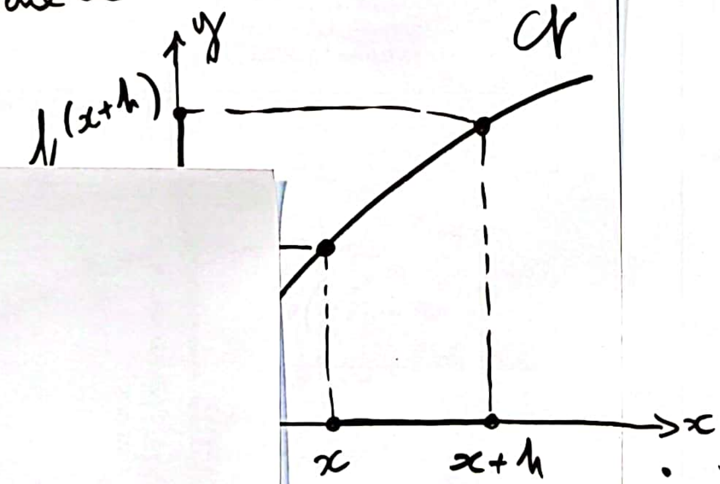
1 DEF GEN D_f C_f une cbe représentative

h paramètre "proche de 0"



...t une lim

...x, on appelle ...rivé de f ...int x

Ex: Si $f(x) = x^2$, au point 3 on a :

$$r_3(h) = \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h$$

d'où le nb dérivé : 6

. l'applicat° qui, à tout pt x où f est dérivable, fait correspondre le nb dérivé en ~~x~~ ce pt est notée f' ou $\frac{df}{dx}$ est appelée <u>dérivée de f</u>

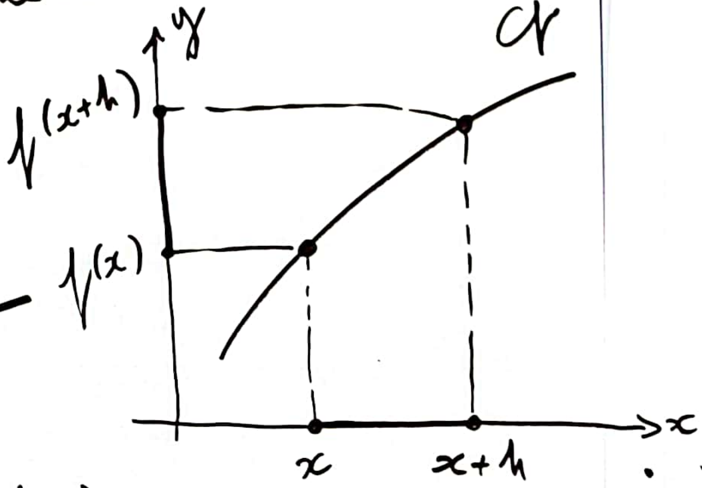
. l'Ens D' des x, tels que $f'(x)$ soit le nb dérivé de f au pt x, vérifie $D' \subset D_f$ (on peut avoir $=$) et on dit que f est dérivable sur D'

SOURÀC DERIVÉES

1 DEF GEN

D_f C_f : une cbe représentative

h paramètre "proche de 0"



f est dérivable au point x lorsque le rapport

$$r_x(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

admet une lim finie qd $h \longrightarrow 0$

lorsq f est dérivable au pt x, on appelle la lim de $r_x(h)$: nb dérivé de f au point x

Ex Si $f(x) = x^2$,

au point 3 on a :

$$r_3(h) = \frac{(3+h)^2-3^2}{h} = \frac{6h+h^2}{h} = 6+h$$

d'où le nb dérivé : 6

- l'applica° qui, à tout pt x où f est dérivable, fait correspondre le nb dérivé en ce pt est notée f' ou $\frac{df}{dx}$ est appelée dérivée de f

- l'Ens D' des x, tels que $f'(x)$ soit le nb dérivé de f au pt x, vérifie $D' \subset D_f$ (ou tout uni

et on dit que f est dérivable sur D'

- ex :

Si $f(x) = x^2$, au pt x supposé fixé on a :

$r_x(h) = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$, d'où $r_x(h) = \frac{2xh + h^2}{h}$

$= 2x + h$,

d'où $f'(x) = 2x$;

ds ce cas, $D' = D_f = \mathbb{R}$

- Pour un pt put, il peut n'exister pr $r_x(h)$ qu'une lim à droite ($h \to 0^+$) ds ce cas f est seulement dérivable à droite au pt x : de m̄ $h \to 0^-$

