donné, il lui correspond $\omega = \alpha + i\beta$ et

$$H_{(\Omega,\lambda)} : M \longrightarrow M' = \Omega + \lambda \overrightarrow{\Omega M}$$

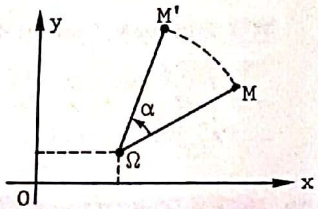
se traduit par :

$$f : z \longrightarrow z' = \omega + \lambda(z-\omega), \text{ d'où } z' = \lambda z + (1-\lambda)\omega.$$

- Généralement, si $z' = \lambda z + b$ (λ réel, $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$), il s'agit d'une homothétie de rapport λ, de centre Ω tel que $\omega = \frac{b}{1-\lambda}$.

- En particulier, la symétrie de centre Ω est $H_{(\Omega,-1)}$, d'où $z' = -z + b$ (l'affixe de Ω est $\omega = \frac{b}{2}$).

☆ Exemple 3 : rotation de centre Ω et d'angle α.



- Si α (mod 2π) est donné, soit : $a = [1,\alpha] = \cos\alpha + i\sin\alpha$.
- On sait : $[1,\alpha]\times[r,\theta] = [r,\theta+\alpha]$.
- La rotation $R_{(0,\alpha)}$:

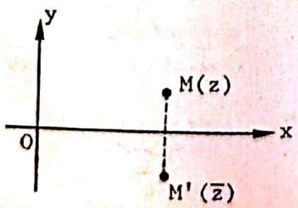
$$M \longrightarrow M' \begin{pmatrix} \|\overrightarrow{OM'}\| = \|\overrightarrow{OM}\| \\ \widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}} = \alpha \end{pmatrix}$$

se traduit par $f : z \longrightarrow z' = az$.

- La rotation $R_{(\Omega,\alpha)} : M \longrightarrow M' \begin{pmatrix} \|\overrightarrow{\Omega M'}\| = \|\overrightarrow{\Omega M}\| \\ \widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}} = \alpha \end{pmatrix}$ se traduit à l'aide de $z' - \omega = a(z-\omega)$ d'où :

$$f : z \longrightarrow z' = az + (1-a)\omega, \text{ où } |a| = 1, \arg a = \alpha.$$

☆ Exemple 4 : réflexion (ou symétrie orthogonale) d'axe Ox.



- On a déjà rappelé la conjugaison (chapitre 7), la réflexion d'axe Ox se traduit par $z \longrightarrow z' = \bar{z}$.
- De même,
  réflexion d'axe Oy : $z \longrightarrow -\bar{z}$
  symétrie de centre O : $z \longrightarrow -z$

3°- CAS GENERAL $f : z \longrightarrow z' = az + b$

☐ a et b sont donnés, complexes (éventuellement réels).
Toute fonction de type $z \longrightarrow az + b$ est dite fonction affine. Des exemples précédents, on peut tirer les résultats suivants.

- Si l'on a $z' = z + b$, il s'agit de la translation de vecteur $\vec{u}$ ($\vec{u}$ image de b).

- Si l'on a $z' = \lambda z + b$, λ réel ($\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$), il s'agit de l'homothétie de rapport λ, de centre Ω(point invariant) image de $\omega = \frac{b}{1-\lambda}$ (d'après $\omega = \lambda\omega + b$).
  Si $\lambda = -1$: symétrie de centre Ω.

- Si l'on a $z' = az + b$, $|a| = 1$ mais $a \neq 1$, il s'agit de la rotation d'angle $\alpha = \arg a$, de centre Ω invariant donc image de $\omega = \frac{b}{1-a}$.

- Si l'on a $z' = az + b$ hors d'un cas précédent, il s'agit d'une similitude de rapport $|a|$, d'angle $\arg a$, de centre Ω invariant (donc image de $\omega = \frac{b}{1-a}$).
  La similitude est directe (rapport $|a|$ positif).

☐ Conclusion : l'ensemble des fonctions affines de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, représente l'ensemble des translations, homothéties (symétries à centres), rotations et similitudes directes.

- La composition o donne une structure de groupe, autant à l'ensemble des fonctions affines qu'à l'ensemble de transformations géométriques associées.
- Certains sous-ensembles sont des sous-groupes.

4°- ETUDE GENERALE DE $f : z \longrightarrow z' = a\bar{z} + b$

☐ a et b sont donnés, complexes (éventuellement réels).
Une fonction de type $f : z \longrightarrow a\,\bar{z} + b$, n'a pas de nom particulier.
De tout ce qui précède, on peut tirer le plan d'étude suivant.

● <u>Points invariants</u> : définis par l'affixe z tel que $z = a\bar{z} + b$.

● Posant $z = x + iy$ (et $\bar{z} = x - iy$), l'équation précédente fournit un système de 2 équations à 2 inconnues x et y.

● Suivant les cas, pas de point invariant, un seul point invariant, ou une infinité mais répartis sur une droite invariante, alors il s'agit d'une symétrie par rapport à cette droite.

● <u>Décomposition de f</u> : on peut <u>toujours</u> décomposer f selon le schéma : $z \xrightarrow{f_2} \bar{z} \xrightarrow{f_1} a\bar{z} + b$, d'où $f = f_1 o f_2$, avec $f_1 : z \longrightarrow az + b$, étudiée au 3° et $f_2 : z \longrightarrow \bar{z}$, réflexion d'axe Ox.

