1) $\mathbb{C}$ & STRs

$\mathbb{R}$ eq^n 2nd $\Delta < 0$ pas solution

→ inconvénient ↓

+ on convient règles calcul "très proches" des règles des $\mathbb{R}$

: $\mathbb{C}$

- C P

(vec ou Affines)

SourirAC $\mathbb{C}$

calculs complexes

images géométriques

1) $\mathbb{C}$ & STRs

$\mathbb{R}$ eq^n 2$^{nd°}$ $\Delta < 0$ pas solution

→ inconvénient ↓

Hom conservant règles calcul "très proches"

des règles de $\mathbb{R}$

→ $\mathbb{C}$ opérations tq $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

($\mathbb{C}$, +, ×) Corps commutatif

$\mathbb{R}$ est un sous corps de $\mathbb{C}$

opérations usuelles de $\mathbb{R}$ sont ⊂ P

opér^r de $\mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ n'est pas ordonné

$\mathbb{C}$ peut ê muni st ESp (Vec ou Affine)

2) 1ère Forme ~~d~~ algébrique → schémas suivants :

$z = a + ib$

$a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$

$Re(z)$ partie réelle de z

$Im(z)$ — imaginaire de z

i nb tq $i^2 = -1$ ce qui montre que i n'est pas réel

"est le coef de i"

$Im(z) = b$ et non ib *

• Règles opératoires de $\mathbb{C}$

• $=$ $\quad z = z' \iff (a = a'$ et $b = b')$

• $+ - \times$

1. Comme pour des "polynômes en i"
2. en remplaçant i^2 par -1 chaque fois que possible

$z + z' = (a+ib) + (a'+ib')$ d'où $= (a+a') + i(b+b')$

$z \times z' = (a+ib)(a'+ib')$ d'où $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$

$\dfrac{z}{z'} = \dfrac{a+ib}{a'+ib'}$ (z' non nul)

1. multiplier "haut et bas" par conjugué "bas"
2. effectuer nouveau calcul

$z' = a' + ib'$

$\overline{z'} = a' - ib'$ conjugué $i \to -i$ ou $-i \to i$

$\dfrac{z}{z'} = \dfrac{z}{z'} \times \dfrac{\overline{z'}}{\overline{z'}}$ ou $\dfrac{z\overline{z'}}{z'\overline{z'}}$ soit $\dfrac{(a+ib)(a'-ib')}{(a'+ib')(a'-ib')}$

$= \dfrac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2} + i\,\dfrac{ba'-ab'}{a'^2+b'^2}$

partie réelle et imag de $\dfrac{z}{z'}$ sont séparées

automorphisme de $\mathbb{C}$

En ~~pr~~ pratique toute expression $f(z)$ ne comportant que des sommes, produits quotients ou puissances n $(n \in \mathbb{Z})$ vérifie

$$f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$$

car j involutive $\overline{(\bar{z})} = z$

Rem.

1 $a^2+b^2 = (a+ib)(a-ib)$

2 $i^2 = -1 \rightarrow i^3 = i^2 . i$

$i^3 = -i$

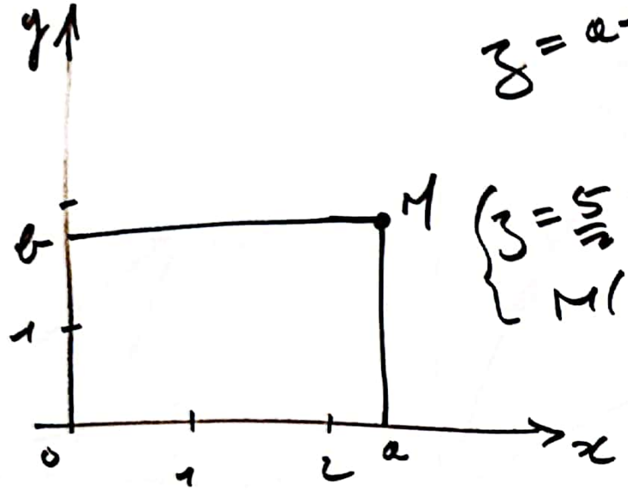
$i^4 = i^3 i = -i . i \quad i^4 = +1$

$i^5 = +i \quad i^6 = -i \quad i^7 = -i$

3 $\frac{1}{i} = \frac{1}{i} \times \frac{-i}{-i}$ ou $\frac{-i}{+1}$ d'où $\frac{1}{i} = -i$ e...