- Dérivable au pt x signifie dérivable à D et à G, avec lim =s pour $r_x(h)$

- Si f est dérivable au pt x, f est cont en ce pt

- ——— sur D', f est cont sur D'

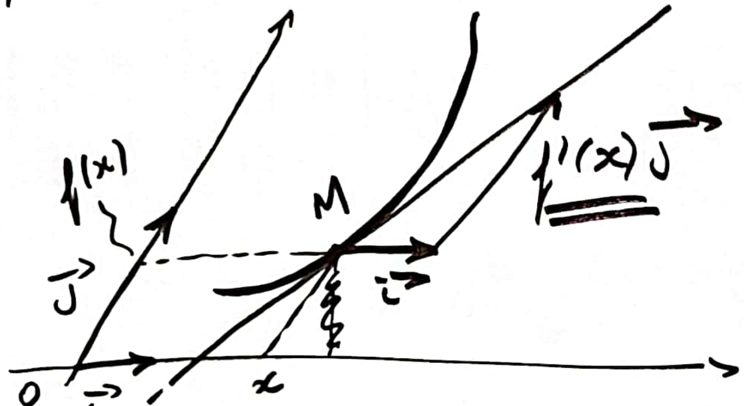
- une f cont n'est pas néc^T dérivable

2/ interprétation graphique des nbs dérivés

f $f'(x)$ en pt x fixé C_f RG

pt $(x, f(x))$ noté M ★

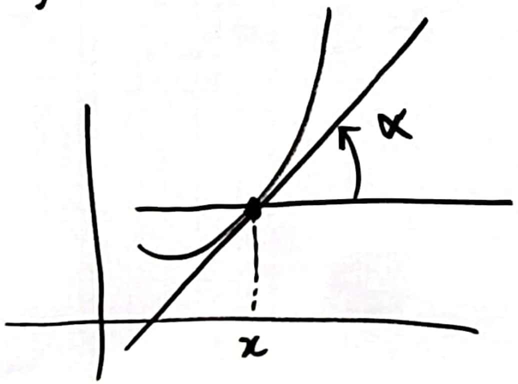
•



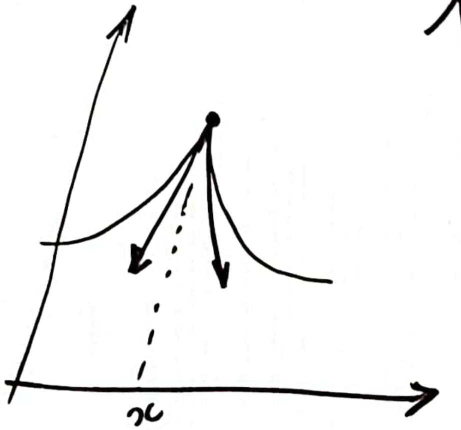
la tangente est dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix}1\\ f'(x)\end{pmatrix}$

cas RON

$\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$

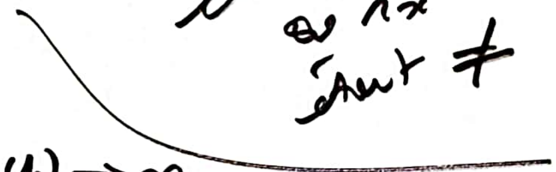


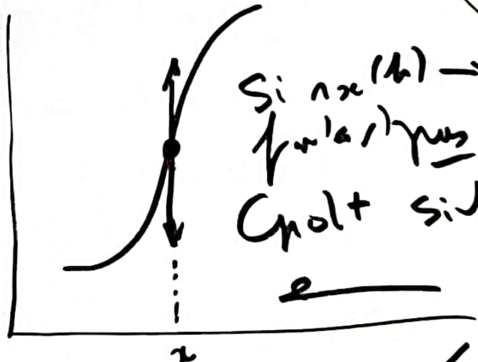
· cas divers



f est seulement dérivable à D au pt x ; C_f admet au pt M une 1/2 tan à D

lim comm. de $\tau_x(h)$ étant ≠

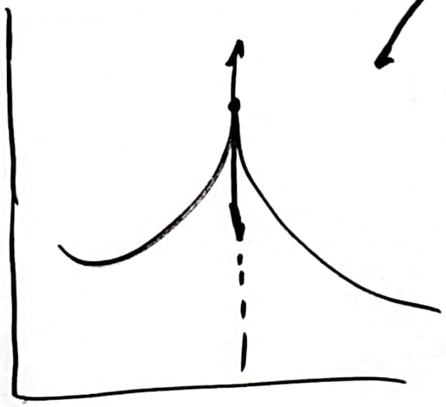




Si $\tau_x(h) \to \infty$, f n'a pas dérivable en pt x,

Cpol+ si f est cont en pt x il existe en pt M une tan // Oy

Alors dérivée infinie



3 Formules de dérivation

$f(x)$	$f'(x)$
cte k	0
$x^{n \in \mathbb{N}}$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x^{n \in \mathbb{N}}}$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$
x^{α} (exposant quelconque)	$\alpha x^{\alpha - 1}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$1 + \operatorname{tg}^2 x$ ou $\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{cotg} x$	$-(1 + \operatorname{cotg}^2 x)$ ou $-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\log\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$ $x \neq 0$
e^x	e^x