● On conclut aisément ; cependant les invariants de f ne sont pas nécessairement les mêmes que ceux de f_1 (s'il y en a).

☆ Exemple : $f : z \longrightarrow z' = (1+i)\bar{z} + 2 - 3i$.

● Invariants de f : $x + iy = (1+i)(x-iy) + 2 - 3i$ donne $x = -1$, $y = -2$ (ou $z = -1 -2i$).

● Décomposition : $f_2(z \longrightarrow \bar{z})$ et $f_1(z \longrightarrow (1+i)z + 2 - 3i)$, donne pour f_1 : similitude de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $\frac{\pi}{4}$, de centre (invariant de f) défini par $\omega = 3 + 2i$.

● f est donc la composée $f_1 o f_2$ correspondante.

★ Remarques

● On peut décomposer $f(z \longrightarrow a\bar{z} + b)$ de 3 autres manières :

1. $z \xrightarrow{f_2} (\bar{a})z + (\bar{b}) \xrightarrow{f_1} a\bar{z} + b$,

   f_2 est de type étudié au 3°, f_1 est la conjugaison (réflexion d'axe Ox).

2. $z \xrightarrow{f_2} -\bar{z} \xrightarrow{f_1} (-a)(-\bar{z}) + b$,

   f_2 représente la réflexion d'axe Oy, f_1 est de type étudié au 3°.

3. $z \xrightarrow{f_2} (-\bar{a})z + (-\bar{b}) \xrightarrow{f_1} a\bar{z} + b$,

   f_2 est de type étudié au 3°, f_1 représente la réflexion d'axe Oy.

☐ Conclusion : l'ensemble des fonctions (non affines) de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de type $z \longrightarrow a\bar{z} + b$ représente l'ensemble des transformations indirectes du plan.

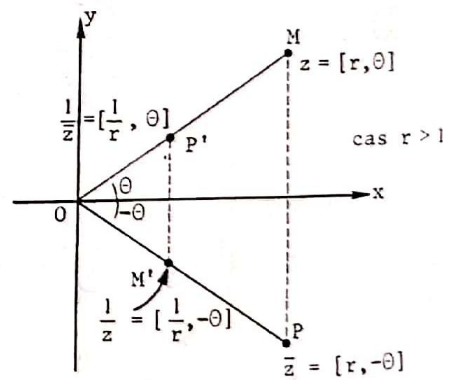
● La composition o ne donne pas de structure, car cette loi n'est pas interne ($f_1 : z \longrightarrow \bar{z}$ et $f_2 : z \longrightarrow -\bar{z}$ donnent par exemple $f_2 o f_1 : z \longrightarrow -z$, fonction affine).

5° - AUTRE TRANSFORMATION.

☐ On peut avoir à construire l'image M' de $\frac{1}{z}$ connaissant M, image de z non nul.

● $z = [r, \theta]$ donnant $\frac{1}{z} = [\frac{1}{r}, -\theta]$, on obtient M' par l'une ou l'autre des constructions symbolisées par :

1. $z \longrightarrow \bar{z} \longrightarrow \frac{1}{z}$, ou $M \longrightarrow P \longrightarrow M'$.
2. $z \longrightarrow \frac{1}{\bar{z}} \longrightarrow \frac{1}{z}$, ou $M \longrightarrow P' \longrightarrow M'$.



CHAPITRE 26

EXEMPLES DE GROUPES, ANNEAUX, CORPS, ESPACES

1° - RAPPELS.

- Groupes usuels (tous abéliens) commutatifs

$(\mathbb{Z}, +)$ $(\mathbb{Q}, +)$ $(\mathbb{R}, +)$ $(\mathbb{C}, +)$ +

$(\mathbb{Q}^*, \times)$ $(\mathbb{R}^*, \times)$ $(\mathbb{C}^*, \times)$ ×

- Anneaux usuels (tous commutatifs et unitaires)

$(\mathbb{Z}, +, \times)$ intègre

$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ non intègre si p est non premier.

- Corps usuels (tous commutatifs)

$(\mathbb{Q}, +, \times)$ $(\mathbb{R}, +, \times)$ $(\mathbb{C}, +, \times)$ $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si p est premier

- $\mathbb{R}$-espaces vectoriels

$\mathbb{R}$ $\mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}^3$, de bases $(\vec{i})$, $(\vec{i},\vec{j})$, $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

$\mathbb{C}$ (isomorphe à $\mathbb{R}^2$), de base $(1, i)$

- Espaces affines

$\mathbb{R}$ $\mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}^3$, de repères $(0,\vec{i})$, $(0,\vec{i},\vec{j})$, $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

(ou de repères similaires avec toute autre origine A).

$\mathbb{C}$, par la bijection $z = x + iy \longrightarrow M(x,y)$ de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}^2$.

2° - CAS DES FONCTIONS OU DES APPLICATIONS.

- Fonctions f : $\left|\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow f(x) \end{array}\right.$, g, h, ... définies sur un

domaine commun.

1 • Egalité : $f = g$ lorsque $f(x) = g(x)$ pour tout x.

2 • Somme : $f + g = h$ telle que $h(x) = f(x) + g(x)$ pour tout x.

3 • Produit : $fg = h$ telle que $h(x) = f(x)g(x)$ pour tout x.

4 • Produit par λ réel : λf est définie par $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ pour tout x.

5 • Composée de f et g : $g \circ f = h$ telle que $h(x) = g[f(x)]$ pour tout x.

