① FONCTIONS : ÉTUDE & REPⁿ GRAPHIQUE

~~Cou~~ borne ici

$f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow f(x) \end{array} \right.$

zéro ou une image $f(x)$

nom

D

Dom

c'est

valeur bien

ant que

0

sur dom

$x) \geq 0$

SOURIAC
FONCTIONS LIMITES CONTINUITÉ

par connaissance parité ou périodicité

impaire lorsq : $\forall x \in \mathcal{D}_f$,

$f(-x) = -f(x)$

paire

$= f(x)$

P périodique
lorsq il existe $P \neq 0$ tq
$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad f(x+P) = f(x)$

Graphiq $\perp$ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ou (Ox, Oy)

O ∈ sym

C_f Oy axe sym

2 cas D est la partie de $\mathcal{D}_f$ tq $x \geq 0$

C_f formée arcs déduits uns autres par translaⁿ vecteur $P\vec{i}$

ds ce cas
D est une partie de $\mathcal{D}_f$ de type
$\mathcal{D}_f \cap [a, a+P]$ où a est "à bien choisir"

① FONCTIONS : ÉTUDE & REP$^\circ$ GRAPHIQUE

~~bo~~ borne ici

$$f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow f(x) \end{array} \right.$$

peut tourner

zéro ou une image $f(x)$

• Plan étude par RG f

① Trouver D_f ensemble étude D

déf

→ ens des x tq $f(x)$ existe c'est que $f(x)$ représente une valeur bien définie et calculable ou sait que

$\sqrt[2n]{g(x)}$ existe ssi $g(x) \geq 0$

fraction (irréductible) existe ssi son dén n'est pas nul

$\log[g(x)]$ existe ssi $g(x) > 0$

→ par connaissance parité ou périodicité

impaire lorsque : $\forall x \in D_f$,

$f(-x) = -f(x)$

$= f(x)$

paire

P périodique lorsqu'il existe $P \neq 0$ tq

$\forall x \in D_f \quad f(x+P) = f(x)$

Graphiquement $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ou (Ox, Oy)

O ∈ sym

C_f Oy axe sym

2 cas D est la partie de D_f tq $x \geq 0$

C_f formée arcs déduits uns autres par translation vecteur $P\vec{i}$

ds ce cas

D est une partie de D_f de type

$D_f \cap [a, a+P]$ où a est "à bien choisir"

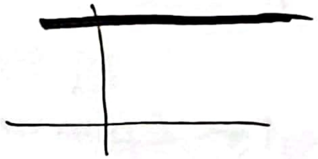
② Trouver limites (ou les valeurs) de f aux bornes de D et les asymptotes (éventuelles) de la courbe C_f.

· pour g ③

· rectilignes on utilise les ~~résultats~~ résultats suivants :

Si $f(x) \to \pm\infty$ lorsque $x \to a$ (fini) droite équation $x = a$ est une asymp // Oy

$y = a$



∞ ∞

il peut exister une asymp oblique équa° $y = ax + b$

a est la lim non nulle de $\frac{f(x)}{x}$

b ——— $f(x) - ax$

lors $x \to$ cet ∞

Si ~~de~~ ces 2 lim sont finies

(si l'une au moins de ces lim est ∞, il n'y a pas d'asymp)

③ Trouver le sens de variations de f (sur D)

parfois ~~calcul~~ ex si $f(x) = \frac{1}{x+1}$ f décroît

en ~~gal~~ gal, on déduit le sens d'après étude signe de $f'(x)$ d'après T

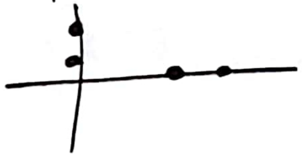
Si f est dérivable, f est croiss lorsque $f'(x)$ ~~existe~~ positive

décrois négative

↗ ↘

④ Trouver pts particulier C_f

. Sommets



pts inflexion

. Si f dérivable

abs d'un sommet sont une valeur de x annulant $f'(x)$ avec chgt de signe (avec $x \in D$)

