(1) Suites

$$f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow f(x) \end{array} \right.$$

D_f { $\mathbb{N}$ ou partie de $\mathbb{N}$

$S = \mathbb{N}$ ou $S \subset \mathbb{N}$

$26+5$
$=31$ ... t ont ...

... la restriction
... a ... u ...

... $= f(n)$

... de $\mathbb{N}$ (ou une partie)

... (n)

(13)

SOURIAC SUITES
PROGRESSIONS

. ex $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+3}$

à partir de

$$u : \left| \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ n \longrightarrow u(n) = \dfrac{n^2-1}{n+3} \end{array} \right.$$

Suite $\left\{\dfrac{n^2-1}{n+3}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ suite terme gén $\dfrac{n^2-1}{n+3}$

Suite $u_n = \dfrac{n^2-1}{n+3}$ suite $\left(\dfrac{n^2-1}{n+3}\right)$

- En pratique dom $\mathbb{N}^*$ ou $\mathbb{N}$
  peut écrire "liste" termes successifs
  depuis u_1 ou u_0 sous forme

  $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots)$

- Rang d'un terme : entier égal à l'indice
  u_0 est de rang 0 ...

(1) Suites

$$f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow f(x) \end{array} \right.$$

$D_f \supset \mathbb{N}$ ou partie de $\mathbb{N}$

$S = \mathbb{N}$ ou $S \subset \mathbb{N}$

"restreinte à S"

cut soit val de x de départ sont des val entières

ds ces condi^{n}, on note u la restric^{n} de f à S, et on dit applica^{n} u est une suite

$$u : \left| \begin{array}{l} S \longrightarrow \mathbb{R} \\ n \longrightarrow u(n) = f(n) \end{array} \right.$$

. D une suite u est une app^{n} de $\mathbb{N}$ (ou une partie) ds $\mathbb{R}$

. Not^{ns} - $u(n)$ ou u_n

- suite $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (u_n)

. ex $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x+3}$

à partir de

$$u : \left| \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ n \longrightarrow u(n) = \dfrac{n^2-1}{n+3} \end{array} \right.$$

Suite $\left\{\dfrac{n^2-1}{n+3}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ suite terme gén $\dfrac{n^2-1}{n+3}$

Suite $u_n = \dfrac{n^2-1}{n+3}$ suite $\left(\dfrac{n^2-1}{n+3}\right)$

- En pratique dom $\mathbb{N}^*$ ou $\mathbb{N}$
peut écrire "liste" termes successifs depuis u_1 ou u_0 sous f^{me}

$$u = (u_0, u_2, \dots, u_n, \dots)$$

- Rang d'un terme : entier égal à l'indice
u_0 ~~est~~ est de rang 0 ...

· Suites particulières

- Si une suite est finie,
la suite est finie,
la liste ne comporte qu'un ~~nb~~ nb
fini de termes,
ex $(u_1, u_2, \dots, u_{12})$

- Suite récurrente
donné par val de u_0 (ou u_1)
et la manière d'en déduire
successivement les termes

· ex
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = \dfrac{u_{n-1} - 1}{u_{n-1} + 2} \end{cases}$$

calcul u_1 on suppose $n = 1$

$$u_1 = \frac{2-1}{2+2} = \frac{1}{4} \qquad u_2 \quad n=2$$

inutile en prépa

2) Notions associées aux suites

- Considère suites ~~[illegible]~~ dom $\mathbb{N}$ terme général u_n

- strict^t ~~[illegible]~~ croiss : tq $u_{n+1} > u_n , \forall n \in \mathbb{N}$
  - déc $<$

  soit soit → monotone

- alternée $\underline{u_n u_{n+1} < 0}$

$u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$

- convergente $u_n \to \lim$ ~~[illegible]~~ finie lorsq $n \to \infty$

  $\lim = 0$

- div non
  - $u_n = 1 + (-1)^n$ car termes valent alt^t 0 ou 2 suivant parité on n : pas de lim
  - $\frac{n^2-1}{n+3}$ car lim ∞

- Sous suite ou suite extraite

Choisie ~~tt~~ termes mais seulement aux sont le rang n'est défini par une loi donnée, ces termes forment un SS de u_n

- $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$,

SS termes rang ~~[illegible]~~ pair $(n = 2p)$

" p terme gén $\frac{1}{2p+1}$

impair $\frac{-1}{2p+2}$

3) CP des Progressions

~~•~~ récurr

arit :

u_0 donné et $u_{n+1} = u_n + r$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

cte ≠ r raison

géom :

$u_n \times q$ raison

$q \neq 0$, 1, -1

Formule usuelles — f(n) de u_0 raison et rang

$u_n = u_0 + nr$

$u_n = u_0 \times q^n$

+ gén

$u_n = u_p + (n-p)r$

$u_n = u_p \times q^{(n-p)}$ ($p \in \mathbb{N}$, $p \leq n$)

terme gén u_n f(n) précédent et suivant

$$u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$$

$$|u_n| = \sqrt{u_{n-1} \times u_{n+1}}$$

+ gén

$$u_n = \frac{u_{n-p} + u_{n+p}}{2} \text{ a}$$

$$u_n^2 = u_{n-p} \times u_{n+p} \text{ g}$$

moyenne

• S_n n premiers termes

- Si commence à u_0 on veut noter

$u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$

préfère noter commence

$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

$$S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$$

$$S_n = u_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

CP géom u_1 $|q| < 1$

la limite de S_n lorsque $n \to \infty$ ∃

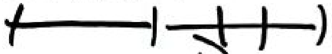
car $q^n \to 0$ noté S

$$S = \lim_{n \to +\infty} (S_n) = \frac{u_1}{1-q}$$

↪ lièvre blessé → gîte

d 300 mètres

100m



arrête

que 1/3 précédente

formation suite

?

$u_1 = 100\,m$

$u_2 = 1/3\, u_1$

$u_3 = 1/3\, u_2$

$u_n = \frac{1}{3} u_{n-1}$

S lim ci-dessous

$$\frac{100\,m}{1-\frac{1}{3}} = 150\,m$$

(4) Sommes usuelles

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\cdots+n = \frac{(n+1)n}{2}$$

moy a

$$S_n = \frac{n}{2}(u_1+u_n)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

k^3 $\qquad \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Cas général

$$\sum_{k=1}^{n} k^p$$

on pose $\sum_{k=1}^{n} k = S(1)$

$\sum k^2 = S(2)$

$\sum k^p = S(p)$

Sin mesuton

$(1+x)^{p+1}$ pour $x = 1, 2, \cdots n$

si on ajoute membre à membre

"cumuler"

↑ Relation entre $S(p)$ & $S(p-1)$

$\vdots$

$S(2)$ $S(1)$..

$x = 1$

...

