~~[illegible]~~

CHAP 10 PROBAS AXIOMES

① INTRO

- ~~méthode~~ résultat ms "mathematiser choses"
- langage courant pile face

20 pages
3 chap

x , il ne
un face
ligé

ts :

léatoires"

le fini

ultats

SORIAC CHAP 10

PROBAS, AXIOMES

ne se

expérience

② DÉF

Pr une exper donnée (vraie ou imaginée) on appelle :

e = événement

- e élémentaire ou cas possible

chacun des résultats qui pourrait être observés

- e favorables ou cas favorable

chacun des résultats que l'on souhaite étudier ou obtenir

. ex jet dé à 1 tour

il y a 6 cas possibles (obtention 1 ... 6)

- si l'on veut étudier l'obtention d'un résultat impair,

il y a 3 cas favorables (obtention du 1, ou 3, ou 5)

- univers, pr une exp donnée,

= Ens noté Ω des e_s

~~[illegible]~~

CHAP 10 PROBAS AXIOMES

① INTRO

- ~~mesure~~ resultat ms "mathematiser choses"
  - langage courant pile face "une chance sur deux"
  - sait bien qu'en jouant 2x, il ne sort pas obligt 1 pile et un face malgré
- ~~Theorie~~ theorie probas buts :

  preciser + chiffrer notions relatives aux phen aléatoires" (soumis au hasard)
  - resultats possibles sont en nbr fini → evenements
  - ~~trouver~~ decisivement résultats theoriques, ~~impossibles~~ resultat "1 chance sur 10" ne se produira pas m̃ en 500 experiences

② DÉF

Pr une exper donnée (vraie ou imaginée) on appelle :

e = événement

- e élémentaire ou cas possible

  chacun des résultats qui pourrait être observés
- e favorables ou cas favorable

  chacun des résultats que l'on souhaite étudier ou obtenir
- ex jet dé à jouer

  il y a 6 cas possibles (obtention 1 ... 6)
  - si l'on veut étudier l'obtention d'un résultat impair, il y a 3 cas favorables (obtention du 1, du 3, du 5)
- univers, pr un exp donnée, = Ens noté Ω des e_{ℓ}

~~I [illegible]~~

. e "**tout court**" est une **partie** de Ω

- $\emptyset$ e impossible
- parties à 1 e = es élementaires
- autres parties sont des es
- partie **pleine** Ω = e **certain**

. **ens des es** $= \mathcal{P}(\Omega) \neq \Omega$!

*. ex jet dé,
si on symbolise chaque **cas possible** ("e élem")
par le nb correspondant, on a :
. $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$: univers
. $\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \dots, \{2,3,4,5,6\}, \Omega\}$
ens es
. $\{2\}$ e élem "obtention du 2"
. $\{1,3,5\}$ e "obtention nb impair"
. Ω univers = e "obtention d'un résultat"

★ Rem :
exclut tt "faux nb" tq
dé équilibré sur une arête
on pourrait convenir que situation est $\emptyset$
bien que $\emptyset$ n'ait pas elt.

♦ es **incompatibles** lorsque la réalisation de
l'un exclut celle de l'autre
e_1 et e_2 incomp $\Leftrightarrow e_1 \cap e_2 = \emptyset$

♦ — **équiprobables** qui ont des probas =

♦ — **indépendants** lorsq la réalisation de
l'un n'affecte pas la proba de l'autre

③ Not^{ns} usuelles

Soit Ω, $\mathcal{P}(\Omega)$

e_1, e_2 = es cas partés de Ω (ou elts $\mathcal{P}(\Omega)$)

on peut envisager d'autres es part suivants :

- $e_1 \cap e_2$ (et) e qui est réalisé ssi e_1 et e_2 sont réalisés "à la fois"