4 ∀ les règles valent. et B valables pourvu que on respecte $\underline{i^2 = -1}$

3) IMAGES DS 1 PLAN



$z = a + ib$

$\begin{cases} z = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} i \\ M\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) \end{cases}$

rep^T $M(a,b)$ $\xleftrightarrow{\text{associé}}$ $z = a + ib$

= AFFIXE DE M

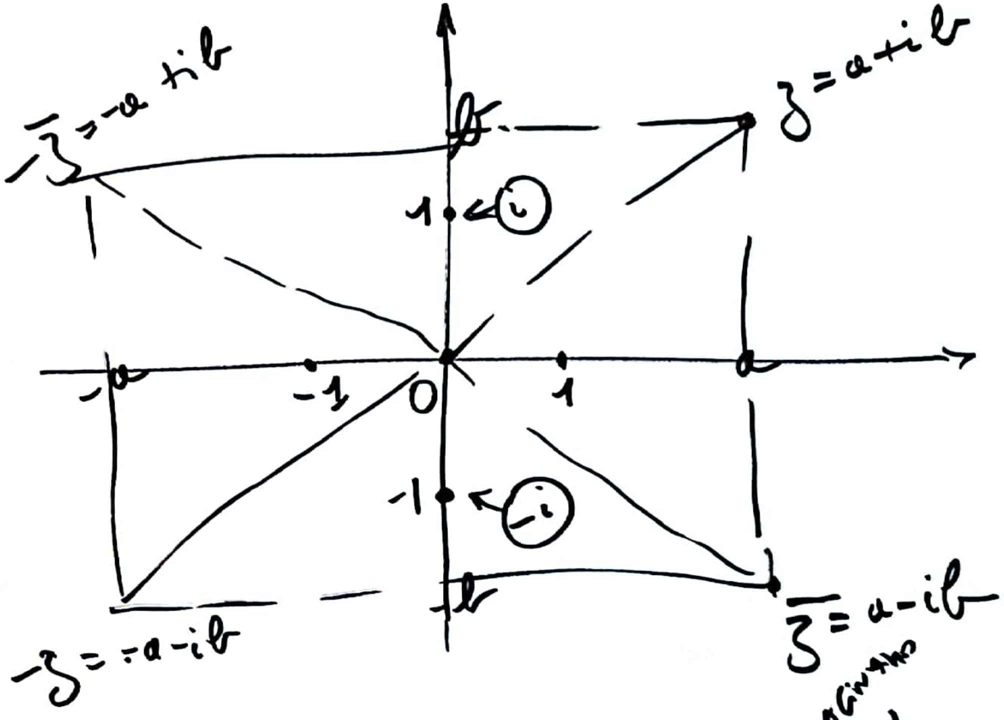
bijection

$\mathbb{C} \longrightarrow$ plan affine ROW

plan complexe

représentation géom de $\mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ rep^n numérique de ce plan