① f_s vectorielles

D $\vec{f}$: $\begin{vmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ t \to \vec{f}(t) \end{vmatrix}$ ou $\to \mathbb{R}^3$

représente 2 (ou 3) f_s composantes

a mettre
donnée
ou $\mathbb{R}^2$

pour chaque

lim qd $t \to a$,
1 lim qd

⑭

f vectorielles
cinématique

SOUMAC

Ds ce cas si

$f_1(t) \to \alpha$ on a $\vec{f}(t) \to (\alpha, \beta)$
et
$f_2(t) \to \beta$

ex $\vec{f}(t) = (3t^2, t^4+1)$
on trouve $\vec{f}$ cont sur $\mathbb{R}$
dér sur $\mathbb{R}$ avec $\vec{f}'(t) = (6t, 4t^3)$
et $\lim\limits_{t \to a} \vec{f}(t) = (3a^2, a^4+1)$

. Opérat° : comme s'il s'agissait de ~~vect~~ vecteurs
$g(t) = (t, t^2)$ on a
- $(\vec{f}+\vec{g})(t) = \vec{f}(t) + \vec{g}(t) = (3t^2+t, t^4+t^2+1)$
λ cte $(\lambda \vec{f})(t) = \lambda \vec{f}(t)$
$= (3\lambda t^2, \lambda t^4 + \lambda)$

Base ON
$\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t) = 3t^3 + t^2(t^4+1)$

$\|\vec{f}(t)\| = \sqrt{9t^4 + (t^4+1)^2}$
$\|\vec{g}(t)\| = \sqrt{t^2+t^4}$

(1) f_s vectorielles

D $\vec{f} : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ t \to \vec{f}(t) \end{vmatrix}$ ou $\to \mathbb{R}^3$

représente 2 (ou 3) f_s composantes de $\mathbb{R}$ ds $\mathbb{R}$

ex : si $\vec{f}(t) = (3t^2, t^4+1)$ a valeurs données ds $\mathbb{R}^2$

$\vec{f}$ constituée de

$f_1 : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \to f_1(t) = 3t^2 \end{vmatrix}$

et f_2 $\quad f_2(t) = t^4+1$

$\lim_{t \to a} \vec{f}(t)$ cont $\vec{f}', \vec{f}''$

à partir notions pour chaque f composante

$\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t))$ a une lim qd $t \to a$, lorsque $f_1(t)$ et $f_2(t)$ ont 1 lim qd $t \to a$

Ds ce cas si

$f_1(t) \to \alpha$ et $f_2(t) \to \beta$ on a $\vec{f}(t) \to (\alpha, \beta)$

ex $\vec{f}(t) = (3t^2, t^4+1)$
on trouve $\vec{f}$ cont sur $\mathbb{R}$
dér sur $\mathbb{R}$ avec $\vec{f}'(t) = (6t, 4t^3)$
et $\lim_{t \to a} \vec{f}(t) = (3a^2, a^4+1)$

. Opérat^n : comme s'il s'agissait de ~~[illegible]~~ vecteurs

$g(t) = (t, t^2)$ on a

- $(\vec{f}+\vec{g})(t) = \vec{f}(t) + \vec{g}(t) = (3t^2+t, t^4+t^2+1)$

λ cte $\quad (\lambda \vec{f})(t) = \lambda \vec{f}(t)$
$= (3\lambda t^2, \lambda t^4 + \lambda)$

Base ON

$\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t) = 3t^3 + t^2(t^4+1)$

$\|\vec{f}(t)\| = \sqrt{9t^4 + (t^4+1)^2}$

$\|\vec{g}(t)\| = \sqrt{t^2 + t^4}$

② cinématique gén

→ chose mvts, indépendt leurs causes

point

variable t explicitement ou non

date, repérée par rapport à une date O à choisir unité non précisée en gén (au contraire sci physique)

mvt ~~[illegible]~~ tjs lieu par rapport à un repère donné

quel RON ~~[illegible]~~ plan affine

pr situer pt M, on se donne ce repère pr examiner les vecteurs nécessaires →

• D 1 mvt (plan)
Ds RON $(O, \vec{i}, \vec{j})$ il est équivalent de connaître ~~[illegible]~~ $M(x, y)$
ou $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

d'où :

Mvt M déf par ~~[illegible]~~ $R(O, \vec{i}, \vec{j})$
et par ~~[illegible]~~ la ~~[illegible]~~ f° vectorielle

$t \longrightarrow \overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$

Trajectoire : ~~[illegible]~~ ses ~~[illegible]~~ positions de M lorsq t varie.

$M(t) = (x(t), y(t))$ — cbe paramétrée (de param t)

Si on élimine → équ° cartésienne

↕

cbe Gr.

Donne ~~la traj~~ la trajectoire

. vitesses

$\vec{V}(M) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \quad \left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right)$

scalaire $v(M)$ en gén munie + ve règle ~~absolue~~

si $v \geq 0$

$= \|\vec{V}(M)\|$ ou $\sqrt{x'^2 + y'^2}$

$\vec{\Gamma}(M) = \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$

$\gamma(M) = \|\vec{\Gamma}(M)\|$

ex

$\overrightarrow{OM}(t) = (3t^2, t^4+1)$

$x(t) = 3t^2$
$y(t) = t^4+1$

[redacted] traj [redacted] $t^2 = \frac{x}{3}$ d'où $y = \frac{x^2}{9}+1$

or $x \geq 0$

$\vec{v}(M) = (6t, 4t^3)$
$v(M) = \sqrt{36t^2+16t^6} = 2\sqrt{t^2(4t^4+9)}$
or $t \geq 0$ $v(M) = 2t\sqrt{4t^4+9}$
$\vec{\Gamma}(M) = (6, 12t^2)$ $\gamma(M) = \sqrt{36+144t^2}$
$= 6\sqrt{1+4t^2}$

Rem

$\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt}$ mais en gén $\gamma \neq \frac{dv}{dt}$

significatif force ... tangent en M à ~~traj~~ traj

des concavité en gén

Hodographe traj pt $P(X(t), Y(t))$
tq $\overrightarrow{OP} = \vec{v}(M)$
in directrice des vitesses

chaque instant
Géométriquement P on dérivait $\vec{v}(M)$

3) Mvts particuliers

Classt par traj

rectiligne

plan

curviligne circulaire

—— $\vec{v}$ et $\vec{\Gamma}$

accéléré $\vec{v}\cdot\vec{\Gamma} > 0$ ou $\|\vec{v}\| \nearrow$

retardé freiné décéléré ou "contraire"

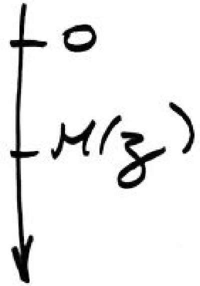
uniforme $\vec{v}\cdot\vec{\Gamma} = 0$ $\forall t$ ou v cte

—— + varié lorsque γ cte

. chute libre

suffit connaître

cote z de M, on a:



$z''(t) = g$ cte

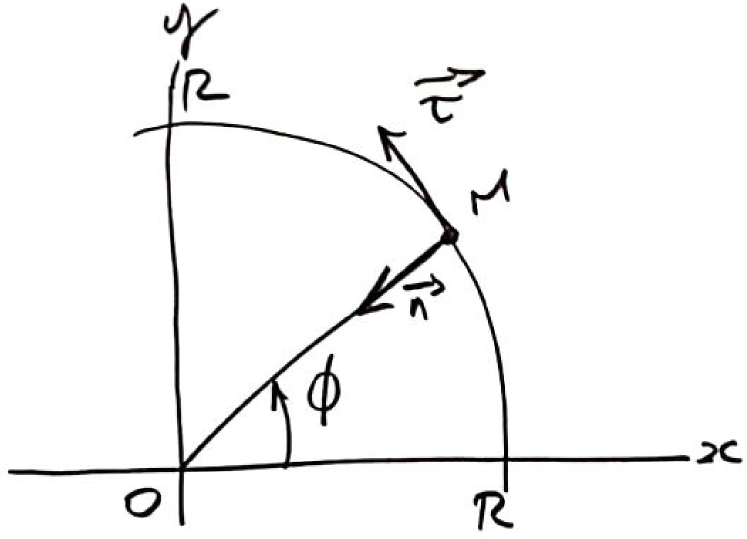
$z'(t) = gt + v_0$ cte

$z(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + z_0$ cte

$v(M) = gt + v_0$ non rect + var

et $\gamma = g$ unif varié

. circulaire



Suffit connaître $\widehat{Ox, OM} = \phi(t)$

et R

$\vec{OM} = (R\cos\phi, R\sin\phi)$

$\vec{\tau}$ unitaire de $\vec{V}$ ou $\vec{\tau} \perp \vec{OM}$

$= (-R\phi'\sin\phi, R\phi'\cos\phi)$

$\to \|\vec{v}\| = R|\phi'|$

et si $\phi'(t) \geq 0\ \forall t$: $v = R\phi'$ $\quad \vec{\tau} = (-\sin\phi, \cos\phi)$

$\vec{v} = R\phi'\vec{\tau}$ $\quad \vec{\Gamma} = R\phi''\vec{\tau} + R\phi'^2\vec{n}$

Comp ~~normale~~ tangentielle $\quad$ normale

MCU $\phi'' = 0$ $\quad \phi' = \omega$ vit angulaire

$\vec{v} = R\omega\vec{\tau}$

$\vec{\Gamma} = R\omega^2\vec{n}$

1) Intégrale d'une f en escalier → sur $[a, b]$

D : $f : \Omega \to \mathbb{R}$

prend val ctes sur int successifs,
ctes pouvant changer suivant les int

$\to \mathbb{Z}$

$\to E(x)$

eur $\leq$ à x

$0, 1[$

$-1, 0[$

$\to x$

1

(15)

SOUMAC

intégrales
primitives
aires

Somme Riemann

int successifs (en posant $x_0 = a$
et $x_n = b$)

$]x_0, x_1[,]x_1, x_2[, \dots,]x_i, x_{i+1}[, \dots,]x_{n-1}, x_n[$

tq sur chacun f a une val cte

Soient $k_0, k_1, \dots, k_i, \dots k_{n-1}$ les valeurs

pour f et $[a, b]$ donnés on a

par $\boxed{\sum_{i=0}^{i=n-1} (x_{i+1} - x_i) \times k_i}$

ou $(x_1 - x_0) k_0 + (x_2 - x_1) k_1 + \dots + (x_n - x_{n-1}) k_{n-1}$

- intégrale de f sur $[a, b]$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \times k_i}$$

ex

$$\int_{-1}^{+3} E(x)\,dx = [0 - (-1)](-1) + [1 - 0](0) + [2 - 1](1) + (3 - 2)(2) = 2$$

1) Intégrale d'une f en escalier → sur $[a,b]$

D : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

prend val ctes sur int successifs,

ctes pouvant changer suivant les int

ex

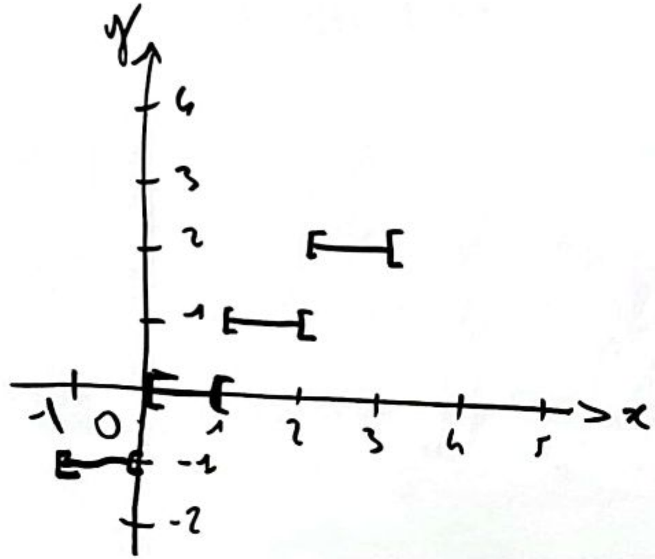
1 fn repartition V.A.

2 partie entière $E : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ x \longrightarrow E(x) \end{array} \right.$

entier immédiatement $\leq$ à x

$x = 0{,}37 \quad E(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1[$

$-0{,}42 \quad = -1$ —— $[1,0[$



Somme Riemam

int successifs (en posant $x_0 = a$ et $x_n = b$)

$]x_0, x_1[,]x_1, x_2[, \dots,]x_i, x_{i+1}[, \dots,]x_{n-1}, x_n[$

tq sur chacun f a une val cte

Soient $k_0, k_1, \dots, k_i, \dots k_{n-1}$ les valeurs

pour f et $[a,b]$ donnés est def par

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} (x_{i+1} - x_i) \times k_i$$

ou $(x_1 - x_0)k_0 + (x_2 - x_1)k_1 + \dots + (x_n - x_{n-1})k_{n-1}$

• intégrale de f sur $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \times k_i$$

ex $\displaystyle\int_{-1}^{+3} E(x)\,dx = [0-(-1)](-1) + [1-0](0) + [2-1](1) + [3-2](2) = 2$

$\int_a^b f(x)\,dx$ représente la somme
des aires **algébriques**
des rectangles successifs
"base" $(x_{i+1}-x_i)$
"hauteur" k_i

· Propriétés (notion allégée)

Si $f \geq 0$ sauf en un nombre fini de points de $[a,b]$,
$$\int_a^b f \geq 0$$

linéarité $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

et $\int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f$ pour λ réel

Relation de Chasles
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

en particulier $\int_b^a f = -\int_a^b f$

2) Primitives d'une f continue

D

Si f est cont sur int I,
elle est la dér sur I d'une f F,
appelée primitive de f (sur I)

F primitive de $f \iff F' = f$ (sur I)

ex $f(x) = 2x$ est dérivée de $F(x) = x^2+3$ sur $\mathbb{R}$

donc

$F(x) = x^2+3$ est primitive de $f(x) = 2x$

$\uparrow$: Si $F(x)$ a prim de $f(x)$
$F(x)+C$ aussi ou :
Si est prim de f, F+cte est prim.