- L'ensemble de ces fonctions est noté $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
- $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ muni de la somme et du produit de fonctions est un anneau commutatif unitaire ; on peut créer des sous-ensembles qui sont des corps en précisant le type des fonctions du sous-ensemble.
- $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ muni de la somme et de la composition de fonctions possède des sous-ensembles qui sont de anneaux, non commutatifs en général, unitaires, (éventuellement, des corps).
- $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ muni de la somme de fonctions et du produit par λ réel est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (de dimension infinie) ; on peut créer des sous-espaces à l'aide de propriétés particulières des fonctions : $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ pour les fonctions continues, $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ pour les fonctions à dérivée première continue, etc...

- Fonctions vectorielles de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$: $t \longrightarrow \vec{f}(t)$.
  - La somme de fonctions et le produit par λ réel conduisent à des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels (de dimension infinie) notés $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ ou $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$.

- Applications linéaires d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F.
  - On est conduit à l'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ et à diverses structures rappelées au chapitre 27.
  - Si $F = E$, de même on obtient $\mathcal{L}(E)$ contenant $GL(E)$, lui-même contenant $O(E)$ (chapitre 23 si $E = \mathbb{R}^2$, chapitre 24 si $E = \mathbb{R}^3$).

3° - CAS DES SUITES.

● L'ensemble des suites $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots)$ (chapitre 13) muni de l'addition terme à terme, et du produit par λ réel tel que $\lambda u = (\lambda u_1, \lambda u_2, \ldots, \lambda u_n, \ldots)$ est alors un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (de dimension infinie).

• On crée des sous-espaces, soit en considérant des suites finies (2 termes donnant $\mathbb{R}^2$, 3 termes donnant $\mathbb{R}^3$, etc...), soit en considérant des suites récurrentes.

• L'ensemble des suites infinies vérifiant une relation de type $u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n$ (a et b fixés, $ab \neq 0$) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, l'étude de l'équation $r^2 = ar + b$ conduit à trouver une base.

4° - CAS DES POLYNOMES.

● L'ensemble des polynômes "de la variable X", à coefficients réels, est noté $\mathbb{R}[X]$.

• $\mathbb{R}[X]$ muni de la somme (habituelle) et du produit par λ réel, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension infinie.

• On crée des sous-espaces de dimension $n+1$ en considérant les polynômes de degré maximum n (polynôme nul compris), une base est alors formée de $1, X, X^2, \ldots, X^n$ (base canonique).

• Les coordonnées de $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_nX^n$ dans cette base sont $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$, on est ramené au cas des suites finies de $(n+1)$ termes.

• $\mathbb{R}[X]$ muni de la somme et du produit habituels de polynômes, est un anneau commutatif unitaire.

• $\mathbb{R}[X]$ muni des opérations qui en font un espace vectoriel et un anneau (3 opérations) a une structure d'algèbre sur $\mathbb{R}$.

5° - CAS DES MATRICES 2 X 2.

● L'ensemble des matrices de type $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à coefficients réels est noté $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

• $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni de la somme de matrices et du produit par λ réel est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4, de base canonique

$$I_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

les coordonnées de A sont alors (a,b,c,d), on peut écrire $A = aI_1 + aI_2 + cI_3 + dI_4$.

• On crée des sous-espaces de dimension 3, 2 et même 1 en donnant des relations convenables entre a, b, c, d.

• $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni de la somme et du produit (lignes par colonnes) de matrices, est un anneau unitaire (non commutatif), dont on peut créer des sous-ensembles qui sont des corps.

● Remarque : avec $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, ensemble des matrices 3×3, on obtiendrait de même un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 9, un anneau unitaire, etc...

$(E, +_E, \vec{0}_E)$ $(\mathbb{K}, +_\mathbb{K}, \times_\mathbb{K}, 0_\mathbb{K}, 1_\mathbb{K})$

CHAPITRE 27

ESPACES VECTORIELS. APPLICATIONS LINEAIRES

1°- ESPACES ET SOUS-ESPACES (VECTORIELS)

♦ ***Espace vectoriel*** : ensemble E d'éléments x, y, ... (qu'on peut appeler vecteurs) muni d'une addition (interne) et d'un produit par les scalaires λ, μ, ... d'un corps $\mathbb{K}$ (produit externe), tels que :

$+ : E \times E \to E$, $(x, y) \mapsto x + y$

IANSC

1. (E,+) est un groupe abélien.

2. Le produit externe : $\begin{cases} \mathbb{K} \times E \to E \\ (\lambda, x) \to \lambda x \end{cases}$ vérifie pour tous scalaires et tous vecteurs (en plus de $\lambda x \in E$) :

D
- "distributivité" par rapport à l'addition de $\mathbb{K}$: $(\lambda + \mu)x = (\lambda x) + (\mu x)$.

D
- distributivité par rapport à l'addition de E : $\lambda(x + y) = (\lambda x) + (\lambda y)$.

A
- "associativité", de type $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$

$\lambda \times \mu$ dans $\mathbb{K}$

N
- l'unité 1 de $\mathbb{K}$ est "neutre", au sens de : $1x = x$, $\forall x \in E$.

★ Dans (E,+), le neutre est noté $\vec{0}_E$, l'opposé de x est noté $-x$; l'élément nul 0 de $\mathbb{K}$ vérifie $0\,x = \vec{0}_E$, $\forall x \in E$.