— 2x —

— $f''(x)$ —

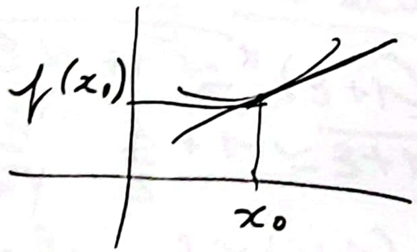
$f(x) = 0$ si il y a des sol^{ns}

$y = f(0)$ si $0 \in D$

⑤ Construire C_f

tangente

$(x_0, f(x_0))$



dirigée par

$(1, f'(x_0))$

② LIM

... désignent ...

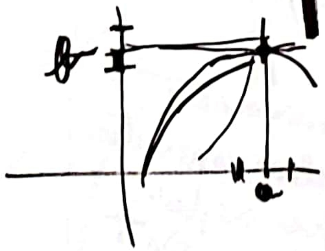
a b val finies   sinon ∞

A B positives en pratique GRANDES –

ε η ———————— PETITES –

$\lim_{x \to a} [f(x)] = b$ signifie :

on peut choisir x "assez voisin de a" pour que l'écart $|f(x) - b|$ soit "aussi petit qu'on veut"



~~$\forall \varepsilon \eta$~~

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta$ tq : $|x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$

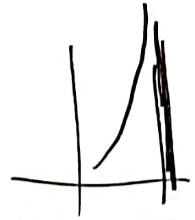
aussi $x \to a \Rightarrow f(x) \to b$

$\lim_{x \to a} [f(x)] = +\infty$

on peut choisir x "assez voisin de a" pour que $f(x)$ soit aussi grand qu'on veut"

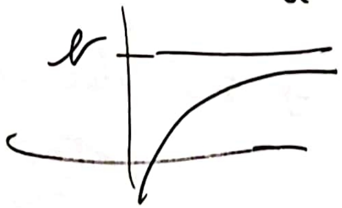
$\forall A, \exists \eta$ tq $|x - a| < \eta \Rightarrow f(x) > A$

$x \to a \Rightarrow f(x) \to +\infty$



a

$\lim_{x \to +\infty} [f(x)] = b$



$\lim_{x \to +\infty} [f(x)] = +\infty$

$\forall A, \exists B$ tq : $x > B \Rightarrow f(x) > A$

$x \to a^+$ $x > a$

~~$x \to a^{\oplus}$~~ $x \to a^+$

③ lim usuelles

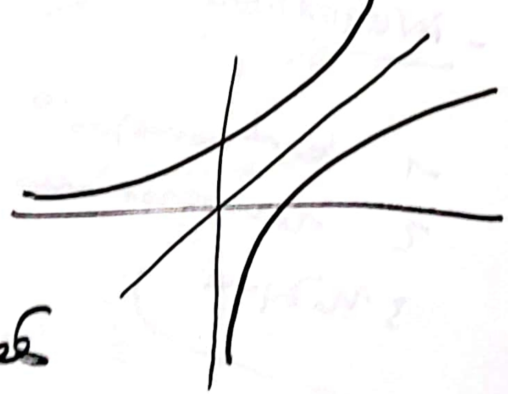
6 formules moins techniques

1 pour $a \neq 0$ $\frac{a}{0} = \infty$

2 ——— ∞ $\frac{a}{\infty} = 0$

3 5 $\log 0^+ = -\infty$ $\log(+\infty) = +\infty$

7 6 $e^{-\infty} = 0^+$ $e^{+\infty} = +\infty$ e^x



Formes indéterminées

$+\infty - \infty$ $\frac{\infty}{\infty}$ $\frac{0}{0}$ $0 \times \infty$ ...