Not^{n}: ensemble des primitives de f (obtenue)

$\int f(x)\,dx$

F prim de f $\quad \int f(x)\,dx = F(x)+C$

Pr D Si F est prim de f, on peut écrire

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C \iff F'(x) = f(x)$$

Prim usuelles

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\sin x$	$-\cos x$
$1+\tan^2(x)$ ou $\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
1	-

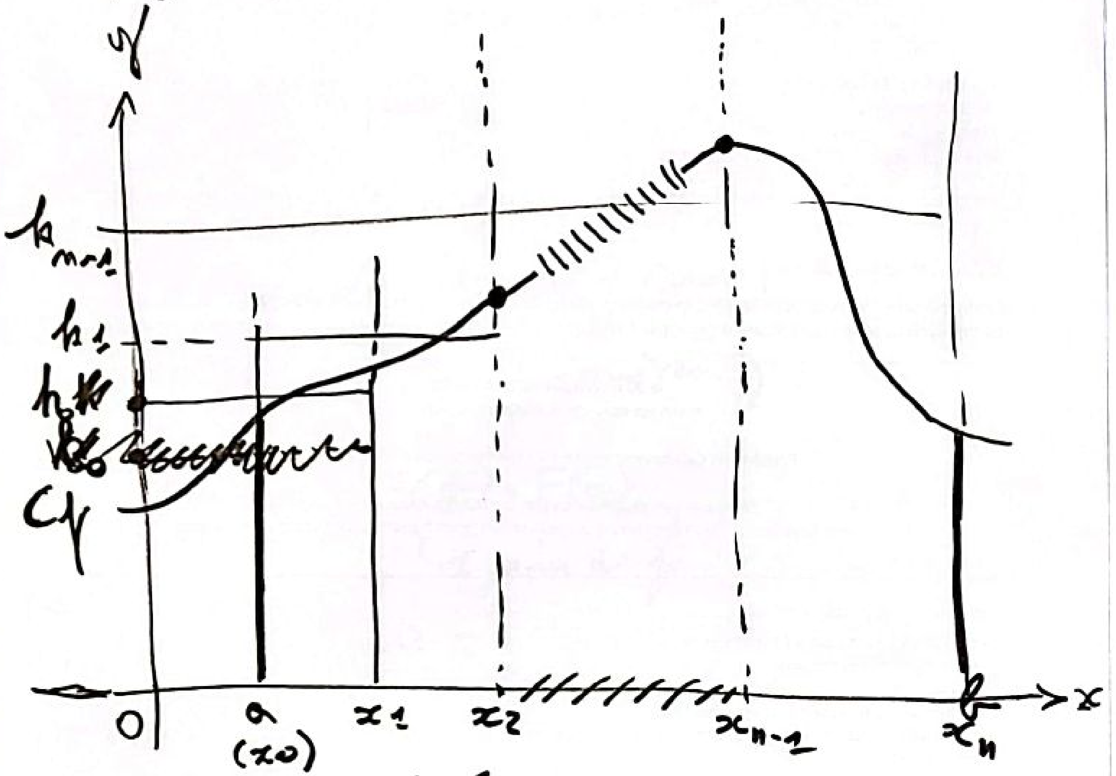
cte	
K	$Kx+C$
$\forall \alpha > 0$ x^α	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$
$\alpha \neq 1$ $\frac{1}{x^\alpha}$	$\frac{-1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}$
$x>0$ ou $x<0$ $1/x$	$\log\lvert x\rvert$
e^x	$e^x + C$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C \text{ etc...}$$

3) intégrale 1 f cont, Calcul Aires

• Pb calcul 1 aire



[a, b] cont ~~cha~~ signe

$D = \{ M(x,y) / a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x) \}$

idée de la méthode

· partage [a, b] en n intervalles
remplace f par ~~un~~ f escalier
"bien choisie" → somme de Riémann
→ valeur approchée aire
· ensuite améliore résultat → val exacte

→ Applicaⁿ

Sur chaque int $]x_i, x_{i+1}[$,
on prend un cte k_i ~~…~~ une des valeurs de $f(x)$ pr $x \in$

une valeur approchée de l'aire
est $\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) k_i$

· une val par excès est certainement obtenue si on prend pr chaque k_i la val maximale de $f(x)$ sur $]x_i; x_{i+1}[$

· intuitivement, si on ↗ indéfiniment nb n, en ↘ même ts segments $[x_i; x_{i+1}]$, les val par excès et par défaut correspondantes encadrent aire de + en + près, à la lim ~~qu~~ si $n \to \infty$ et chaque $(x_{i+1} - x_i) \to 0$ on obtient Aire exacte cherchée.