- $e_1 \cup e_2$ (ou) — —

soit e_1 seul | e_2 seul | soit avec $e_1 \cap e_2$

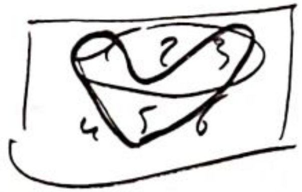
soit

- $\bar{e}$ contraire de e ou $\complement_\Omega e$ ou $\Omega - e$

ssi e n'est pas réalisé

- e_2/e_1 : e_2 sachant e_1 — réalisé en supposant que e_1 était réalisé

★ Ex jet dé



$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

on considère

$e_1 = \{1,3,5\}$ obtention nbr impair

$e_2 = \{1,2,3\}$ — "petit"

$e_1 \cap e_2 = \{1,3\}$ impair et petit

$e_1 \cup e_2 = \{1,2,3,5\}$ impair ou petit

$\bar{e}_1 = \{2,4,6\}$ "tout sf impair" donc pair

e_2/e_1 il s'agit de supposer e_1 réalisé, ds cette hyp on examine e_2

obt^n nbr $\underline{1^+}$ ds le cas où le nbr est impair

on dénombre 3 cas possibles (1,3,5) et 2 cas favorables (1,3)

tt se passe comme si l'univers était e_1

~~PATHOPHYSIOLOGY~~

4) PROBAS. AXIOMES

Notation

♦ est une app Prob P_r P

$$P(\Omega) \to [0,1]$$
$$e \to Prob(e)$$

qui doit vérifier les deux axiomes :

1. $P(\Omega) = 1$ le certain a sa proba 1
2. Si $e_1 \cap e_2 = \emptyset$,
   Alors ~~Prob~~ $P(e_1 \cup e_2) = P(e_1) + P(e_2)$

→ traduit notion "100 % de chances"

e_s incompatibles :

leur réunion a pour proba la somme des probas de chacun

~~car~~ ceux des "mesures"

Prob réalise une "mesure des chances"

★ Proba naturelle

En réalité une seule app traduit "raisonnablement" les notions intuitives, cette app° est déf par :

$$P(e) = \frac{\text{nb cas favorables à } e}{\text{possibles}}$$

★ Ex dé $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

. $P(1) = \frac{1}{6}$

$P(2) = 1/6$

⋮

$P(6) = 1/6$

on dit : 6 résultats d'un jet sont équiprobables

. $P(1 \text{ et } 2) = 0$ 1 et 2 incompatibles

"obtⁿ" exclut obtⁿ

. $P(1 \text{ ou } 2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ $\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\right)$

. $P(\Omega) = \frac{6}{6} = 1$ car il y a autant de CF_s que de CP_s

. $P(\emptyset) = 0$ car il n'y a aucun "CF_s à rien" une fois jeté il donnera ~~le~~ un résultat

~~REPRODUCTIVE~~

◇ P_s essentielles

- $P(e_1 \cup e_2) = P(e_1) + P(e_2) - P(e_1 \cap e_2)$ (ou ; et)

Comme pour Card, et pr tte "mesure"

- $P(\emptyset) = 0$ l'impossible a une P nulle
- $P(\bar{e}) = 1 - P(e)$
- $P(e_1 \cap e_2) = P(e_1) \times P(e_2/e_1)$
  $= P(e_2) \times P(e_1/e_2)$

- Sauf et $P(\Omega) = 1$
  tte valeur est strict^t comprise entre 0 et 1

- es indépendants : caractérisé

+ pratique: e_1 et e_2 indep $\iff \boxed{P(e_2/e_1) = P(e_2)}$

★ revient au m̂

$$\boxed{P(e_1 \cap e_2) = P(e_1) \times P(e_2)}$$

□ ~~indep~~ "indépendance est réflexive"
on peut échanger rôles e_1 et e_2
en dép → pas lien
. lorsq ~~...~~ e_1 et e_2 dépendants

(5) Compléments

◆ Soit Ω
$\mathcal{P}(\Omega)$

$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ = espace probabilisable

◆ Soit Prob : $\mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$
$e \mapsto Prob(e)$

et vérifiant axiomes

- $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), Prob)$: esp ~~...~~ probabilisé

prudence

□ "naturelle" ~~es~~ énoncé ent app "2° valable"