☐ Un espace vectoriel défini à l'aide d'un corps $\mathbb{K}$ est appelé $\mathbb{K}$-espace vectoriel ; en pratique $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

♦ ***Sous-espace vectoriel de E*** : toute partie non vide E' qui, munie des mêmes lois que E, a une structure d'espace vectoriel.

☐ En pratique, E' est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si l'on a (outre $E' \subset E$ et $E' \neq \emptyset$), pour tous scalaires λ

(1) (2)

de $\mathbb{K}$ et de tous vecteurs x, y de E' : $x + y \in E'$, $\lambda x \in E'$

On dit alors que E' est stable pour les deux lois.

◊ **Propriétés.**

- Tout sous-espace de E contient au moins $\vec{0}_E$.
- Si $E'' \subset E' \subset E$, et si E' est un sous-espace de E, alors : E'' est un sous-espace de E si et seulement si E'' est sous-espace de E'.
- L'intersection de n sous-espaces de E est un sous-espace de E.

2°- INDEPENDANCE LINEAIRE, GENERATEURS, BASES, DIMENSION.

☐ On désigne par $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ des éléments (vecteurs) de E, par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \ldots$ des éléments (scalaires) de $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{R}$.

♦ Combinaison linéaire de k vecteurs munis de k coefficients : vecteur défini par la formule $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k$.

♦ Partie génératrice de l'espace vectoriel E : famille d'éléments de E, fixés et notés $x_1, x_2, \ldots, x_k$, tels que :

pour tout vecteur v de E, il existe k scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ vérifiant $v = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k$

- On dit alors que la famille des x_i engendre l'espace E, ou bien que les x_i sont des générateurs de E, etc...

♦ Indépendance linéaire de k vecteurs : les k vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sont linéairement indépendants, lorsque la combinaison linéaire nulle ne peut avoir lieu que pour des scalaires nuls.

- $x_1, x_2, \ldots, x_k$ indépendants si et seulement si :

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k = \vec{0}_E \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_k = 0$$

- On dit alors que les x_i étudiés forment une famille libre, et dans le cas contraire (au moins un des λ_i non nul), on a une famille liée (ou un système lié).

◆ Bases de l'espace vectoriel E : on appelle base (de E) toute famille à la fois génératrice et libre (ou linéairement indépendante).

◊ Propriétés des bases.

- $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ est une base si et seulement si tout vecteur x de E s'écrit : $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k$ avec $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ unique.
- Si une base contient k éléments, toute autre base aussi.

☐ Si $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ est une base, on écrit $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k$ et les scalaires $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ sont les composantes ou coordonnées de x dans cette base ; on préfère en général réserver le mot coordonnées pour les espaces affines (chapitre 28).

◆ Dimension d'un espace vectoriel E : nombre entier, noté $\dim E$, égal au cardinal d'une base. Par abus, on parle de dimension infinie s'il y a lieu (chapitre 26).

◊ Propriétés diverses.

- Base canonique (ou naturelle) de $\mathbb{R}^n$: famille des n éléments $e_1 = (1,0,\dots,0)$, $e_2 = (0,1,\dots,0)$, ..., $e_n = (0,0,\dots,1)$ où l'on a un seul scalaire égal à 1 par n-uplet, occupant respectivement la 1ère place dans e_1, la 2ème dans e_2, ..., la $n^{\text{ième}}$ dans e_n (et les autres termes sont nuls).
- Si $\dim E = n$ (connu d'avance), alors :

  1. n vecteurs de E forment une base si et seulement si ce sont des générateurs.
  2. n vecteurs de E forment une base si et seulement si ce sont des vecteurs linéairement indépendants.

- Tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{R}^n$ (exemple : $\mathbb{C}$ est isomorphe à $\mathbb{R}^2$).

3° - SOMME, SOMME DIRECTE, SUPPLEMENTAIRES.

◆ Somme de 2 sous-espaces, E_1 et E_2, d'un même espace vectoriel E : nouveau sous-espace, noté $E_1 + E_2$, constitué des vecteurs de type $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$.

- Si x est donné dans $E_1 + E_2$, il peut exister (suivant les cas) plusieurs couples (x_1, x_2) de $E_1 \times E_2$ ou un seul (tels que : $x = x_1 + x_2$).

◆ Somme directe de 2 sous-espaces : somme de 2 sous-espaces, mais dans le cas : $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, et (x_1, x_2) unique.

- La somme directe est notée $E_1 \oplus E_2$; dans ce cas, on a : $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}_E\}$ mais pas nécessairement $E_1 \oplus E_2 = E$.

◆ Sous-espaces supplémentaires de E : E_1 et E_2 sont supplémentaires (l'un de l'autre) dans E, lorsqu'ils sont des sous-espaces de E, et que E est leur somme directe, d'où 2 définitions équivalentes.

1. Les sous-espaces E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E, lorsque tout x de E se décompose d'une manière unique en $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$.
2. Les sous-espaces E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E, lorsque $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}_E\}$ et $E_1 + E_2 = E$.

◊ Propriété. Si $E = E_1 \oplus E_2$ et si $\dim E = n$: $\dim E_1 \oplus \dim E_2 = n$.

☆ Exemples.

- Dans $E = \mathbb{R}$, les seuls sous-espaces sont $\{\vec{0}\}$ et $\mathbb{R}$, ils sont supplémentaires.
- Dans $E = \mathbb{R}^2$, les sous-espaces sont : $\{\vec{0}\}$, $\mathbb{R}^2$, et toute droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ (ensemble des $\lambda\vec{u}$: $\vec{u}$ fixé non nul, λ "parcourt" $\mathbb{R}$).