Donc aire D

$\int_a^b f(x)\,dx$ aire exacte domaine D,

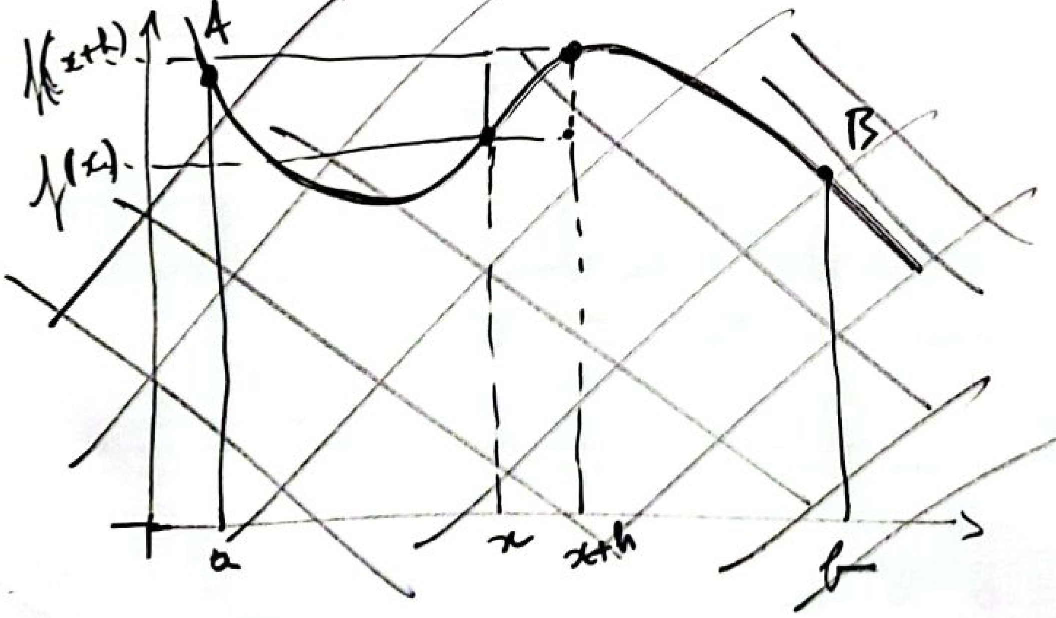
on dit que

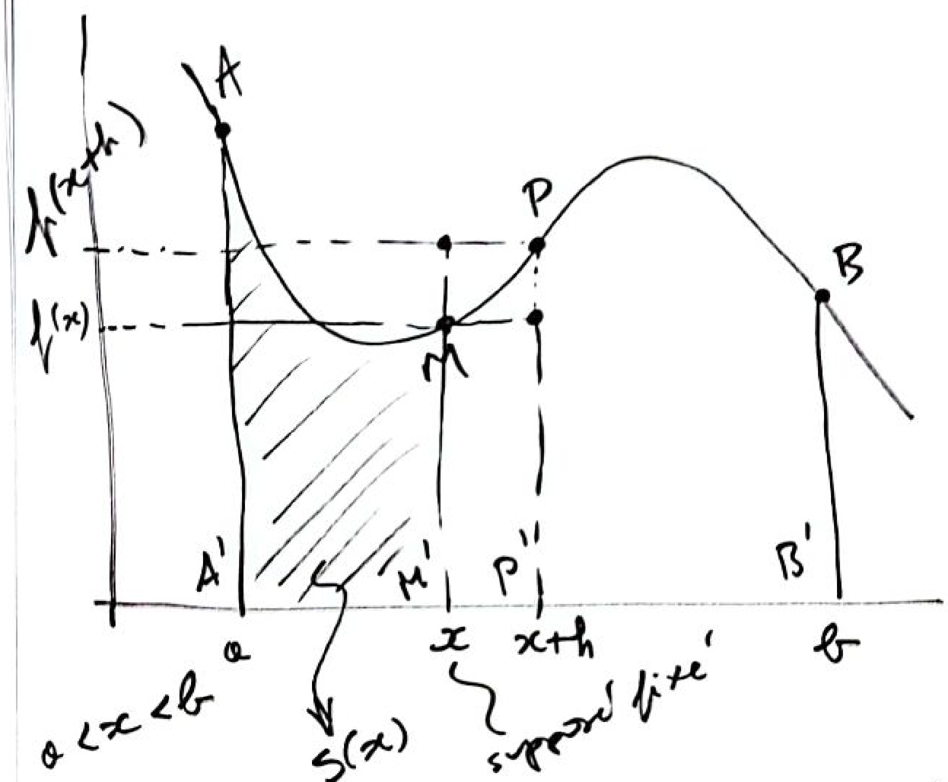
= intégrale définie de f sur $[a, b]$

on cherche le moyen + pratique que le précédent ↳ T suivant

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{F(b) - F(a)}_{F \text{ 1 prim de } f}$$

<u>Preuve succinte :</u>





- on cherche le nb dérivé de $S(x)$ au point x
- $S(x+h)$ est limité par AA', PP'', PP' et Cf,

donc $S(x+h) - S(x)$ est limité par

M'M, M'P, P'P et l'arc PM de Cf

- Si h est "petit" cette aire "petite" est encadrée par $\overline{M'P'} \times \overline{M'M}$ et $\overline{M'P'} \times \overline{P'P}$ (termes de sommes de Riemann) donc par $h \times f(x)$ et $h \times f(x+h)$;

Donc $\frac{S(x+h)-S(x)}{h}$ est encadré

par $f(x)$ et $f(x+h)$;

qd $h \to 0$ on obtient $S'(x)$ encadré

par $f(x)$ et $f(x)$

d'où $S'(x) = f(x)$, il n'y a plus d'approx

→ d'où S est une primitive de f

1 Si $x=a$ $S(a)=0$,

Si $x=b$ $S(b) = \int_a^b f(x)\,dx$ qté cherchée

2 Soit $F(x)$ une autre primitive

$F(x) = S(x)+C$ alors

$F(b)-F(a)$ donne

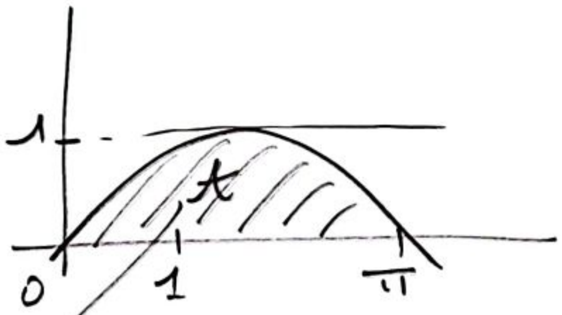
$$(S(b)+C)-(\underbrace{S(a)}_{0}+C) = S(b)$$

3 T démontré

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

(chacun vaut $S(b)$)

ex : $f(x) = \sin x$



ne change pas de signe

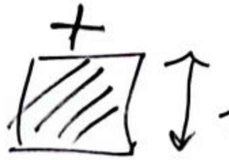
$\int_0^{\pi} \sin x\,dx$; une prim est $-\cos x$,

d'où

$$A = [-\cos \pi] - [-\cos 0] = (+1) - (-1) = 2$$

Rem

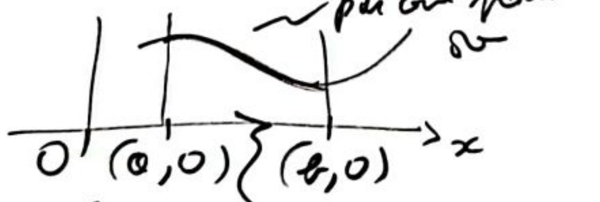
· unité d'aire



1 RON ou fig ↔ ent repère

· Signe de $\int_a^b f(x)\,dx$:

étude ≠ cas de fig où f garde le m̂ signe ou où on intervertit les rôles de a et b donne la règle pratique



si 1 sens + $\int$ ⊕ve

− ⊖ve

Prolongées à $\int_a^b f(x)\,dx$ si f est en escalier, se généralisant au cas f cont, en particulier linéarité

4) Calcul de primitives

Sauf usuelles

→ 2 methodes d'intégration

- par parties

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

preuve succinte:

$(uv)' = u'v + uv'$ fournit

$uv = \int u'v\,dx + \int uv'\,dx$

not dif $u'dx = du$ et $v'dx = dv$

donnent le résultat

Règle décomposer $f(x)dx$ en $u\,dv$ de manière que: v soit facile à obtenir, $-\int v\,du$ aussi.