□ Cas général

Si l'on ~~ne~~ n'étudie qu'une certaine cat e_s relatif à Ω,

on ne s'intéresse qu'à certaines parties de Ω

mais que ces parties étudiées possède certaine P (~~sinon~~ il est impossible de le P^{er}), les propriétés de tribu

◆ un sous ens $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu, lorsque :

① $\Omega \in \mathcal{B}$

② $\forall e \in \mathcal{B} : \bar{e} \in \mathcal{B}$

③ $\forall e \in \mathcal{B}$
$\forall e' \in \mathcal{B} : e \cup e' \in \mathcal{B}$

◆ Un esp Prob-sable est un couple $(\Omega, \mathcal{B})$ $\mathcal{B}$ est une tribu de $\mathcal{P}(\Omega)$

$\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu "la + grde" possible

◆ Un esp Prob^{é} $= (\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{Prob})$ tq

① $\mathcal{B}$ est une tribu de $\mathcal{P}(\Omega)$

② $\mathrm{Prob} : \left| \begin{array}{l} \mathcal{B} \rightarrow [0, 1] \\ e \rightarrow \mathrm{Prob}(e) \end{array} \right.$

qui vérifie les 2 axiomes suivants :

$P(\Omega) = 1$

$e_1 \cap e_2 = \emptyset \Rightarrow P(e_1 \cup e_2) = P(e_1) + P(e_2)$

★ EX $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ jet dé

$\mathcal{B} = \{\emptyset, \underbrace{\{1,3,5\}}_{e_1}, \underbrace{\{2,4,6\}}_{e_2}, \Omega\}$ est une tribu

Prob déf sur $\mathcal{B}$ par

$P(\emptyset) = 1$

$P(e_1) = P(e_2) = \frac{1}{2}$

$P(\Omega) = 1$

peut dire qu'on a Prob^{é}, ce qui concerne les nbs pairs "en bloc" impairs —

analogie pair ou impair

CHAP 11 VA

1) INTRO

☐ symbolisé obt° 1 nb par ce nb, manière générale néc symboliser

... sinon

... Contexte

...entaires

... plus souvent

... certain nb

...l'on déf

... une app

... cette

SOMMAIRE CHAP 11

VARIABLES ALEATOIRES

◆ Ω étant donné

on appelle VA et ~~...~~ on note X,

une app déf de Ω ds $\mathbb{R}$,

permettant de traduire sans ambiguïté

les es en les remplaçant par des val num

$$X : \begin{vmatrix} \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ e \longrightarrow X(e) \end{vmatrix}$$

★ ex et abus cas

pile → P → 1

face → F → 0

$X : \Omega = \{P, F\} \longrightarrow \mathbb{R}$

déf par $\begin{cases} P \longrightarrow X(P) = 1 \\ F \longrightarrow X(F) = 0 \end{cases}$

. abus très fréquent $X = 1$ pr désigner P
$X = 0$ ——— F

. en toute rigueur on doit écrire

$$P = X^{-1}(1) \text{ et } F = X^{-1}(0)$$

ANGLAIS

CHAPITRE VA

1) INTRO

□ symboliser obt° 1 nb par ce nb, manière générale néc symboliser es par lettres ou nbs sinon on se perd ds périphrases complexes & incommodes

□ Prat

on déf "codage" de es élémentaires à l'aide de val numériques, le plus souvent ds $\mathbb{Z}$

★ on commet un certain abus, notamment celui où l'on déf un VA comme étant une app ainsi que celui où l'on confond cette app avec ses valeurs

◆ Ω étant donné

on appelle VA et on note X, tte app déf de Ω ds $\mathbb{R}$, permettant de décrire sans ambiguïté les es en les remplaçant par des val num

$$X : \begin{cases} \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ e \longrightarrow X(e) \end{cases}$$