levée indétermination jusqu'à ce que la
nouvelle lim corresponde

pas mot pour unique mais ↗ quelques lim cas

$+\infty - \infty$

un pol a m̃ lim qd $x \to \infty$
que son monôme de + ht degré

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 7x^2 + 1000) = \lim\limits_{x \to +\infty} = +\infty$

on peut ôter aboutir avec formules

$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a+b}$

$\sqrt{x^2 - x - 1} - \sqrt{x^2+1}$ $\infty - \infty$ qd $x \to -\infty$

$\frac{(x^2 - x - 1) - (x^2+1)}{\sqrt{x^2 - x - 2} + \sqrt{x^2+1}} = \frac{-x - 2}{\sqrt{x^2 - x - 1} + \sqrt{x^2 - 1}}$

$\frac{\infty}{\infty}$ FR rapport termes de + ht degré

$\frac{x^3 - x - 1}{2x^3 + x^2}$ $\frac{x^3}{2x^3}$ $\frac{1}{2}$

Généralisation

$0/0$

. Si $\frac{f(x)}{g(x)}$ pr $x = a$ fini

on peut ent metho $(x-a)$ en facteur

de $f(x)$ et $g(x)$

- m̃ cas est "prévoir" règle Hopital

Si $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ est déterminé pr $x = a$

lim est $\frac{f'(a)}{g'(a)}$ sinon on pousse à f''

$$\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{2x}}{\sqrt{3-x}-\sqrt{5-3x}}$$ $\frac{0}{0}$ pr $x=1$

$f'(1) = \frac{3}{2}$ $g'(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Autres formes

on essaie de se ramener cas précédent

voir Log ou exp s'il y a lim

Autre cas

- lorsque $x \to 0$

on peut utiliser "approximations"

$(1+x)^{\alpha} \simeq 1+\alpha x$ quelconque

$\text{Log}(1+x) \simeq x$ $e^x \simeq 1+x$

si x (rad) $\simeq 0$ $\sin x \simeq x$ $\text{tg}\, x \simeq x$

$\cos x \simeq 1 - \frac{x^2}{2}$

$x \to a$

on peut se ramener cas précédent

en posant $x = a + X$

$x \to a$ equivt log^t à $X \to 0$

$x \to \infty$ ~~oo~~ m̃ $x = 1/X$

ramène au cas $X \to 0^+$

ou 0^-

④ CONTINUITÉ

f est cont pour $x = a$ (lim)

lorsq

D ‖ $f(a)$ existe
et $\lim_{x \to a} [f(x)] = f(a)$

lorsq f est cont pour tout pt a d'un intervalle I, on dit f est cont sur I

$x \to a^+$ $x \to a^-$

cont à droite du pt a

- **ens f cont** $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

cont sur $\mathbb{R}$ notamment on a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

f_s cts pol sin cos exp sont elts de

egalité $f = g$ lorsq : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x)$

$f + g$ $h(x) = f(x) + g(x)$

fg $\times$

composée $g \circ f$ $g[f(x)]$

$\lambda \times f(x)$

$\longrightarrow$ on peut munir $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ diverses str

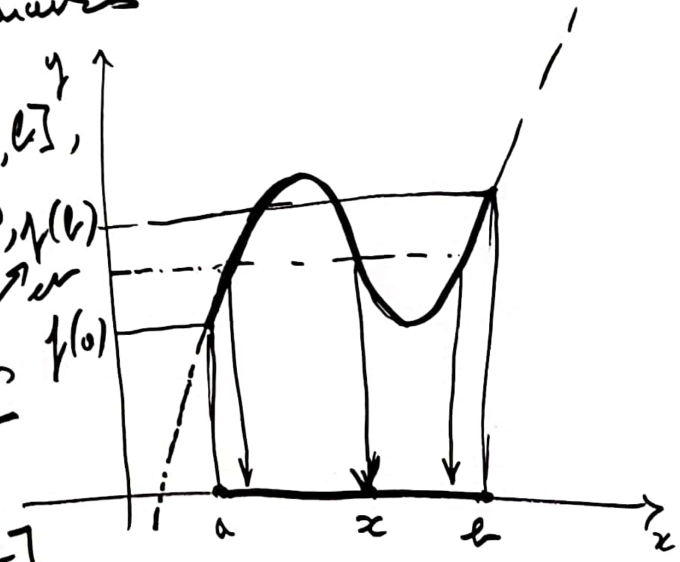
P fond

Si f est continue sur un intervalle I image $f(I)$ de cet intervalle est un intervalle