  Les supplémentaires sont $\{\vec{0}\}$ et $\mathbb{R}^2$ d'une part, et d'autre part toute paire de droites vectorielles distinctes.
- Dans $E = \mathbb{R}^3$, les sous-espaces sont : $\{\vec{0}\}$, $\mathbb{R}^3$, toute droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$, et tout plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ (ensemble des $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ fixés non nuls ni colinéaires, (λ,μ) "parcourt" $\mathbb{R}^2$).

Les supplémentaires sont $\{\vec{0}\}$ et $\mathbb{R}^3$ d'une part, et d'autre part toute paire formée d'un plan vectoriel et d'une droite vectorielle non contenue dans le plan vectoriel.

- Dans $E = \mathbb{R}^3$, 2 plans vectoriels distincts ont pour somme $\mathbb{R}^3$, cette somme n'est pas directe ; tandis que pour un plan et une droite non contenue dans ce plan, la somme est $\mathbb{R}^3$ et elle est directe.

– De plus, 3 droites vectorielles distinctes et non liées ont une somme directe (généralisée) égale à $\mathbb{R}^3$.

4° - CAS GENERAL D'APPLICATIONS LINEAIRES.

□ Données : 2 espaces vectoriels E et F (sur le même corps $\mathbb{R}$) d'éléments nuls $\vec{0}_E$ et $\vec{0}_F$, et une application $f : \begin{vmatrix} E \longrightarrow F \\ x \longrightarrow f(x) \end{vmatrix}$

♦ **Définition** : f est linéaire lorsqu'elle vérifie, pour tous vecteurs x, y de E et tous scalaires λ, l'égalité suivante dans F : $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$.

● $\mathscr{L}(E,F)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de E dans F muni des 2 opérations (somme de fonctions, produit par un scalaire) qui en font un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

- Si f est linéaire et bijective (de E sur F), f est appelée isomorphisme (de E sur F), et f^{-1} est aussi un isomorphisme (de F sur E).
- L'ensemble des isomorphismes de E sur F n'est pas nécessairement un sous-espace de $\mathscr{L}(E,F)$.

♦ **Noyau** : si $f \in \mathscr{L}(E,F)$, le noyau de f, noté Ker f, est l'ensemble des antécédents de $\vec{0}_F$, $\boxed{\operatorname{Ker} f = \{x \in E / f(x) = \vec{0}_F\}}$

On peut aussi le noter $f^{-1}(\vec{0}_F)$, "image réciproque" de $\vec{0}_F$ dans E.

◊ **Propriétés** : Ker f est un sous-espace de E.
f injective $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}_E\}$

♦ **Image** : si $f \in \mathscr{L}(E,F)$, l'image de f, notée Im f, est l'ensemble des transformés des x de E, $\boxed{\operatorname{Im} f = \{y \in F / y = f(x), \forall x \in E\}}$

On peut aussi la noter f(E), image de E par f.

◊ **Propriétés** : Im f est un sous-espace de F.
f surjective $\Leftrightarrow$ Im f = F.

◊ **Théorèmes "dimensionnels".**

● Si f(linéaire) transforme une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E en $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$ (éléments de F), on a :

1. f injective $\Leftrightarrow (f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$ famille libre de F.
2. f surjective $\Leftrightarrow f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$ générateurs de F.
3. f bijective $\Leftrightarrow (f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$ base de F.

● Si f est linéaire et si dim E = n,

$$\dim(\operatorname{Im} f) = n - \dim(\operatorname{Ker} f)$$

● Si dim E = dim F (et si f est linéaire), alors :

f injective $\Leftrightarrow$ f surjective $\Leftrightarrow$ f bijective.

5° - ENDOMORPHISMES, AUTOMORPHISMES.

♦ **Endomorphisme** : application linéaire d'un espace vectoriel E dans E.

● $\mathscr{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E.

- Si un endomorphisme f est bijectif (de E sur E), f est appelé automorphisme de E, et f^{-1} est aussi un automorphisme de E, l'ensemble des automorphismes de E est noté GL(E).

◊ **Propriétés** : toutes les propriétés du paragraphe précédent, adaptées au cas actuel en posant F = E, restent valables.

- De plus, la composition o, non définie dans $\mathscr{L}(E,F)$, est définie dans $\mathscr{L}(E)$; $(\mathscr{L}(E),+,o)$ est un anneau unitaire (d'unité Id_E, application identique), non commutatif ($fog \neq gof$) appelé l'anneau $\mathscr{L}(E)$.
- (GL(E),o) est un groupe non abélien, appelé groupe linéaire de E.

• Dans l'anneau $\mathscr{L}(E)$, fof est notée f^2, et dans le cas général : $f^{n-1}of = f^n$ (ne pas confondre f^2 avec $f \times f$, non défini).

♦ **Noyau, image, théorèmes dimensionnels** s'adaptent du paragraphe précédent au cas actuel, en posant F = E.

♦ **Invariants** : si $f \in \mathscr{L}(E)$, on appelle invariant de f (ou par f) tout élément x de E tel que $f(x) = x$.

• L'ensemble des invariants de f est $\text{Ker}(f - Id_E)$, d'après les égalités équivalentes : $f(x) = x$, $f(x) = Id_E(x)$, $f(x) - Id_E(x) = \vec{0}_E$, $(f - Id_E)(x) = \vec{0}_E$.

3 ☆ Exemples d'endomorphismes et d'automorphismes.