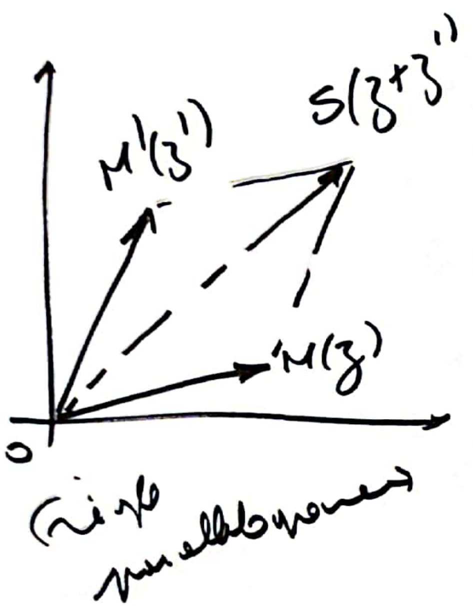
réel
$\perp 0$

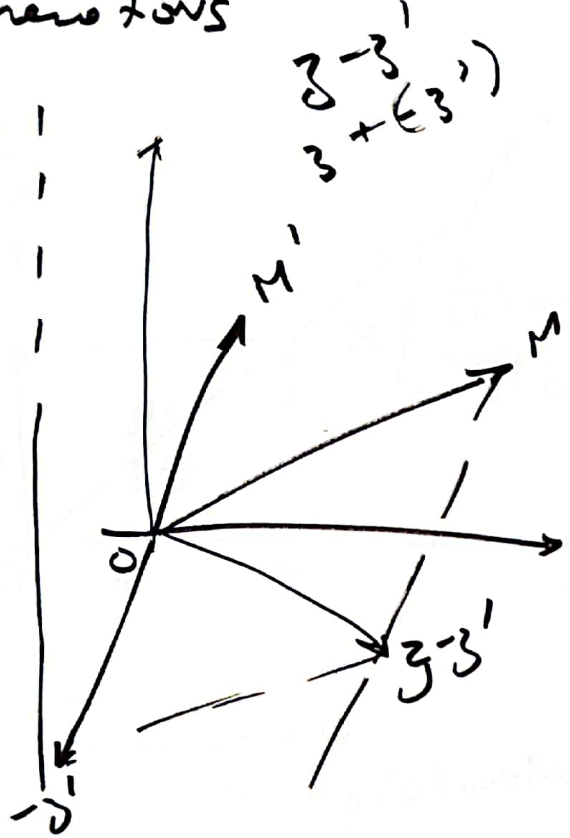
$\uparrow$ imaginaire pure

$\to 0$

~~• Image des opérations~~

• Images des opérations

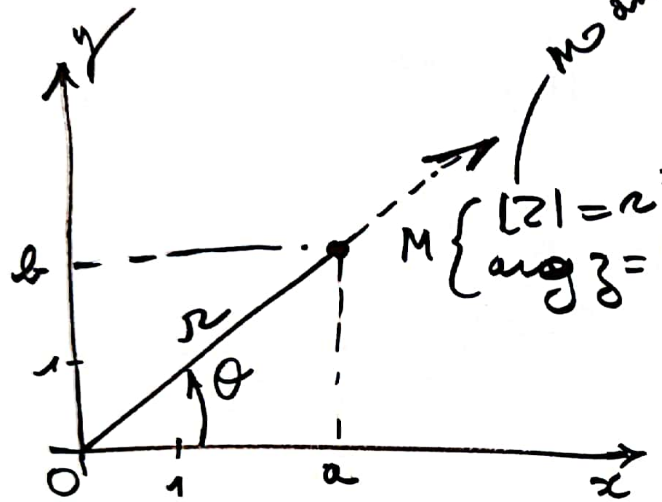




zz' revient à une similitude appliquée à M
ou bien une autre similitude appliquée à M'

⟶

4) 2ème forme nbs complexes



$$M \begin{cases} |z| = r = d(O,M) \\ \arg z = \theta \ (\text{mod } 2\pi) \end{cases}$$

module de z

$z = [r, \theta]$

forme trigo

. Passage 1 forme → autre

$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$

quand (modulo 2π)

$\arg z = \theta$ tq $\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{r} \\ \sin\theta = \frac{b}{r} \end{cases}$

. Ex $z = 1 + i\sqrt{3}$

$|z| = \sqrt{1+3} = 2$

$\arg z = \theta$ (mod θ) avec $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

d'où $\arg z = \frac{\pi}{3}$ (mod 2π)

Propriétés

- $|z|$ nect positif, seul $|0| = 0$ (car arg(0) indéterminé)

. arg z possède 1 inf de mesures

si θ est l'une d'elles, on peut écrire

$$\arg z = \theta + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

ou

. on déduit les projections

$$a = r\cos\theta$$
$$b = r\sin\theta$$

$$\Rightarrow z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

5) utilisation forme trig

- on ne peut rien dire à l'avance sur le module et l'argument d'une ~~somme~~ somme de complexes à partir de ceux des termes
- Par contre → simples

· égalité

$z = z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$ et $\arg z = \arg z'$ $(\mathrm{mod}\ 2\pi)$

$[r,\theta] \times [r',\theta'] = [rr', \theta+\theta']$

$\dfrac{[r,\theta]}{[r',\theta']} = \left[\dfrac{r}{r'}, \theta-\theta'\right]$

$n \in \mathbb{N}^*$

$[r,\theta]^n = [r^n, n\theta]$

- Cas ~~des~~ racines carrées
$\sqrt{\ }$ réservé à $\mathbb{R}$
employé que pour des réels vérifiant $r \geq 0$