Conséquences ①

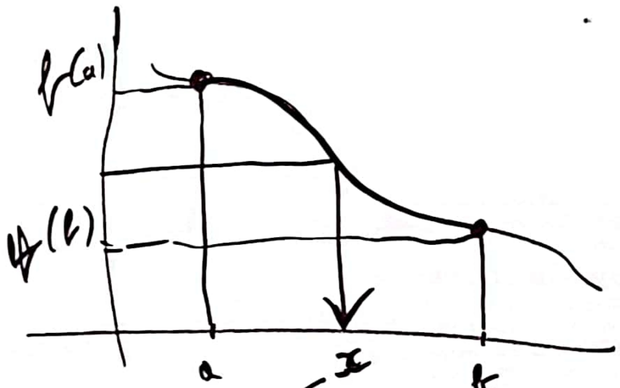
T val intermédiaires

Si f (non cte) est cont sur $[a, b]$, et si $f(a) \neq f(b)$, alors toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ provient d'au moins un pt x (au moins) de $[a, b]$



②

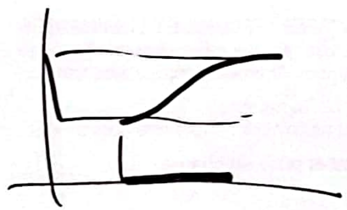
strict monotone sur [a, b]



unique

or f injective sur I = [a, b]

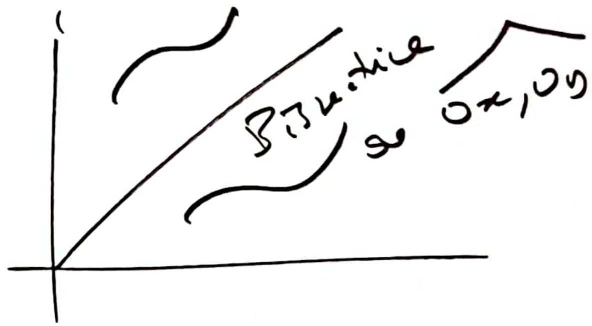
alors f est une bijection de I sur f(I)



③ on peut écrire la bij réciproque

$\cancel{f^{-1}}$

$$f^{-1} : \left| \begin{array}{l} f(I) \longrightarrow I \\ x \longrightarrow f^{-1}(x) \end{array} \right.$$



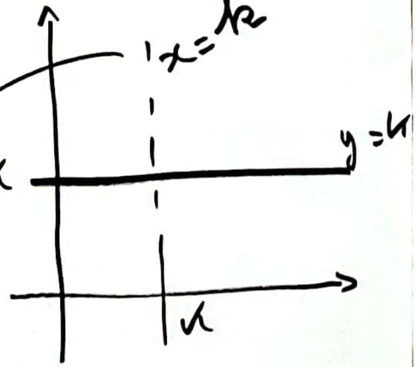
f et f^{-1} <u>même monotonie</u>

⑤ fs USUELLES

expression $f(x)$ puis le nom de C_f

· Cte $f(x) = k = y$ [redacted]

"échappant"

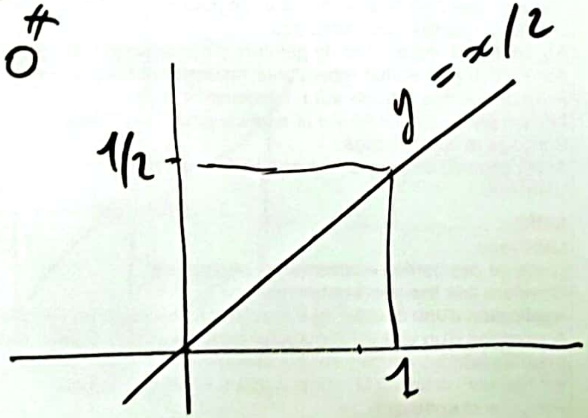


linéaire $f(x) = ax$, $a \neq 0$

P passe aussi au pt $(1,a)$ [redacted]