1 • **Projection** sur E_1 parallèlement à E_2, notée pr_1 :

• On suppose E_1 et E_2 supplémentaires dans E, on sait que tout x de E se décompose en $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, d'une manière unique ; on définit pr_1 par :

$$pr_1 : \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow E_1 \\ x \longrightarrow pr_1(x) = x_1 \end{array} \right. , \quad \text{on a : } \boxed{pr_1 \in \mathscr{L}(E)}$$

• De même la projection sur E_2 parallèlement à E_1,

$$pr_2 : \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow E_2 \\ x \longrightarrow pr_2(x) = x_2 \end{array} \right. , \quad \text{on a : } \boxed{pr_2 \in \mathscr{L}(E)}$$

• On a : $\text{Ker}\, pr_1 = E_2$, $\text{Im}\, pr_1 = E_1$, l'ensemble des invariants de pr_1 est E_1, et $pr_1 o pr_1 = pr_1$.

2 • **Homothétie** (vectorielle) de rapport λ non nul, notée h_λ

$$h_\lambda : \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longrightarrow h_\lambda(x) = \lambda x \end{array} \right. , \quad \text{on a : } \boxed{h_\lambda \in GL(E)}$$

• Si $\lambda = 1$, h_1 est l'identité Id_E ; si $\lambda = -1$, h_{-1} est la symétrie centrale, ou $-Id_E$.

• $h_\lambda o h_\mu = h_\mu o h_\lambda = h_{\lambda\mu}$, la composition d'homothéties (de rapports non nuls) revient au produit de leurs rapports.

• $(h_\lambda)^{-1} = h_{\frac{1}{\lambda}}$ (pour $\lambda \neq 0$).

• $h_\lambda of = foh_\lambda$, h_λ "commute" avec tout élément de $\mathscr{L}(E)$.

3 • **Involution** (vectorielle) f : définie par $fof = Id_E$ ou $f = f^{-1}$, une involution est donc un automorphisme, $\boxed{f \in GL(E)}$.

• Si f est une involution, f est la symétrie par rapport à $E_1 = \text{Ker}(f - Id_E)$, parallèlement à $E_2 = \text{Ker}(f + Id_E)$.

• **Preuve succincte** : si E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E, la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 est définie comme dans le cas de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, et notée s_1 ; on peut écrire : $s_1 = pr_1 - pr_2$, $s_1 = 2pr_1 - Id_E$, $s_1 = Id_E - 2pr_2$; si $fof = Id_E$, on vérifie immédiatement : $\text{Ker}(f - Id_E)$ et $\text{Ker}(f + Id_E)$ supplémentaires, on les note respectivement E_1 et E_2, et on obtient $f = s_1$

6° - ESPACES EUCLIDIENS, AUTRES ENDOMORPHISMES.

♦ **Produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E** :

$$\text{application } \phi : \left| \begin{array}{l} E \times E \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longrightarrow \phi(x,y) \end{array} \right. \quad \text{vérifiant les}$$

axiomes suivants.

1. Symétrie : $\phi(x,y) = \phi(y,x)$ pour tous vecteurs x,y.
2. Bilinéarité : pour tous vecteurs x, x', y, y' et tous scalaires λ,
   linéarité par rapport au 1° terme, $\phi(\lambda x + x', y) = \lambda\phi(x,y) + \phi(x',y)$
   linéarité par rapport au 2° terme, $\phi(x, \lambda y + y') = \lambda\phi(x,y) + \phi(x,y')$
3. Positivité : $\phi(x,x) \geqslant 0$, et seul $x = \vec{0}_E$ vérifie $\phi(x,x) = 0$.

★ Produit scalaire **euclidien** : noté $x \cdot y$ au lieu de $\phi(x,y)$, défini à partir des composantes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de x sur la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (de même pour y), par :

$$\boxed{x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n}$$

♦ **Norme d'un vecteur** : racine carrée du "carré scalaire" du vecteur, notée $\|x\|$, $\|x\| = \sqrt{\phi(x,x)}$.

◊ Propriétés : déduites de celles du produit scalaire et de $\sqrt{\ }$.

- $\|x\| \geq 0$, seul $x = \vec{0}_E$ vérifie $\|x\| = 0$.
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \ \|x\|$

★ Norme euclidienne : $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$, ou aussi (en base canonique)

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} .$$

- Orthogonalité : 2 vecteurs non nuls x et y sont orthogonaux, et on écrit $x \perp y$, lorsque $x \cdot y = 0$.

La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée, ce qui signifie : chaque vecteur e_i est orthogonal aux autres vecteurs e_j de cette base, et sa norme est 1.

● Endomorphismes particuliers : le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est supposé muni du produit scalaire euclidien et de la norme correspondante, on dit que E est euclidien.

☐ Dans l'espace euclidien E, on sait reconnaître si 2 vecteurs non nuls sont orthogonaux ($x \perp y \Leftrightarrow x \cdot y = 0$), et si deux sous-espaces sont orthogonaux (tout vecteur de l'un est orthogonal à tout vecteur de l'autre), etc...

♦ Endomorphisme orthogonal ou isométrie vectorielle : élément f de $\mathcal{L}(E)$ tel que $f(x) \cdot f(y) = x \cdot y$ pour tous vecteurs x, y de E ; (on dit que l'isométrie conserve le produit scalaire).