$f = u + v + w \Rightarrow f' = u' + v' + w'$

uv	$u'v + uv'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
u^{α} quelconque	$\alpha u^{\alpha - 1} u'$
λu	$\lambda u'$ si λ est cte

$f = u \circ v \circ w$ autrement dit $f(x) = u(v[w(x)])$

$$f'(x) = u'(v) \times v'(w) \times w'(x)$$

imparfaite mais utile

ex $f(x) = \cos\sqrt{x^2-1}$ on veut $f'(x)$

- décompose f en produit

$$f(x) = u$$
$$u = \cos v$$
$$v = \sqrt{w}$$
$$w(x) = x^2 - 1$$

- on obtient

$$u'(v) = -\sin v$$
$$v'(w) = \frac{1}{2\sqrt{w}}$$
$$w'(x) = 2x$$

- d'où $f'(x)$

$$= \underbrace{-\sin\sqrt{x^2-1}}_{u'(v)} \times \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}}_{v'(w)} \times \underbrace{2x}_{w'(x)}$$

en fait on pourrait appliquer formule en exprimant ts termes en f° de x

$$= \frac{-x\sin\left(\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2-1}}$$

ex usuels

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$ <u>connaître +++</u>

$$(\log|u|)' = \frac{u'}{u}$$

$$(e^u)' = e^u \times u'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = \left(-\frac{u'}{u^2}\right)$$

$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ etc...

4 Cas fs réciproques

- Sur un dom I,

  Si f est dér on sait que f est cont;

  si de + f est strict^{t} monotone,

  on sait qu'elle est une bijection.

  Ds ces conditions, f^{-1}

  vérifie $f \circ f^{-1}(x) = x$ et

  $f^{-1} \circ f(x) = x$ sur I

- Posant $f(x) = X$ pr simplifier on obtient $f^{-1}(X) = x$

- dérivant comme pr une f composée, on a $(f^{-1})'(X) \times X' = 1$

  en d'autres termes

  $$(f^{-1})'(X) = \frac{1}{f'(x)}$$

- pr tout pt X de $f(I)$,

  f^{-1} est dér,

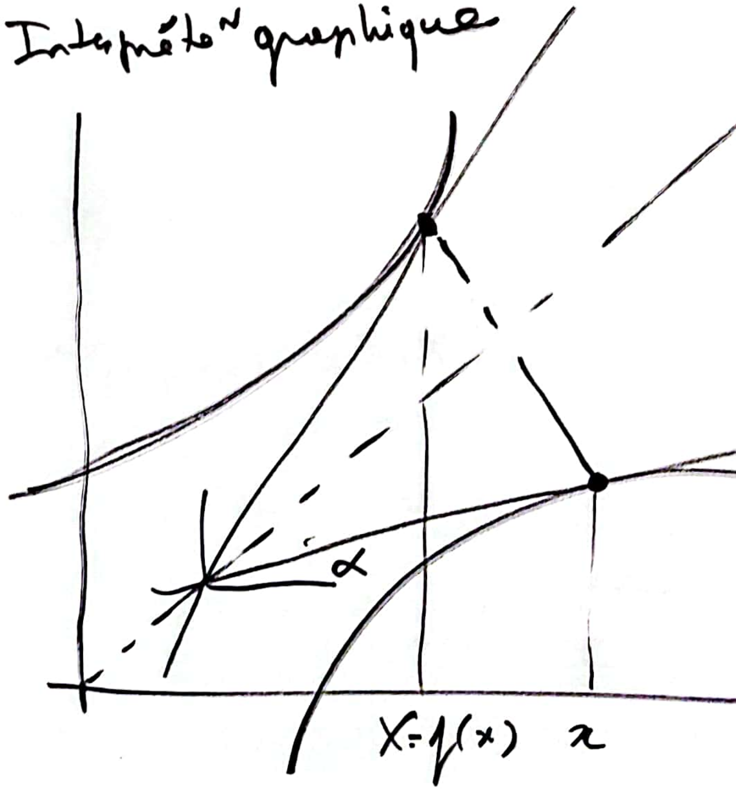
  et l'on peut énoncer :