si $a>0$ $f \nearrow$

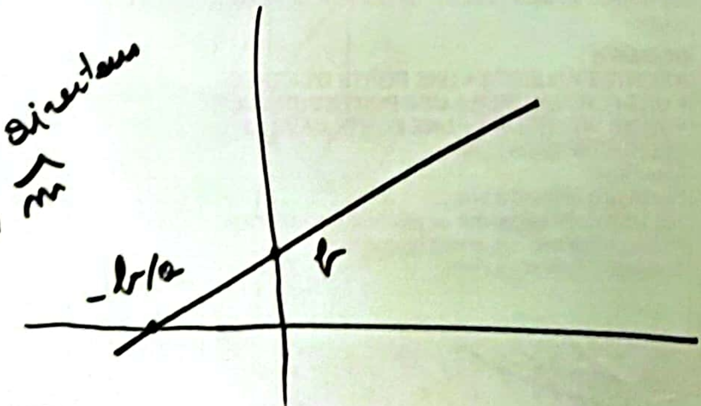
<0 $\searrow$



affine $ax+b$, $a \neq 0$

2 D sont // ssi coef directeur

ou le $\hat{m}$

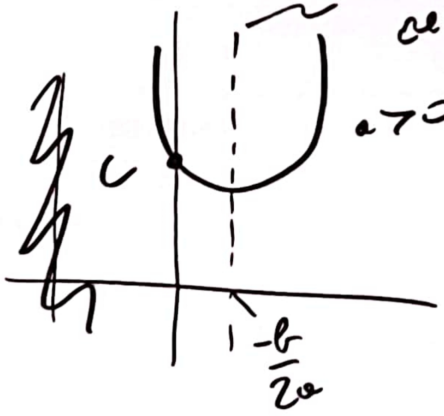


du 2nd degré

ax^2+bx+c, $a \neq 0$ parabole

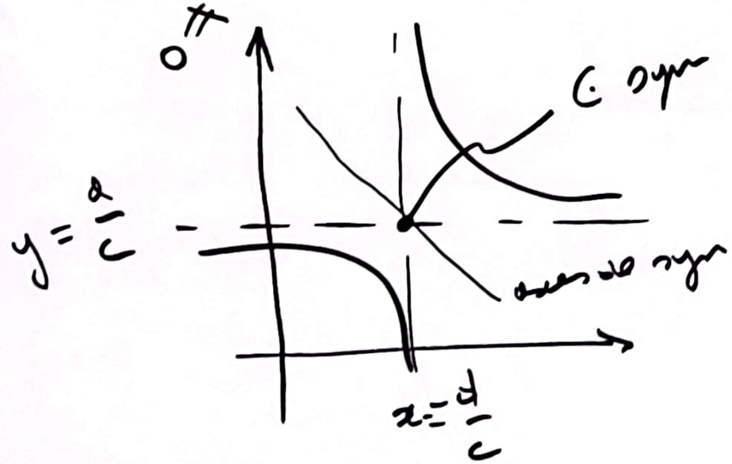
axe sym d'équation $x = -\frac{b}{2a}$

concavité "vers $y>0$" si $a>0$



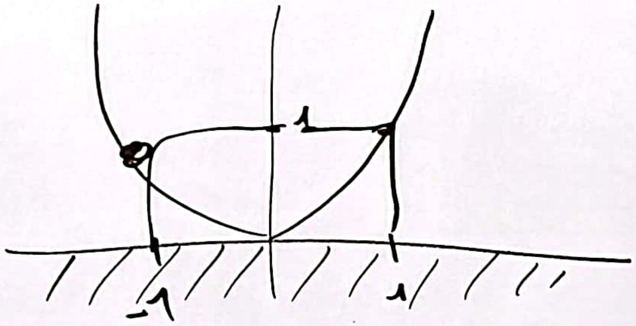
homographique $\frac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0$ — non nuls ensemble

hyperbole 2 asymp.