★ ex et abus — codage

pile → P → 1

face → F → 0

$X : \Omega = \{P, F\} \longrightarrow \mathbb{R}$

déf par : $\begin{cases} P \longrightarrow X(P) = 1 \\ F \longrightarrow X(F) = 0 \end{cases}$

. abus très fréquent $X = 1$ pr désigner P, $X = 0$ ___ F

. en toute rigueur on doit écrire $P = X^{-1}(1)$ et $F = X^{-1}(0)$

ENGLISH

□ Prat, emploi VAs facilite étude
Probas proprement dites, à condition de "transposer" convenablement Prob

★ $P(X=1)=\frac{1}{2}$ puisque $P(P)=\frac{1}{2}$
0 — de $\overline{m}$

on pourra s'intéresser à $P(X=x)$
pr ≠ val de x, de même qu'à $P(X\leq x)$
etc...

② f_s ASSOCIÉES à une VA

□ Cont 2) pr décrire un aspect phénomène à l'aide VA X :

- Loi de Proba = distribution de P

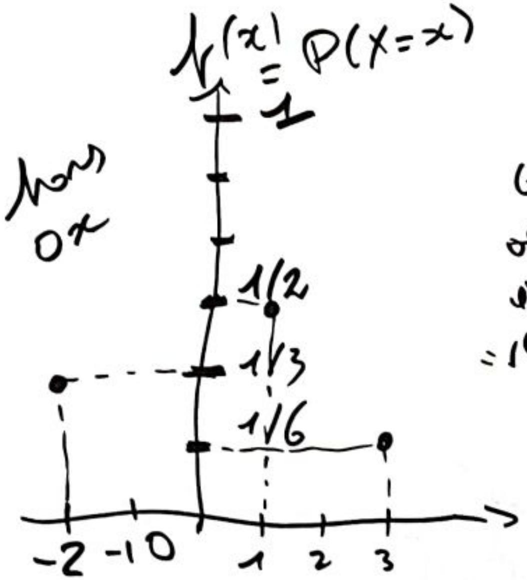
$$f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow f(x) = \text{[redacted]}\ P(X=x) \end{array} \right.$$