Ex: $\int \log x\,dx$;

$u = \log x$, $dv = dx$ donnent $du = \frac{dx}{x}$ $v = x$

$\to = (\log x)x - \int x \frac{dx}{x} = x\log x - x + C$

- par chgt de variable

La formule $x = \phi(t) \Rightarrow dx = \phi'(t)\,dt$ introduite dans $\int f(x)\,dx$ donne

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int f \circ \phi(t) \times \phi'(t)\,dt}$$

reflexes $f(x)dx$ chercher une dif interessante qui pourrait le rendre apte à adapter la formule précédente.

ex:

$\int \sin^3 x \cos x\,dx$, or le dif de $\sin x$

on pose $\sin x = t \to \cos x\,dx = dt$

il vient $\int t^3 dt \to \frac{t^4}{4} \to = \frac{\sin^4 x}{4} + C$

. Attention au mot chgt var se presente sous la forme $t = \phi^{-1}(x)$ et non pas $x = \phi(t)$

donc si on appliquent à $\int_a^b f(x)dx$, ϕ doit être bijective sur $[a, b]$

5) COMPLÉMENTS

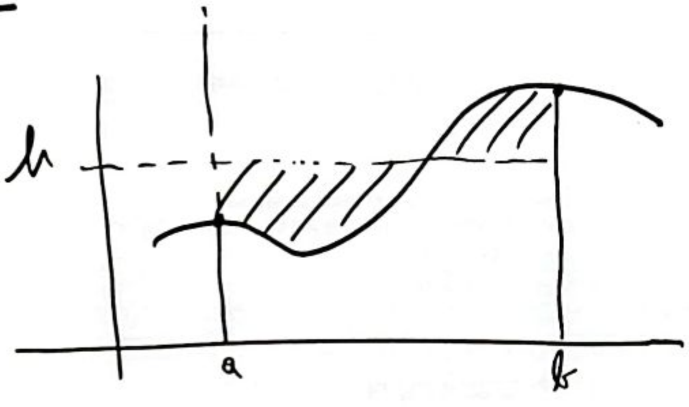
• Valeur moy de f sur [a, b] :

$$h = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

. ex $[0, 2\pi]$ $f(x) = \sin x$

$$h = \frac{1}{2\pi}\left[-\cos 2\pi + \cos 0\right] = 0$$

. Graphiqt



$$h(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

val sur $]a, b[$ de la f en escalier équivalente réalisant mêmes aires

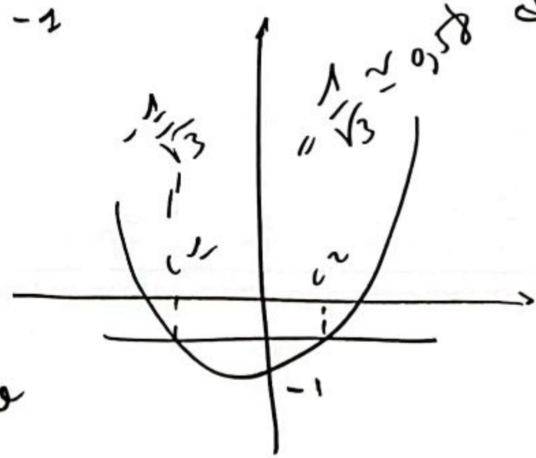
• Th de la moy :

Si f cont sur [a, b],
il existe au moins un pt c de
$]a, b[$ tq $f(c) = h$ (val moy)

ex : sur $[-1, +1]$ si $f(x) = x^2 - 1$

on obtient

$$h = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}(x^2-1)\,dx \qquad h = -\frac{2}{3},\ x^2 - 1 = -\frac{2}{3} \text{ donc } x^2 = \frac{1}{3}$$



val efficace

1) D, premières P

- possible def $\int \frac{dx}{x}$ par formules type alg,

on a créé ~~#~~ 1 fonction particulière

def 1 : $t \to 1/t$ qui s'annule

. $\ln x' = \frac{1}{x}$

$t = x$

(16)

LOGARITHME NÉPÉRIEN

SOUMIAC

P

- Si $x = 1$, par D $\ln 1 = 0$
- règle signes des int

$$\begin{cases} \ln x > 0 \text{ pour } x > 1 \\ \quad < 0 \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

- Par dér^n f_s composées

$f(x) = \ln |x|$

$f'(x) = \frac{1}{x}$ si $x > 0$

$= \frac{-1}{-x}$ si $x < 0$ d'où

$f(x) = \ln|x| \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

1) D, première R

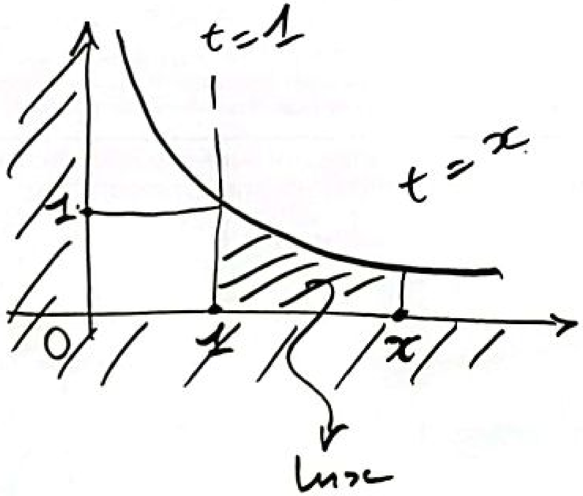
- possible déf $\int \frac{dx}{x}$ par formules type alg,

on a créé ~~#~~ 1 primi particulière de la $f : t \to 1/t$ qui s'annule pr $t = 1$

D $\ln x$

$$\boxed{\text{pr } x > 0 : \ln x = \int_1^x \frac{dt}{dt} \iff \ln x' = \frac{1}{x}}$$

$t > 0$



P

- Si $x = 1$, par D $\ln 1 = 0$
- règle signes des int

$\ln x > 0$ pr $x > 1$

< 0 $0 < x < 1$

- Par dérⁿ f_s composées

$f(x) = \ln |x|$

$f'(x) = \frac{1}{x}$ si $x > 0$

$= \frac{-1}{-x}$ si $x < 0$ d'où

$f(x) = \ln|x| \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

2) f Ln

intro grâce aux cours permet retenir plupart résultats suivants

. $f / \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow \ln x$

D_f $x > 0$ à initiale

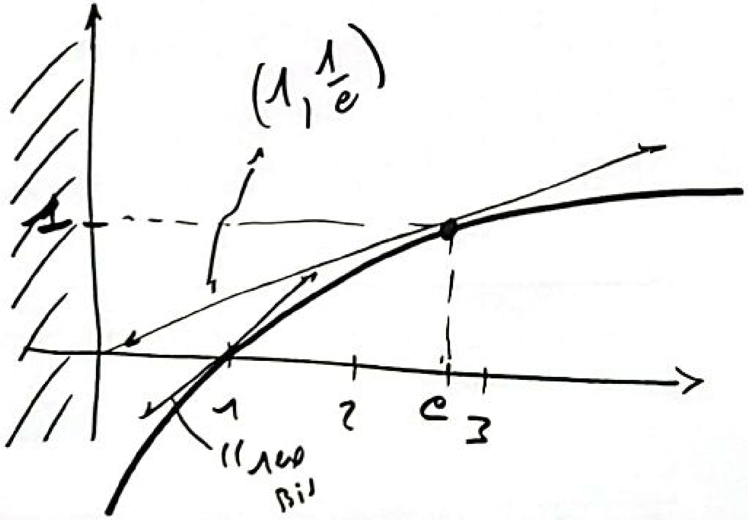
val lim

qd $x \to 0^+$ $\ln x < 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} (\ln x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x) = +\infty$

dér > 0 $\frac{1}{x}$ sur $x > 0$ $\to \nearrow$

val usuelles $\ln 1 = 0$



Si restreint

$\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$

bij $-$ cont $\nearrow$

③ Poliverses

. limites

. qd $x \to 0^+$, $\ln x \to -\infty$

mais $x \ln x \to 0^-$

or $x^\alpha \ln x \to 0^-$ (α positif quelconque)