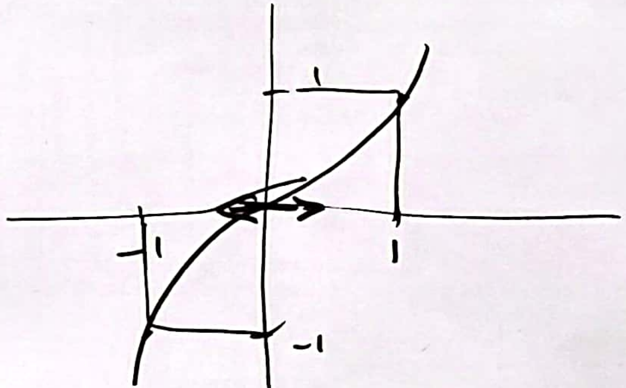


Si puissance n $\quad x^{n \in \mathbb{N}}$

pair $= 2p$



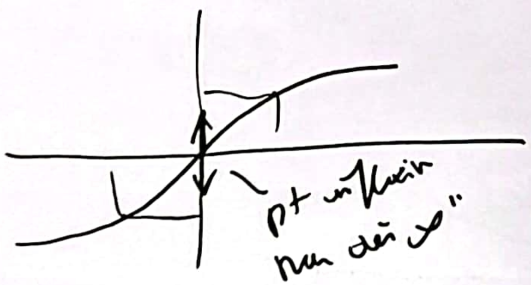
impair $= 2p+1$



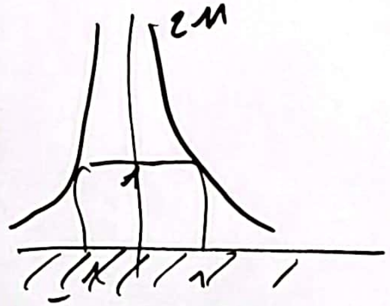
"racine nième" $\sqrt[n]{x}$

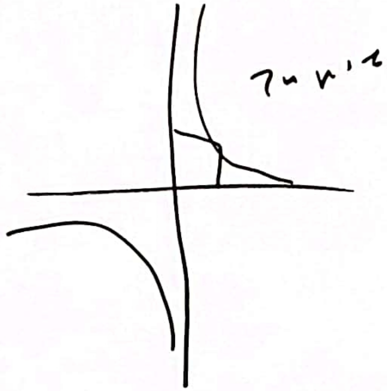
$2p$ $\quad \sqrt[2p]{x} = x^{1/2p}$

$2p+1$ $\quad \sqrt[2p+1]{x} = x^{\frac{1}{2p+1}}$



$1/x^n = x^{-n}$ — non nul suivant parité de n

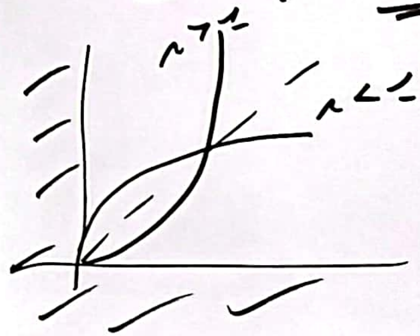




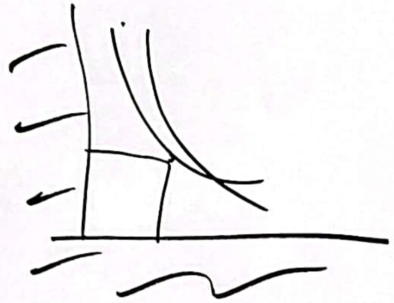
$x^{r \in \mathbb{Q}} = \dfrac{p \in \mathbb{Z}}{q \in \mathbb{N}^*}$

certains cas définis pour des val négatives de x on n'admet que le

D tq $x \geq 0$



$r > 0$



$r < 0$