(1) ℝ ET LES ~~...~~ STRUCTURES

$\leq$ tot^T ordonné

+, × corps commutatif

peut ê muni autres structures

+ . ext "espace ℝ"

... p n b $\geq$ a

... m E'

b $\in$ E',

$\forall (a,b) \in E'^2$)

...nt pas les

...s invariant)

SOMMAIRE
ℝ valeur absolue
Racine carrée
Calculs approchés

Densité de ℝ

densité peut se traduire ainsi

entre 2 réels distincts "si proches soient-ils"

il existe au moins un rat

On en déduit:
entre 2 rat distincts $\exists$ au moins un réel

cette propriété permet l'encadrement numérique d'un réel "d'aussi près qu'on veut" par des rationnels ou des décimaux

1) ℝ ET LES ~~...~~ STRUCTURES

$\leq$ tot^T ordonné

$+, \times$ corps commutatif

peut ê muni autres structures amenant à dire "espace ℝ"

→ CP EV ou EA

Archimédien

$\forall a, b \quad b>0 \quad \exists$ entier n tq $nb \geq a$

- Stabilité 1 Li

Soit $(E, *)$

→ E' partie de E

"est stable pour $*$"

lorsque cette loi est interne sur E'

$(E'$ stable pour $*) \iff (a * b \in E'$, $\forall (a,b) \in E'^2)$

et $\mathbb{N}$ $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$

chacune est stable

par $+$

— mais ce ne sont pas les

seuls (paires [illegible])

ℚ est dense ds ℝ

densité peut se traduire ainsi :

entre 2 réels distincts

"si proches soient-ils"

il existe au moins un rat

On en déduit :

entre 2 rat distincts

$\exists$ au moins un réel

cette ✓ permet

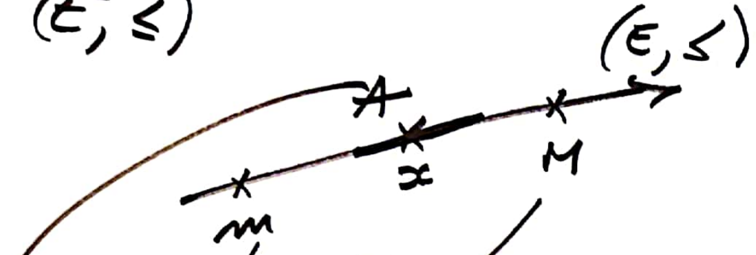
l'encadrement numérique

d'un réel "d'aussi près qu'on veut"

par des rationnels ou des décimaux

2) MAJORANTS, MINORANTS, BORNES, INFINIS

• DEF : $(E, \leq)$ → ordonné



1. ~~[illegible]~~ une partie A de E, est ~~[illegible]~~ majorée par M lorsque
2. $\forall x \in A$, on a $x \leq M$ (avec ~~[illegible]~~ $M \in E$)

minorée
$\underline{m \leq x}$

minorant — majorant de A

3. BORNES de A

~~[illegible]~~ lorsque A de E est majorée on appelle borne supérieure de A notée $\text{Sup}(A)$, le plus petit majorant de A

$\inf(A)$ ~~et~~ le plus grand minorant

Cas de $\mathbb{R}$ (ordonné)

toute partie (non vide) majorée de $\mathbb{R}$ admet ~~[illegible]~~ un plus petit majorant c.à.d une borne supérieure

minorée ... inférieure

* P (admise) ne sont pas évidents

Si A vérifie ce P, $\sup(A)$ existe mais on peut avoir ~~[illegible]~~ $\text{Sup}(A) \in A$ ou bien $\notin$

de même inf

ce point vrai dans $\mathbb{R}$, mais pas vrai dans $\mathbb{Q}$

~~[illegible]~~ Contre ex

$A \subset \mathbb{Q}$ $A = \left\{ \frac{n}{q} \,/\, \frac{n^2}{q^2} < 2 \right\}$

1 A n'est pas vide, A est majorée (par des rat)

2 cependant A n'admet pas de + petit maj rationnel (DM pas demandé)

· intervalles de $\mathbb{R}$ "1 seul devant"

$[a, b]$

$]\quad[$

$]\quad]$

$[\quad[$

· ∞ : $\mathbb{R}$ lui n'est ni majoré ni minoré

est minoré par a et non majoré

$[a, +\infty[$ $\quad\quad$ $]-\infty, a]$

$]$ $\quad\quad$ $[$

$\notin \mathbb{R}$

$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

3) Valeur absolue
Racine carrée

. Soit Y un réel ou une expression prenant ses val réelles
$|Y|$
$|Y|$ est le nb positif ou nul défini par

$$\boxed{\begin{array}{l} |Y| = 0 \Leftrightarrow Y = 0 \\ |Y| = Y \Leftrightarrow Y > 0 \\ |Y| = -Y \Leftrightarrow Y < 0 \end{array}}$$

Soit Y positif ou nul
(ou expression à val positives ou nulles)

$\sqrt{Y}$ = nb positif ou nul dont le carré est Y

. Rem $+5^2 = -5^2 = 25$

$\sqrt{25}$ $\quad -\sqrt{25}$

les 2 nbs dont le carré est Y
sont appelés ou notés
racines carrées de Y
"en toute lettre"