- Une isométrie conserve la norme : pour y = x, on obtient : $\|f(x)\|^2 = \|x\|^2$, d'où $\|f(x)\| = \|x\|$.
- Les isométries vectorielles sont : les rotations (vectorielles), les symétries orthogonales (vectorielles), la symétrie centrale, et leurs composées.
- Une homothétie h_λ vérifie $\lambda x \cdot \lambda y = \lambda^2 (x \cdot y)$, et $\|\lambda x\| = |\lambda| \ \|x\|$, ce n'est pas une isométrie en général.

CHAPITRE 28

ESPACES AFFINES, APPLICATIONS AFFINES.

1°- ESPACES ET SOUS-ESPACES (AFFINES).

♦ ***Espace affine*** : ensemble $\mathcal{E}$ d'éléments M, P, Q,... (qu'on peut appeler points), construit à partir d'un espace vectoriel directeur E à l'aide d'une loi externe (additive) de schéma + : $\left| \begin{array}{l} E \times \mathcal{E} \to \mathcal{E} \\ (\vec{u}, P) \to P + \vec{u} \end{array} \right.$

vérifiant pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, ... et tous points P, Q, ...

1. $P + (\vec{u} + \vec{v}) = (P + \vec{u}) + \vec{v}$ et $P + \vec{0}_E = P$.
2. Quels que soient P et Q, il existe $\vec{v}$ tel que $Q = P + \vec{v}$.
3. Pour tout point P, seul $\vec{v} = \vec{0}_E$ vérifie $P = P + \vec{v}$.

☐ Interprétation

- L'écriture $Q = P + \vec{u}$ conduit à $Q - P = \vec{u}$, qu'on écrit $\overrightarrow{PQ} = \vec{u}$, donc la loi précédente fait correspondre au vecteur $\vec{u}$ et au point P, le point Q tel que $\overrightarrow{PQ} = \vec{u}$.
- On peut considérer l'espace affine comme une représentation de l'espace vectoriel par des bipoints : une fois un 1er point P choisi comme origine d'un vecteur $\vec{u}$, le 2ème point Q est déterminé par $\overrightarrow{PQ} = \vec{u}$ (ou $Q = P + \vec{u}$).
- On peut même fixer une origine commune O à tous les bipoints alors $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ (ou $M = O + \vec{u}$) définit le point M comme transformé de O par la translation $T_{\vec{u}}$: de cette manière, l'espace affine est une représentation de l'espace vectoriel par des points (mais on ne doit pas confondre vecteur $\vec{u}$ et point M).

★ Cas usuels

- Les espaces $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ sont notés de la même manière comme espaces vectoriels ou espaces affines, mais c'est dans le cas affine qu'ils sont utilisés en pratique (architecture, dessin industriel, technologie des machines, ...).

♦ ***Sous-espace affine*** **de $\mathcal{E}$** : sous-ensemble $\mathcal{E}'$ des points M de $\mathcal{E}$ tels que, le point A étant fixé, $M = A + \vec{u}$ où $\vec{u}$ parcourt un sous-espace vectoriel E' de l'espace directeur E.

- Dans ce cas $\mathcal{E}'$ a pour directeur le sous-espace (vectoriel) E'.

◊ Propriétés : obtenues en "transposant" les propriétés vectorielles au cas affine ; on rappelle les principales :

- L'intersection de 2 sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$, son espace (vectoriel) directeur est l'intersection des 2 sous-espaces directeurs correspondants.
- Deux sous-espaces affines sont supplémentaires dans $\mathcal{E}$ lorsque leurs espaces directeurs sont des sous-espaces (vectoriels) supplémentaires dans E.
- De même pour orthogonaux, lorsque l'orthogonalité est définie dans l'espace vectoriel.

◊ Parallélisme : 2 sous-espaces affines sont parallèles, lorsqu'ils ont même espace (vectoriel) directeur, (exemples : 2 droites parallèles, 2 plans parallèles).

- Plus généralement, 2 sous-espaces affines sont parallèles lorsqu'un des espaces directeurs est inclus dans l'autre, (exemple : droite parallèle à un plan).
- On note le parallélisme par le symbole //, on admet en général que le parallélisme est "au sens large" : les 2 sous-espaces affines peuvent avoir une intersection vide, ou bien être confondus ou contenus l'un dans l'autre.

☐ Exemples : le lecteur adaptera les exemples "vectoriels" du chapitre 27, 3°.

2° - DIMENSION. REPERES.

♦ Dimension : si $\mathcal{E}$ est un espace affine, d'espace vectoriel directeur E, la dimension de $\mathcal{E}$, notée dim $\mathcal{E}$, est définie par :

$$\dim \mathcal{E} = \dim E.$$

♦ Repères d'un espace affine

- (soit $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$) une base de l'espace vectoriel directeur E (on suppose $\dim E = n$), on considère un point fixé de $\mathcal{E}$, noté O et appelé origine de $\mathcal{E}$, et les n vecteurs $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \ldots, \overrightarrow{OA_n}$ respectivement égaux à $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$.

Le point O et les n vecteurs $(\overrightarrow{OA_i} = \vec{e}_i)$ constituent un repère de $\mathcal{E}$, désigné par $(O ; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$.

◊ Propriété : tout point M de $\mathcal{E}$ est défini par ses coordonnées dans un tel repère ; ces coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont respectivement égales aux composantes dans la base $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ du vecteur $\vec{u}$ correspondant $(\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ ou $M = O + \vec{u})$, et dans tout repère d'origine O, O a pour coordonnées $(0, 0, \ldots, 0)$.

3° - APPLICATIONS AFFINES.