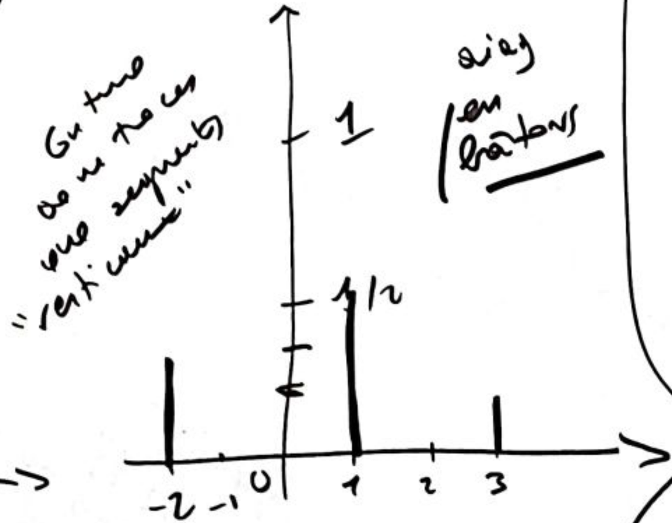
- de Répartition = cumulative

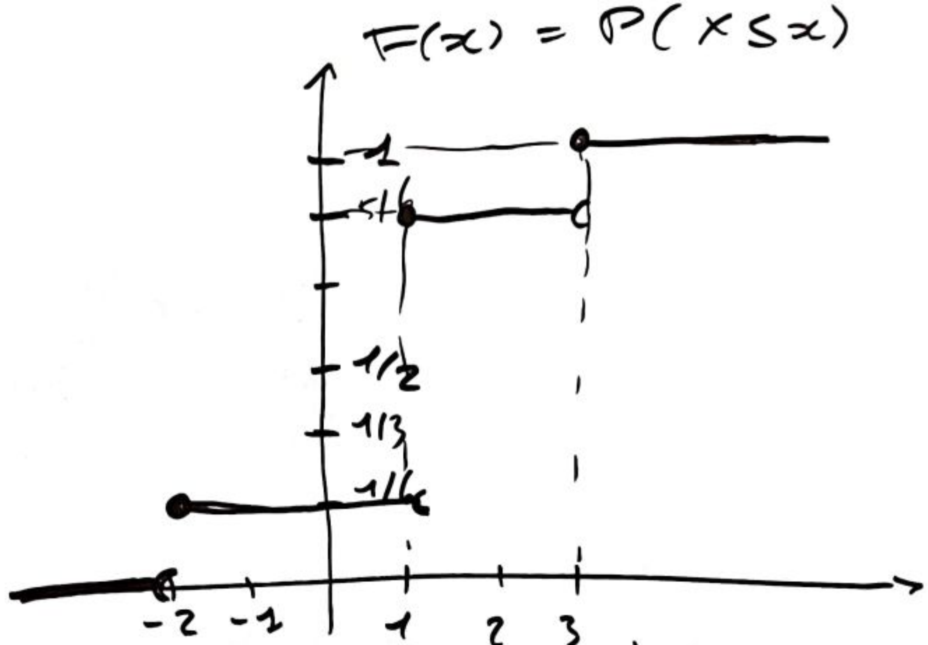
F $\quad F(x) = P(X\leq x)$

★ EX Soit univers 3 e_s élém représentés par
~~X=...~~ $X=-2 \quad X=1 \quad X=3$
avec P respective
$\frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{6} \quad \Sigma=1$

- Loi de proba distribution
$f(x)=P(X=x)$ s'étudie direct
. $x\notin\{-2,1,3\} \Rightarrow f(x)=0$ car $(X=x)$ impossible de P nulle
. $x=-2 \Rightarrow f(-2)=P(X=-2)=\frac{1}{3}$
$f(1)=\frac{1}{2}$
$f(3)=\frac{1}{6}$







"en escalier" Cbe cumulative

• f répartition $F(x) = P(X \le x)$ s'obtient directement

· pr x fixé tq $x < -2$
$X \le x$ signifie $X < -2$
e impossible d'où $F(x) = 0$

· ~~pr~~ pr $x = -2$, $X \le x$ se réduit à $X = -2$
d'où $F(2) = \frac{1}{3}$

· pr tt x fixé ds $[-2, 1[$
$X \le x$ se réduit à $X = -2$ d'où $F(x) = \frac{1}{3}$

· pr $x = 1$, $X \le x$ se réduit à $(X=-2) \cup (X=1)$
d'où $F(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 5/6$

etc...

★ Pour loi P f, val sont ds $[0, 1]$
or Σ valeurs $= 1$

F

$F(x) = 0$ pr $\forall x$ inférieur à la + pte val de x

$F(x) = 1$ $\geq$ + gde

en escalier, ↗

3) Val numériques associées à une VA

□ Gén^t utilise 3 pr résumer un phén à aide 1 X

□ Not^{ns} val X $x_1, x_2, \dots, x_n$

Prob respectives $f(x_1)\ f(x_2) \dots f(x_n)$

◆ Espérance math (ou moyenne)

$$m = E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} [x_i \times f(x_i)]$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} (x_i - m)^2 \times f(x_i) \quad 1)$$

◆ Variance de X

$$V(x) = \sum [x_i^2 \times f(x_i)] - [E(x)]^2 \quad 2)$$

◆ Ecart type = coef de dispersion

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$$

□ interprétat^n

. "moy" val de X qui résulterait d'une infinité d'expériences.

pas nec^t l'une des valeurs attribuées à X

. ~~#~~ pas simple

. "écart moyen entre la moyenne théorique $E(X)$ et celle qu'on pourrait observer en réalisant des exper.