. $+\infty$ $+\infty$

mais $\frac{\ln x}{x} \to 0^+$

$\frac{\ln x}{x^\alpha} \to 0^+$

qd $x \to 0$ on peut écrire $\ln(1+x) \simeq x$

ou $\frac{\ln(1+x)}{x} \to 1$

. Ln d'un produit

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$ a et b positifs

preuve succinte :
par dér f composée
$(\ln u)' = \frac{u'}{u} \rightarrow \ln(ax)' = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}$

$\Downarrow$

$\ln(ax) = \ln x + C$

si $x = 1$: $\ln a = 0 + C$

$\rightarrow$ d'où $C = \ln a$

$\ln a^2 = 2 \ln a$

$\ln \frac{1}{b} = -\ln b$

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

$\ln(a^{\alpha}) = \alpha \ln a$ quelconque

(4) EX Résoudre $\ln(x+1) + \ln(x-2) = 0$

mét : prévoir dom de solutions, calculer ensuite

$\ln(x+1)$ nécessite $x+1 > 0$

$x > -1$

...

$x > 2$ $\leftarrow$ finalement

$\ln[(x+1)(x-2)] = \ln(x^2 - x - 2)$

or $\ln 1 = 0$

$x^2 - x - 2 = 1$

$x^2 - x - 3 = 0$ $\Delta = 13$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$ val

> 0 dom $x < -1$ ou $x > 2$

$\rightarrow$ ~~les~~ les 2 valables !

CHAP 17

EXPON ET LOG

1. EXP de Base e

ln bij $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, admet une réc

sur

exp base e la bij réc.

tang pour x = 0

(x) ou e^x

$y = x$

e_3

$]-\infty, +\infty[$

17

SOURIAC

EXPONENTIELLES

LOGARITHMES

val limites

qd $x \longrightarrow -\infty$, $e^x \longrightarrow 0$

$+\infty$ $\quad$ $+\infty$

$\nearrow$

$\underline{e^0 = 1}$ car pt sur Oy

$e^1 = e$ $(1, e)$

P diverses

- Equivalence

$\forall y > 0$, $\underline{y = e^x \Longleftrightarrow x = \ln y}$

. dérivée

car $x = \ln y$ $\quad$ car $\neq 0$

$1 = \frac{y'}{y}$ ou $y' = y$ $\to$ $\underline{f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x}$

par ra suite $f^{(n)} e^x = e^x$ or $\int e^x dx = e^x + C$

. lim

qd $x \longrightarrow -\infty$, $e^x \to 0^+$ mais $x e^x \to 0^-$

et $x^\alpha e^x \to 0$

$+\infty$ $\quad$ $+\infty$ $\quad$ $\frac{e^x}{x} \to +\infty$

$\frac{e^x}{x^\alpha} \to +\infty$

CHAP 17

EXPON ET LOG

① EXP de Base e

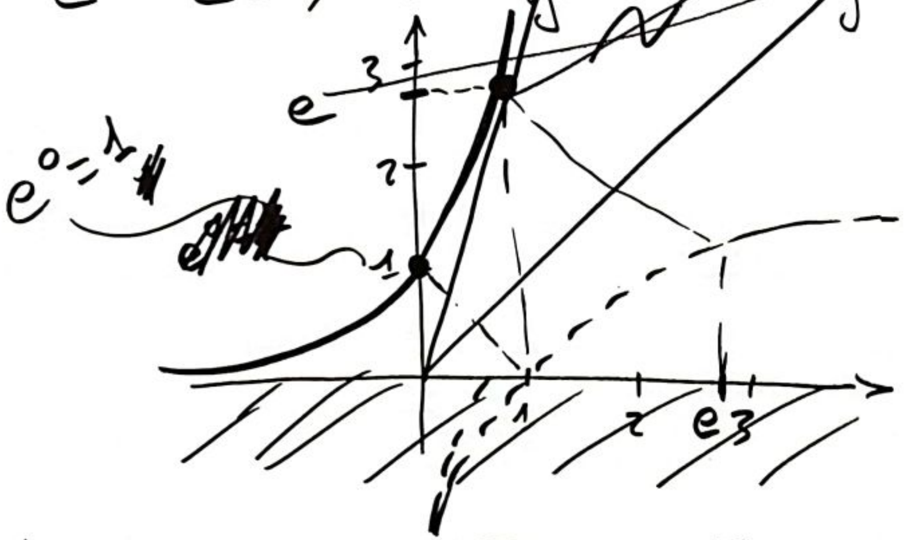
ln bij $\mathbb{R}_+^+ \xrightarrow[\text{sur}]{} \mathbb{R}$, admet une réc

$\Leftrightarrow$ exp base e la bij réc.

tang pour x = 0

$$\exp : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \longmapsto \exp(x) \text{ ou } e^x \end{array} \right.$$

e^x $e = 2{,}71828$



f exp base e $\mathcal{D}_f$ $\mathbb{R}$ $]-\infty, +\infty[$

p : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0}$

vel limites

qd $x \longrightarrow -\infty$, $e^x \longrightarrow 0$

$+\infty$ $\qquad$ $+\infty$

$\underline{e^0 = 1}$ car pt sur Oy

$e^1 = e$ $(1, e)$

P diverses

- Equivalence

si $y > 0$, $\boxed{y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y}$

. dérivée

car $x = \ln y$ Com f o

$1 = \frac{y'}{y}$, ou $y' = y$ $\rightarrow$ $\boxed{f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x}$

par 2 suite $f^{(n)} e^x = e^x$ or $\int e^x dx = e^x + C$

. lim qd $x \longrightarrow -\infty$, $e^x \rightarrow 0^+$ mais $x e^x \rightarrow 0^-$

et $x^\alpha e^x \rightarrow 0$ (α)

$+\infty$ $\qquad$ $+\infty$ $\qquad$ $\frac{e^x}{x} \rightarrow +\infty$

$\frac{e^x}{x^\alpha} \rightarrow +\infty$

$e^{\varepsilon} = 1+\varepsilon$ si ε "pt" et $e^0 = 1$
à la li

exp +

$$\boxed{e^{a+b} = e^a \times e^b}$$

preuve suc:

aut for $(e^a)^\alpha = e^{\alpha a}$

$e^{1/2} = \sqrt{e}$ $\quad e^{-1} = \frac{1}{e}$ $\quad e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ ...

② LOG DIVERS

aut log que ln → aut exp
par reciprocité

· Base

Base d'un log est le nb a tq $\boxed{\log a = 1}$

base Ln est e $\underline{Ln\, e = 1}$

· $\underline{\text{log base } a}$

nb a étant donné $(a>0,\ a \neq 1)$

$$\boxed{\log_a : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow \log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a} \end{array} \right.}$$

P

$\log_a(1) = 0$ puisque $\log_a(1) = \frac{\cancel{\ln 1} \to 0}{\ln a}$

suffit de connaître ln p log a car
le produit de $Ln \times \frac{1}{Ln\, a}$

$\log_a x$ et ln sont proportionnelles

dér $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$

· ↗ si $\ln a > 0$ ou $a > 1$ } cf lni
déc ↘ $0 < a < 1$

log décimal

$\log_{10} \to \log$

$\frac{1}{Ln 10} = M \simeq 0{,}434$ $\quad \log x = \frac{\ln x}{\ln 10} = M \ln x$

tables → val approchées
de $\log x$ ~~x~~ $1 \longrightarrow 10000$
1 par 1

$\log(ab) = \log a + \log b$

$\log(a^\alpha) = \alpha \log a$
val de α ...