  Au pt x, f a pour nb dérivé $f'(x)$

  ——— X f^{-1} ——— $\dfrac{1}{f'(x)}$

- Si on admet "des ∞" cela reste valable pour $f'(x) = 0$

- Interprétation graphique



$$tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{tg\,\alpha}$$

5 Différentielles . dér successives

. En tt pt x_0 où f est dérivable,
on appelle :
différentielle de f en x_0
la f linéaire, ac schéma $\begin{vmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow f'(x_0) \times x \end{vmatrix}$

. ex si $f(x) = x^2$,
on obtient :
au pt $x_0 = 2$ $\quad x \longrightarrow 4x$
$-3 \quad -6x$

. Rem ds un m̄ sys d'axes,
tan à Cf au pt Mo(d'abscisse x_0),
et la droite issue de O représentant
la dif en x_0, sont // (m̄ coef dir $f'(x_0)$)

. Not^ns
dif de f au pt x_0
dy ou $f'(x_0)\,dx$

Pratique
utilisons not^n
$$dy = f'(x)\,dx \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x)}$$

$x = g(t) \quad dx = g'(t)\,dt$

. f'' ou $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$ $\qquad f^{(n)} = \dfrac{d^n f}{dx^n}$

. ex si $f(x) = x^3 + 3x + 2$,
on a $f'(x) = 3x^2 + 3$
$f''(x) = 6x$

$f(x) = \sin x$ ↓ et recommence

6 Compléments

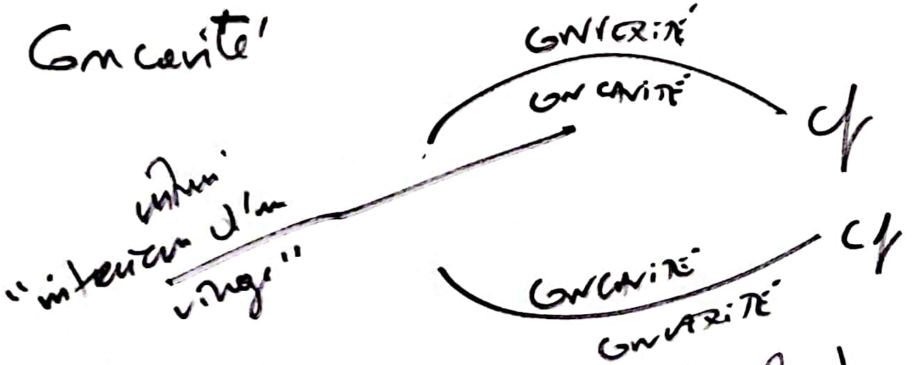
. T Si f est déri,

. f est ↗ lorsq f'(x) est $+^{ve}$
↘ $-^{ve}$

T Si deux des f' et g' sont =
sur un domaine I,
les fs corresp diffèrent d'une cte, c.à.d:

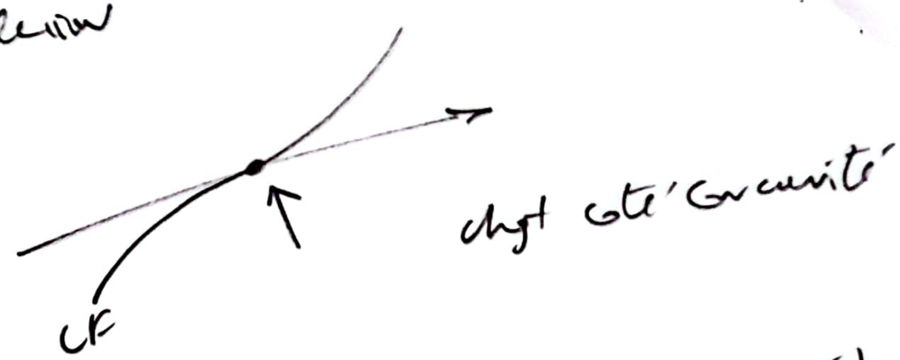
$$(f'(x)=g'(x), \forall x\in I) \Rightarrow (f(x)=g(x)+k, \forall x \in I)$$

. Concavité



. GraphiT (Si f est 2x dérivable)
Concavité est "du côté y positif"
lorsque f''(x) est $+^{ve}$
...

. inflexion



- pts Cbe équa° y = f(x) (2 f 2x déri)
pr lesquels f''(x) s'annule avec chgt
de signe, sont des Pi

- P précédente n'est pas réc,
il existe des Pi où f''(x) "est ∞",
et des pts où f''(x) est nulle sans
qu'il y ait inflexion