★ reprenant $X \in \{-2, 1, 3\}$

avec Prob $\frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{6}$

$$E(x) = -2 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{6} = m = \frac{1}{3}$$

1) $V(x) = \left(-2 - \frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} + \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{2} + \left(3 - \frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{6}$

2) $= +4 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{2} + 9 \times \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{29}{9} \rightarrow \sigma(X) = \frac{\sqrt{29}}{3} = \frac{5,4}{3} \simeq 1,8$

4) opérations sur les VAs

◆ X et Y sont indépendantes lorsq
~~tt~~ e relatif à X est indépendant
de ——— Y

□ Ce qui signifie (∀ x et y)

$$P[(X=x)\cap(Y=y)] = P(X=x)\times P(Y=y)$$

□ Ce qui suit que indép
ce qui explique

◆ $Z = X+Y$ est la ~~…~~ VA qui prend
sa val ttes Σ possibles d'une val
de X et d'une val de Y,
avec la ~~proi~~ Prob produit des Prob
respectives des termes

de même $X-Y$ avec diff
"les ordres des $x_i - y_i$"
et la Prob : produit
des probas des termes

◆ $T = XY$
↳ ts les produits possibles

◆ $\alpha \neq 0$
$X' = \alpha X$ avec Prob inchangée

★ X Y supposés indép et donnés
avec tableaux

X:

val	-2	1	3
Prob	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Y:

0	2
1/2	1/2

• Somme : 2 tableaux

somme des valeurs

produits des probas respectives

Y \ X	-2	1	3
0			

Somme des val

Y \ X	-2	1	3
0	-2	1	3
2	0	3	5

Produits des probas

Y \ X	1/3	1/2	1/6
1/2	1/6	1/4	1/12
1/2	1/6	1/4	1/12

• 2 cas évidemment incompatibles

~~donc~~ on lui attribue donc la somme des probas de chaque cas

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1\times3}{4\times3}+\frac{1}{12}=\frac{3}{12}+\frac{1}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

÷4 soit

• $X+Y$

val	-2	0	1	3	5
p	1/6	1/6	1/4	1/3	1/12

• * X

0	0	0
-4	2	6

imbrin

$\Sigma = \frac{1}{2}$

XY

v	-4	0	2	6
p	1/6	1/2	1/4	1/12

◇ P

• E est linéaire

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$
$$E(\lambda X)=\lambda E(X)$$

• $E(XY)=E(X)E(Y)$ indep de X et Y

• V et σ ne sont pas lin

$$V(X\pm Y)=V(X)+V(Y)$$
$$V(\lambda X)=\lambda^2 V(X)$$

d'où $\sigma(\lambda X)=|\lambda|\sigma(X)$

CHAP 12 Lois et théorèmes des Probas

① Tirage de boules 2 sortes

URNE

N_1

N_2

$N = N_1 + N_2$

en n_1 et n_2

Proba d'ê tirée ...

...ules

SOURIAC CHAP 12

LOIS PROBAS
INEGALITÉS & THEOREMES

Rappels

C_n^p = de p élts pris parmi

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}$$

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

$n \geq p$

Ex course 7 partants

① nb listes arrivée $P_7 = 7! = 5040$

② "tiercé ds ordre" listes ordonnées de 3 1ers arrivés

$$A_7^3 = \frac{7!}{\underset{(7-3)}{4!}} = 5 \times 6 \times 7 = 210$$

③ paquets 3 en ~~ordre~~

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!\,(\underset{4}{7-3})!} = \frac{7!}{3!\,4!} = 35$$

CHAP 12 Lois et théorèmes de Probas

(1) Tirage de Boules 2 sortes

□

$N = N_1 + N_2$

$N_2 = N - N_1$

nb de boules tirées est n = décomposé en n_1 et n_2

★ sup chaque boule à la même Proba d'être tirée ...