· pr effectuer rapidement calculs

P (accès à la base 10 de log
en numération usuelle)

- $\log 10 = 1 \Rightarrow \log (10)^n = n$
et $\log(10^{-n}) = -n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

- tt nb positif x étant encadré par 2
puis successives de 10, $\log x$ est
encadré par exposants puisque log (obtenu)
est une f ↗

- ex $x = 97{,}233$: $x \in [10^1; 10^2] \Rightarrow \log x$ $1{,}1$
$0{,}037$ $10^{-2}\ 10^{-1}$ $1+0,$
$-2+0$ ...

Conventions
- l'entier immédiatement $\leq$ à $\log x$
est nommé caractéristique de $\log x$
entier relatif

- val déc à rajouter pr obtenir $\log x$
est nommée mantisse de $\log x$
+ ou nulle < 1

- tables que
propres moyens

$\log 97{,}233$ a pour caractéristique 1
on cherche 9723,3 ds table
on fait approx entre 9723 et 9724
$\rightarrow 98781$; $\log 97{,}233 = 1{,}98781$

$\operatorname{Co}\log = -\log$ ...

③ EXP diverses
base a réc $\log_a$ $(a > 0, a \neq 1)$

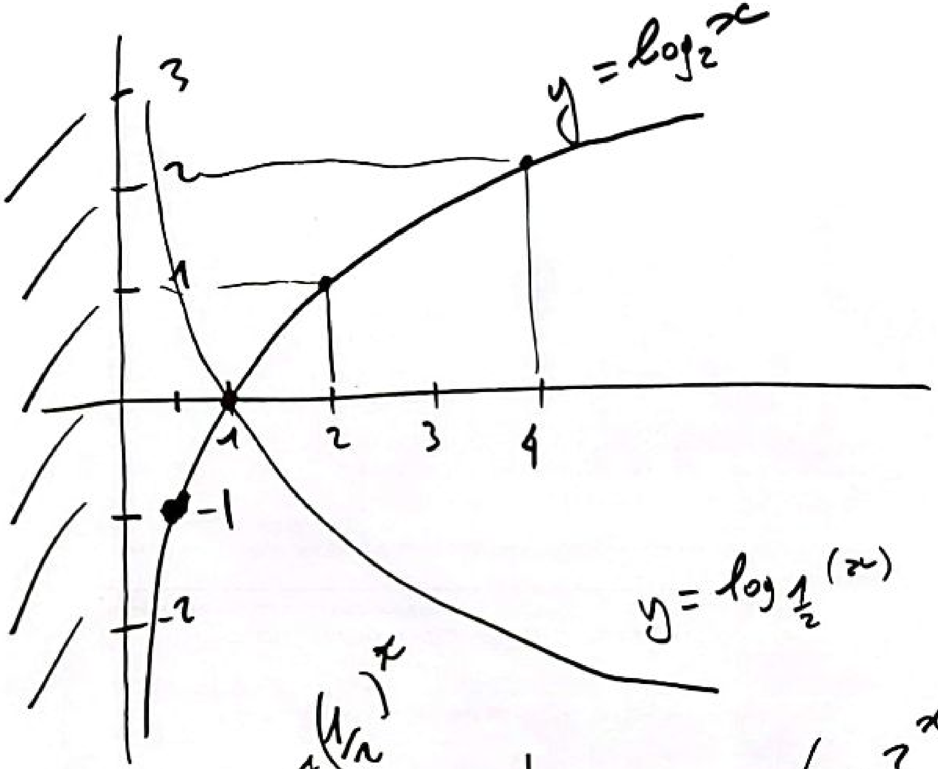
$$\exp_a : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \longrightarrow \exp_a(x) = a^x \end{array} \right.$$

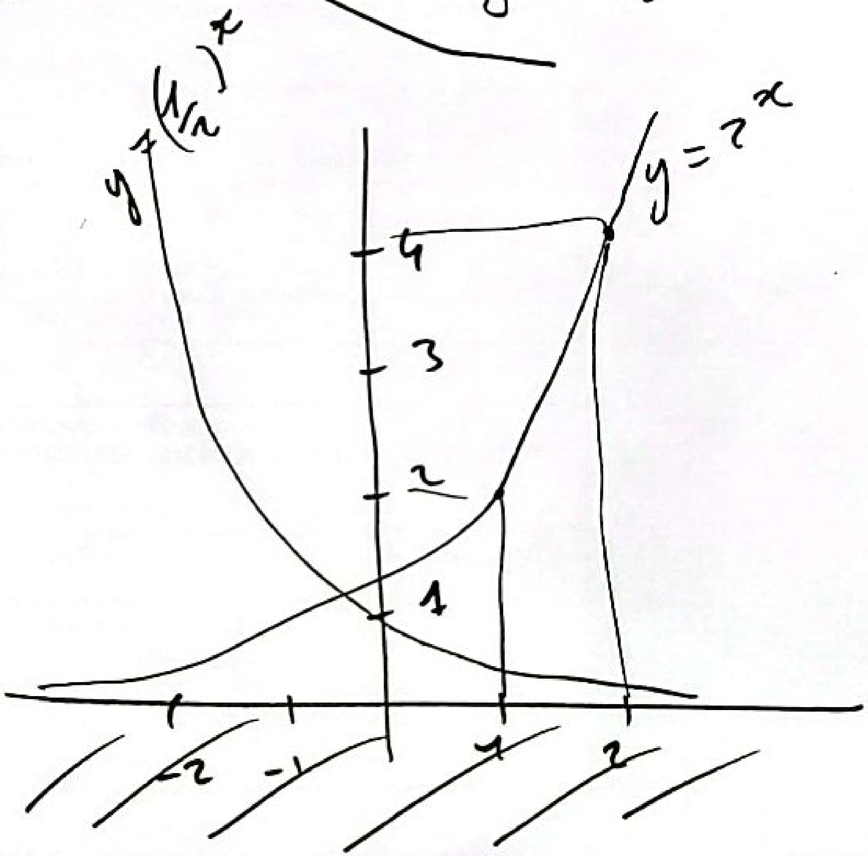
$\exp(1) = a$

$y > 0$ $y = a^x \Longleftrightarrow x = \log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}$

$y = a^x \Longleftrightarrow y = e^{x \ln a}$

dé $= (\ln a)\, a^x$


y = log2 x
y = log 1/2 (x)
3
2
1
-1
-2
1
2
3
4


y = (1/2)^x
y = 2^x
4
3
2
1
-2
-1
1
2