~~syntaxe~~ pour ~~le~~ cas $\mathbb{C}$
→ rac carrés de "en toutes lettres" si $A \in \mathbb{C}$

$A = [R, \alpha]$ complexe quelconque

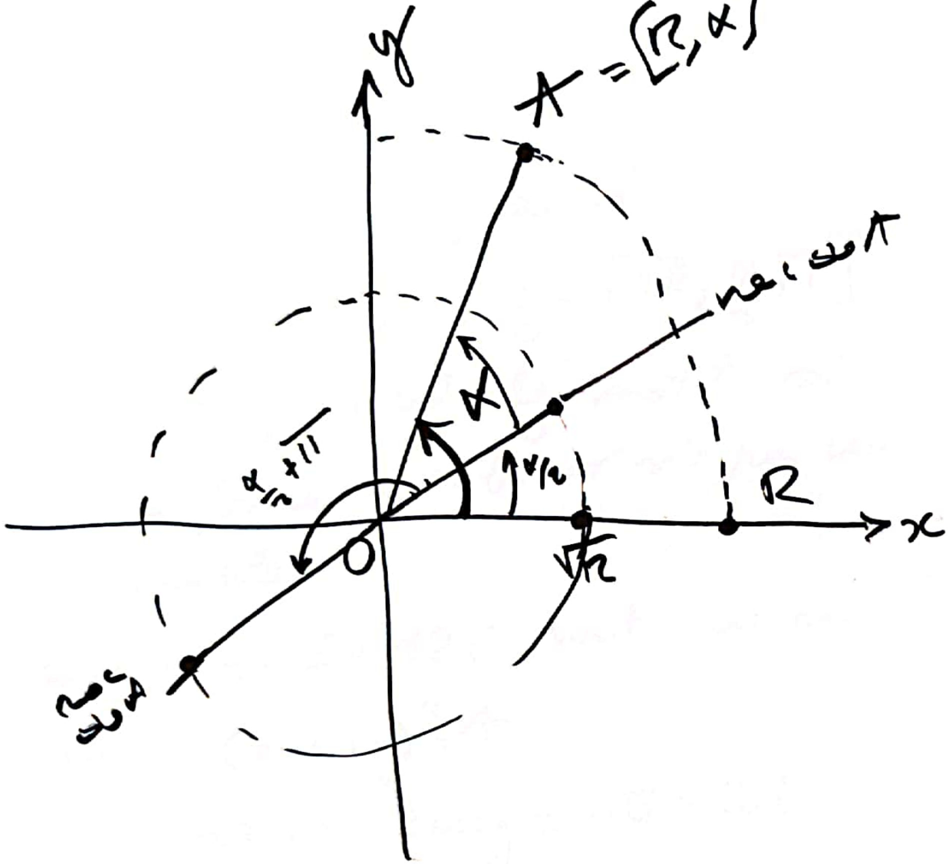
rac car de A
~~[illegible]~~ sont les nbs z tels que

$$\boxed{z^2 = A}$$

$z = [r,\theta]$ on obtient $[r^2, 2\theta] = [R, \alpha]$
d'où $r^2 = R$ et $2\theta = \alpha$ $(\mathrm{mod}\ 2\pi)$
d'où $r = \sqrt{R}$ et $\theta = \dfrac{\alpha}{2}$ $(\mathrm{mod}\ \pi)$

il existe donc 2 rac car de A
de m̂ module
d'arguments : l'un $\dfrac{\alpha}{2}$ $(\mathrm{mod}\ 2\pi)$
l'autre $\dfrac{\alpha}{2} + \pi$ $(\mathrm{mod}\ 2\pi)$