◆ Sans remise ou exhaustif
on bien on tire en bloc n boules

on doit avoir

$n \leq N$

$n_1 \leq N_1$

$n_2 \leq N_2$

Rappels

C_n^p — de p elts pris parmi n

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}$$

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

$n \geq p$

Ex course 7 partants

(1) nb listes arrivées $P_7 = 7! = 5040$

(2) "tiercé dans ordre" listes ordonnées de 3 1ers arrivés

$$A_7^3 = \frac{7!}{\underset{(7-3)}{4!}} = 5 \times 6 \times 7 = 210$$

(3) paquets 3 en désordre ~~ordre~~

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!\,4!} = 35$$

Loi tirage sans remise

$$P(n_1, n_2) = \frac{C_{N_1}^{n_1} \times C_{N_2}^{n_2}}{C_N^n}$$

avec = Bernoullien

$$= C_N^{n_1} \left(\frac{N_1}{N}\right)^{n_1} \left(\frac{N_2}{N}\right)^{n_2}$$

on peut généraliser

2 Loi Binomiale

= exprimée en terme de VA

• Soit Ω, $e \in \mathcal{P}(\Omega)$

on pose $P(e) = p$

$\bar{e} = \Omega - e$

on a $P(\bar{e}) = q = 1 - p$

• on rééditer épreuve on répétée n fois, chaque fois mais on compte nb fois que e se réalise : soit X le nb

• on peut écrire

$$X \in \{0, 1, 2, \dots, k, \dots n\}$$

~~Loi Bin~~

Loi Bin : loi de proba de X ou $f(x) = P(X = x)$

• Si $x \notin \{0, 1, \dots, n\}$, on a $P(X = x) = 0$

• Si $k \in$ ______ on écrit $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

Loi épreuve répétée n fois

P $E(X) = np$

$V(X) = npq$

Preuve sur

espérance de e sur $1 \times p + 0 \times q = p$

sur en épreuve n fois $E(X) = np$

par lin

$1^2 \times p + 0^2 \times q - p^2 = p - p^2$

$= p(1 - p)$ ou pq

$V(X) = pq + pq + pq = npq$

(3) inégalité de Bienayme-Tchebychev

∀ pr tte variable X tq $E(X) = m$ et $\sqrt{V(X)} = \sigma$

on peut écrire pr tt réel $\lambda > 0$

$$\boxed{Prob(|X-m| > \lambda\sigma) < \frac{1}{\lambda^2}}$$

utile que si ~~*~~ $\lambda > 1$

et si on ne connait que m et σ

sans connaître la loi de Prob de X

sinon on trouverait exactement la proba

★ Soit X tq $E(X) = 4$ et $\sigma(X) = 0,5$

. Si on choisit $\lambda = 2$

on a $\lambda\sigma = 1 \longrightarrow$ ~~$P(|X-4|)$~~ $P(|X-4| > 1) < \frac{1}{4}$

. autrement dit P que écart ~~*~~ dépasse 1

est majorée par $\frac{1}{4}$ strictement

. on peut passer "au contraire"

P observer X ds $[3, 5]$

est au moins $= \frac{3}{4}$

☐ écart type ou coef de dispersion

justifiés ... σ

★ Si λ croît $\frac{1}{\lambda^2} \searrow$

majoration de Prob ↓ lors écart

intérêt ↗ :

observe pourtant de tels écarts

en réalité m̂ pr Prob faibles

(4) loi des grands nbs

☐ inégalité pr 1 gd nb épreuves répétées

☐ Données : Ω, $e \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(e) = p$

- succès obtention de e
- échec ——— $\bar{e} = \Omega - e$ $P = 1 - p = q$

☐ Considère n épreuves indép (comme pour loi bin)