. Si on cherche
x tq $x^2 = 25$
$x = \pm 5$ $\quad x = \pm\sqrt{25}$ incorrecte
$x^2 = 25 \Longleftrightarrow (x = 5$ ou $x = -5)$

$\sqrt{x^2} = x \quad \sqrt{x^2} = -x$

incor $\sqrt{x^2} = \pm x$ $\quad$ incor

correct $\sqrt{x^2} = |x|$

$-\sqrt{x^2} = -|x|$

Si on suppose $x > 0$ $\quad \sqrt{x^2} = x$ ou $-\sqrt{x^2} = -x$

$<$ $\quad -x \quad = x$

$\sqrt{} : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longrightarrow \sqrt{x} \end{array}$

bijection

4) RAPPELS ÉQUATIONS INÉQUATIONS

↗ une ou plus lettres

ren^t inconnues à trouver

=

• résoudre trouver ~~les~~ valeurs pour lesquelle vérifiée

• val = solutions "racines"

Rappels

1.) ~~Ro~~lié en transposant termes

= avec changer signe

si × ou ÷ 2 membres par même nb non nul

2.) Risque modifier en × ÷ ~~..~~ par exp^n > 1 inconnue

+ faut mettre élever 2 membres au carré

3) tous = 0

aide trouver sol^t

puis utilisons resultat relatif ! $x \div 0$

• Sys équa^n

– en met substitutions

– add sut

– équi n inconnues

sont déterminées à partir n équations

si < n nb eux 1 ∞ valeurs

si > ∅ solu^n réel absolue

– INÉQUATION < > ≠

1 = transposi° x ÷ nb positif

2 renverse sens – négatif

3 risque

$0 < a < b \Rightarrow a^2 < b^2$

$a < b < 0 \Rightarrow a^2 > b^2$

mettre nos grosses

5) Valeurs approchées

écriture avec 1 nb représente ce nb lorsque la sy = satisfaite

$\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'} \Longleftrightarrow xy' = x'y$

$\frac{4}{2} = 2 \quad \frac{3}{5} = 0,6 \quad \frac{1751}{32} = 54,71875$

exactes

pratt exact = pas toujours utile ⩶ cas suivants

1 suite décimale limitée mais trop longue

$\frac{1751}{32} = 54,71\ldots$

2 ——— illimitée $1/3 = 0,33\ldots$

vaut mieux $\simeq$ $\frac{4}{7} = 0,57\ldots$

est proche de

$\underbrace{\frac{4}{5} \simeq 1 \quad \frac{4}{5} \simeq 0,5}$

suffit pour ... ...

Ex fondamental

~~π réel ... nbt~~

$\pi \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

proche $22/7$ + plus proche de $\frac{355}{113}$

préf

$\pi = 3,1415926535\ldots$

$\rightarrow$ on $\pi \simeq \frac{22}{7} \simeq \frac{355}{113} \simeq 3,1416$

$3,1415 < \pi < 3,1416$ encadré par 2 nbt

minore π valeur approchée par défaut de π

majore excès

$\pi - 3,1415 < 3,1416 - 3,1415$ soit $\pi - 3,1415 < 10^{-4}$

$3,1416 - \pi < 10^{-4}$

approchée à 10^{-4} près par défaut de π

· Déf

a "réel ~~exact~~ exact"

a' une v.a. de a

incertitude ~~relative~~ absolue est $a - a'$

——— relative $\frac{a-a'}{a}$

on ne peut pas calculer les inc

peut seulement avoir des majorants

de leurs val absolue

en perdant leurs signes

Pb traité $a = \frac{\sqrt{2}}{\pi - 1}$

trouver une val app ayant 2 déc

exactes, ou bien une val app à 10^{-2} près

2 notions pas les mêmes

calculs mais même

1. précaution on prend 2 déc de + que la

demande ou 4 en l'indique 10^{-2}

$\sqrt{2} = 1,4141...$ $\pi = 3,1415...$

2. 2 calculs

→ garantie résultat

par excès, 1 autre par défaut

Excès : $\frac{1,41(2)}{3,14(5)} = 0,6603....$ d'où $0,660(4)$ par excès

défaut $\frac{(1)}{(5)}$ ——— (3)

on a garanti $0,6603 < a < 0,6604$

3 $a \simeq 0,66$ avec 2 déc exactes

$\simeq 0,66$ à 10^{-2} près (par défaut)

en effet inc absolue est à coup sûr

majorée par 10^{-2}

par contre — rel $\frac{10^{-2}}{0,60}$ — ...

Formules utiles ε "petit" $\in \mathbb{R}$

$(1+\varepsilon)^{\alpha} \simeq 1 + \alpha\varepsilon$

$\sqrt{1+\varepsilon} \simeq 1 + \frac{\varepsilon}{2}$ $\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} \simeq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ $\frac{1}{1+\varepsilon} \simeq 1 - \varepsilon$

$\log(1+\varepsilon) \simeq \varepsilon$ $e^{\varepsilon} \simeq 1 + \varepsilon$

ε en rad $\sin \varepsilon \simeq \varepsilon$ $\operatorname{tg} \varepsilon \simeq \varepsilon$ $\cos \varepsilon \simeq 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$