☐ Données : 2 espaces affines $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ d'espaces vectoriels directeurs E, F sur un même corps $\mathbb{K}$, et une application f : $\begin{vmatrix} \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F} \\ M \longrightarrow f(M) \end{vmatrix}$

☐ Conventions : pour clarifier certaines formules, on désignera f(M) par M', f(P) par P', etc... ; de plus, on notera $\vec{f}$ une application linéaire E dans F, pour ne pas confondre avec f affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$.

♦ Définition : f est affine lorsqu'il existe une application linéaire $\vec{f}$ (entre les espaces vectoriels directeurs) vérifiant, pour tous points M, P, ...

$$f(P) = f(M) + \vec{f}(\overrightarrow{MP}) \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{M'P'} = \vec{f}(\overrightarrow{MP}).$$

Scanné avec CamScanner

- $\vec{f}$ est appelée partie linéaire de f, ou application linéaire associée à f, et on a : $\vec{f} \in \mathcal{L}(E,F)$.

◊ Propriétés

- La donnée d'un point A et de son transformé f(A) = A' ainsi que de l'application linéaire $\vec{f}$, définit une application affine f (dont $\vec{f}$ est la partie linéaire).
  Preuve : tout point P a pour transformé $f(P) = f(A) + \vec{f}(\overrightarrow{AP})$ par définition, donc f est définie.

- f injective $\Leftrightarrow \vec{f}$ injective,
  f surjective $\Leftrightarrow \vec{f}$ surjective,
  f bijective $\Leftrightarrow \vec{f}$ bijective.

- Si $\mathcal{E}_1$ est un sous-espace affine, de sous-espace vectoriel directeur E_1, $f(\mathcal{E}_1)$ est un sous-espace affine et $\vec{f}(E_1)$ est son sous-espace directeur.

★ Cas de $\mathcal{F} = \mathcal{E}$ (donc F = E)

- Définitions et propriétés précédentes restent valables ; maintenant $\vec{f} \in \mathcal{L}(E)$, on a de plus :
  - Si f et g (affines) ont pour parties linéaires $\vec{f}$ et $\vec{g}$, alors : g o f est affine et sa partie linéaire est $\vec{g} \circ \vec{f}$.
  - Si f (affine) est bijective, f^{-1} est affine et bijective, et sa partie linéaire est $\vec{f}^{-1}$.

- Pour chaque endomorphisme $\vec{f}$, une application affine correspondante est nommée et définie d'une manière similaire ; ainsi : homothétie vectorielle correspond à homothétie affine, de même pour les projections, involutions ($f \circ f = Id_{\mathcal{E}}$), symétries, rotations, etc....

- La translation de vecteur donné est une transformation affine dont la partie linéaire est l'identité (vectorielle).

4°- ESPACES EUCLIDIENS, AUTRES APPLICATIONS AFFINES

♦ **Définition** : un espace affine $\mathcal{E}$ est euclidien lorsque son espace vectoriel directeur E est euclidien.

◊ **Conséquences** : le produit scalaire (euclidien) agit sur les vecteurs de type $\overrightarrow{PQ}$ de $\mathcal{E}$ comme il agit sur les vecteurs correspondants de $E(\vec{u} = \overrightarrow{PQ})$, de même pour la norme.

☆ Exemples : si dans $\mathbb{R}^2$ (repère orthonormé) on a les points $A(1,2)$, $B(2,\frac{1}{2})$, $C(-1,-1)$, $D(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$, on obtient : $\overrightarrow{AC} = (-2,-3)$ d'après $\overrightarrow{AC} = C - A$, de même $\overrightarrow{BD} = (-\frac{5}{2}, 1)$.
- $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -2(-\frac{5}{2}) + (-3)\,1 = 2$.
- $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$, ou aussi $d(A,C) = \sqrt{13}$.

♦ **Distance (euclidienne)** : la distance de 2 points P et Q de $\mathcal{E}$, notée d(P,Q), est définie par :

$$\boxed{d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|}$$ où la norme est euclidienne.

- Si $(O, \vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ est un repère orthonormé de $\mathcal{E}$, P est défini par $\overrightarrow{OP} = x_1\vec{e_1} + \dots + x_n\vec{e_n}$ ou par $P(x_1, \dots, x_n)$, de même on a $Q(x'_1, \dots, x'_n)$, et on obtient : $d(P,Q) = \sqrt{(x_1-x'_1)^2 + \dots + (x_n-x'_n)^2}$.

- Isométries affines : l'application affine f est une isométrie lorsqu'elle conserve la distance, d'où la formule :

$$\boxed{f \text{ isométrie affine} \Leftrightarrow d[f(P),f(Q)] = d(P,Q).}$$

Le lecteur adaptera les résultats de la fin du chapitre 27.

☐ Conseil : pour étudier une application affine f de $\mathcal{E}$ dans lui-même, il est très utile de rechercher d'abord les invariants, (points M tels que M = f(M)). Une translation n'a pas de points invariants, mais la répartition des points invariants dans les autres cas (1 point, une droite, etc...) fournit des précisions que l'on peut compléter à l'aide de la partie linéaire $\vec{f}$.

INDEX ALPHABETIQUE

Les N^{os} renvoient aux pages où le mot est défini ou expliqué

A

B

C

D

E

F

G,H

I

K,L

M

N

O

Scanné avec CamScanner

TABLE DES MATIERES

(géométrie et algèbre linéaire)

$8 \times 3 = 24$
$9 \times 3 = 27$