2 rac sont opposés, leurs images sont sym/O



2. + gén^t

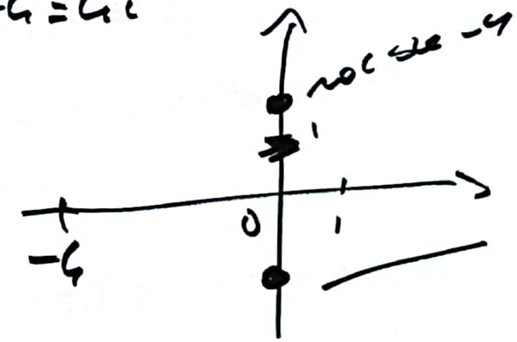
Tt réel < 0 a 2 rac cx opposées ds ℂ

$A = -4 \to |A| = 4$ et $\arg A = \pi \ (\text{mod } 2\pi)$

on ne suit pas leur mod et leur arg.

suit d'après $-4 = 4i^2$

$2i \quad -2i$



• Caractérisation imaginaires purs

• $z = 0$ réel & pur^t

$z = ib$

$\to z^2 = -b^2$ carré et réel nég

• réciproquement un réel nég peut s'écrire

$-b^2$ ou $i^2 b^2$ rac ce ib et $-ib$

$i\mathbb{R}^*$ = ens ds rac carr nbs réels nég

• Gms on voulait faire √ ds équations 2nd degré à discriminant < 0 pas sol ds ℝ faute de rac car de Δ → reconsidérer ds ℂ

• ex :

1. $x^2 + 1 = 0$ ~~sol~~ ds ℝ

$z^2 + 1 = 0$ ds ℂ $\quad z^2 = -1 \to z^2 = i^2$

2 ~~R~~ solutions $z = i$ ou $z = -i$

. Retour aux rac car

. $z^2 = A$ $\quad z=[r,\theta]$ inconnu

$A = [R,\alpha]$ donné

Attention ↪ $z = [\sqrt{R}, \frac{\alpha}{2}]$ $\quad z = [\sqrt{R}, \frac{\alpha}{2} + \pi]$

. on peut faire cal "alg" mod^t si A sous forme $a+ib$ et n'est pas un arg simple

. ex soit $A = -5+12i$ veut rac car

- posons $(x+iy)^2 = A$

d'où $x^2 - y^2 + 2ixy = -5+12i$

$\rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ xy = 6 \end{cases}$

$\rightarrow y = \frac{6}{x}$ par subs° $\quad x^2 - \frac{36}{x^2} = -5$

$\rightarrow x^4 - 36 = -5x^2$

$x^4 + 5x^2 - 36 = 0$

$\Delta = 169 \quad x^2 = \frac{-5+13}{4}$ $\quad$ ou rejeté -13

x^2 réel

$x^2 \not< 0$

$\rightarrow x^2 = 4$ $\quad \begin{cases} x = 2 \text{ et } y = 3 \\ \text{ou} \\ x = -2 \text{ et } y = -3 \end{cases}$

$\rightarrow (-5+12i)$ $\quad (2+3i)$ et opposé

. Rac n-ièmes $(n \in \mathbb{N}^*)$

$z = [r,\theta] \quad z^n = A \qquad A = [R,\alpha]$

$[r^n, n\theta] = [R,\alpha] \rightarrow r^n = R$ et $n\theta = \alpha \pmod{2\pi}$

$r = \sqrt[n]{R}$ et $\theta = \frac{\alpha}{n} \pmod{\frac{2\pi}{n}}$

. il existe donc n rac n-ièmes de A de même module

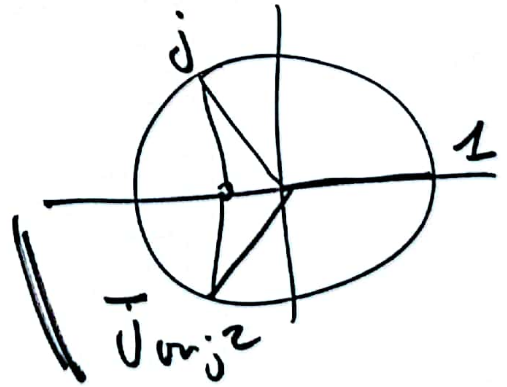
d'arg resp. $\frac{\alpha}{n} \pmod{2\pi} + \dots$

. ex rac cubique de 1 (rac 3-ièmes)