- 1ère épreuve X_1 nb succès ($X_1 = 1$ ou 0)
- 2ème X_2 $X_2 =$ ———
- ainsi de suite $X_n = 1$ ou 0

nb succès à la $n$ième épreuve

◇ nb succès en n épreuves

$\to$ $X_1 + X_2 + \dots + X_n$

$\to$ la fréquence des succès en n épreuves

est $F = \dfrac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$

□ Si ind. (épreuves) résulte de ~~Cheby~~ l'inégalité de BT appliquée à VA F

• Calcul de $E(F)$

pour chaque X_i, $E(X_i) = 1 \times p + 0 \times q = p$

pour leur somme l'espérance $\to np$

pour F on a une homothétie $E(F) = \frac{1}{n} \times np = p$

de rapport $1/n$ $\to$ d'où

• Calcul de $V(X)$

V_i $\quad V(X_i) = 1^2 \times p + 0^2 \times q - p^2$

$= p^2 - p^2$

$= ~~pq~~\, p(1-p) = pq$

un Σ $\to$ Σ m sur npq

$V(F) = \frac{1}{n^2} \times n\, pq$

$= \frac{pq}{n}$ $\qquad \sigma(F) = \sqrt{\frac{pq}{n}}$

$\to$ pour F

$\text{Prob}\left(|F - p| > d\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) < \frac{1}{d^2}$

□ $\to$ not

$d = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \varepsilon \to d^2 = \varepsilon^2 \frac{n}{pq}$ or $\frac{1}{d^2} = \frac{pq}{n\varepsilon^2}$

$\to$ LGN = T Bernoulli

$\text{Prob}(|F - p| > \varepsilon) < \frac{pq}{n\varepsilon^2}$

★ ex pile face

succès

$p = \frac{1}{2} \to q = \frac{1}{2}$

Freq des succès et la prob du succès $\frac{1}{2}$

$\text{Prob}\left(|F - \frac{1}{2}| > \varepsilon\right) < \frac{1/4}{n\varepsilon^2}$ soit $\frac{1}{4n\varepsilon^2}$

Joue 100 fois majoration devient $\frac{1}{400\varepsilon^2}$

40 - 60 succès

F tq $0,4 \leq F \leq 0,6$ ou étant $|F - 0,5| \leq 0,1$

- Ds ce cond

LGN →

$$P(|F-0{,}5| > 0{,}1) < \frac{1}{400(0{,}1)^2} = \frac{1}{4}$$

- on conc, en posant au contraire que la P d'avoir 40-60 succès est au mois égale à 3/4

★ Rem dit pas croire qu'en réalité impossible obtenir 30 fois pile en jouant 100 fois ~~E~~ c'est peu prob, ms cela arrive parfois

(5) T BAYES

□ calcul Prob qu'un e A qui s'est produit ait été causé par un e e_1 relatif à $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), Prob)$

- on suit A, on ne suit pas e_1, on examine (e_1/A)
- on ~~cause~~ considère alors $\overline{e_1} = \Omega - e_1$

on a le T ..
= Gi de Prob d'une ~~cas~~ cause

chaque des urnes

$$P(e_1/A) = \frac{P(A/e_1)\,P(e_1)}{P(A/e_1)P(e_1) + Prob(A/\overline{e_1})\,P(\overline{e_1})}$$

★ EX

$U_2 \rightarrow \frac{42}{100}$

U_1

P tirer une boule blanche de U_1 $= \frac{98}{100}$

on cache les urnes

- tire au hasard une hasard → boule blanche

o urnes équiprobables $\frac{1}{2}$ chacune

on veut Prob pr que la boule ait été tirée de U_1

. Boule blanche tirée con, à A

U_1 à e_1

U_2 à $\overline{e_1}$

$$P(U_1/A) = \frac{98/100 \times 1/2}{98/100 \times \frac{1}{2} + \frac{42}{100} \times \frac{1}{2}} = \frac{7}{10}$$

disjoint 2 à 2 ou $\cup \Omega$

cas où e_1 e_2 partitionne Ω

$$P(e_i/A) = \frac{P(A/e_i)\,P(e_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A/e_k) \times P(e_k)}$$

Scanné avec CamScanner