$[r^3, 3\theta] = [1,0] \rightarrow r^3 = 1$ et $3\theta = 0 \pmod{2\pi}$

$\rightarrow r = 1$ et $\theta = 0 \pmod{\frac{2\pi}{3}}$

3 val poss $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$



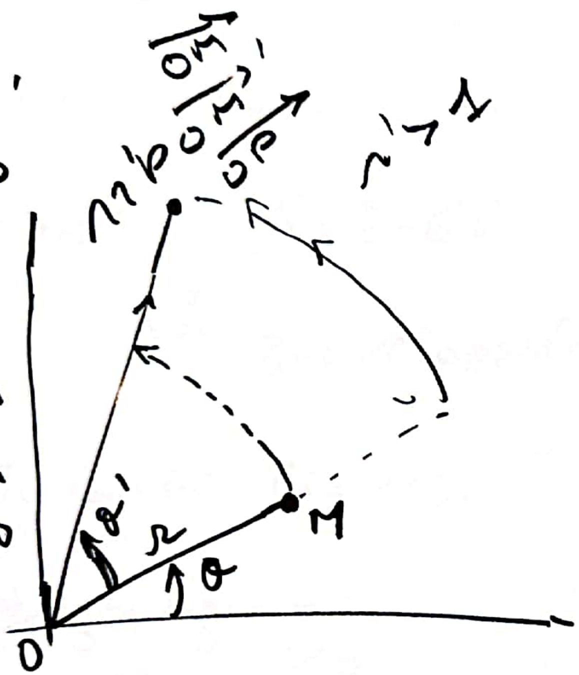
6) COMPLÉMENTS DIVERS

• image du produit zz'

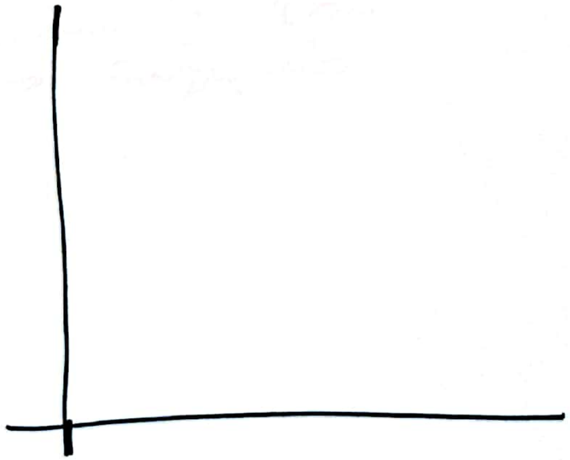
$z=[r,\theta]$ a pour image M

$z'=[r',\theta']$ M'

$zz'=[rr',\theta+\theta']$ P



1 similitude de c O rapport $r'=|z'|$ et angle $\theta'=\arg z'$ appliquée à M



2 on peut partir de M'

• $\mathbb{C}$ et la trigo

$[r,\theta]^n=[r^n,n\theta]$ $n\in\mathbb{N}^*$

on peut écrire

$r^n(\cos\theta+i\sin\theta)^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

et simplifier par r^n

→ Formule Moivre

$$\cos n\theta+i\sin n\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^n$$

tout nb complexe possède n racines n-ièmes, plus fort

T Alembert

toute équation degré n, à coeff $\mathbb{C}$ possède exactement n solutions ds $\mathbb{C}$

une solution double compte pour 2 ...

- Équa° 2nd degré ds $\mathbb{C}$

règles "réelles" valables à condi°
ne pas user $\sqrt{}$ mal à propos

$$iz^2 - 2(1-i)z + 6(1+2i) = 0$$

$$\Delta' = (1-i)^2 - 6i(1+2i) \rightarrow \Delta' = 8-6i$$

rac $3-i$ et opposée

peut se sentir
car $8-6i$ contient $6i = 2 \times 3i$

T cs coef réels ~~a~~ $az^2 + bz + c = 0$
avec $\Delta < 0$
possède tjs 2 sol°
complexes conjuguées

~~Form~~

Formules utiles

$$(a^2+b^2) = (a+ib)(a-ib)$$

$$|z|^2 = z\bar{z}$$

$$a = \frac{(a+ib)+(a-ib)}{2} \qquad b = \frac{(a+ib)-(a-ib)}{2i}$$

$$Re(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$$

$$Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

$$\downarrow$$

$$z = [r, \theta] = z = re^{i\theta}$$

$$(re^{i\theta})(r'e^{i\theta'}) = (rr')e^{i(\theta+\theta')} \text{ ... etc.}$$