① $\mathbb{N}$ et les str

entiers naturels

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$

$\mathbb{N}^*$

sont

$2n$

$2n+1$

SOURIAC $\mathbb{N}$, DÉNOMBREMENTS

(1) $\mathbb{N}$ et les str

entiers naturels

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$

$\mathbb{N}^*$

$(\mathbb{N}, \leq)$ tot ordonné

+ ou × → pas str intéressante

classif° usuelle
- pairs $2n$
- impairs $2n+1$

3) RÉCURRENCES

une p "générale" dép 1 entier
(c'est 1 rang ou numéro ordre)

peut ê symbolisée par $\underline{P(n)}$

Démonstration par récurrence 3 points

1. Vérifier (ou démontrer) $P(1)$ ou $P(0)$ suivant cas
2. Poser hyp qui traduit ~~...~~ $P(n-1)$ on démontre $P(n)$
3. Conclure : par réc, p est ✓ (en précisant si $n \in \mathbb{N}^*$ ou $\mathbb{N}$)

on sous entend démarche logique suivante

- 2. établit "T" $P(n-1) \Rightarrow P(n)$
- 1. établit $P(1)$ donc $P(1) \Rightarrow P(2)$ or ce qui prouve $P(2)$

de m̄ on établit alors $P(3)$ $P(4)$...

Ex

$P(n)$ étant

$$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

démontrer $P(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ par réc

1. $P(1)$ $\quad 1 = \frac{1+(1+1)}{2}$ vérifiée

2. hyp $P(n-1)$ s'écrit

$$1+2+\dots+(n-1) = \frac{(n-1)\,n}{2}$$

pour en déd $P(n)$

$$1+2+\dots+(n-1)+n = \frac{(n-1)\,n}{2}+n$$

or $\frac{(n-1)\,n}{2}+n = \frac{n^2-n+2n}{2}$ ce qui donne $\frac{n(n+1)}{2}$

donc $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ on a établi $P(n)$

3 Par réc P est démontrée n tout réel de $\mathbb{N}^*$

(3) Indices. factorielles

"numéros" désigner commodément
elts 1 Ens

ex: ~~E~~ $E = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\}$

on peut désigner un elt quelconque
de E par ~~u~~ u_i

~~u~~ "u indice i"

elts indexés (ou indicés)

peut écrire $E = \{u_i,\ 1 \leq i \leq n\}$

$= \{u_i\}_{1 \leq i \leq n}$

~~Pe~~ Peut "concentrer" en posséder
un nb non précisé de termes

$u_1 + u_2 + \dots + u_n$ $\quad \sum_{i=1}^{i=n}(u_i) \quad \sum_{1}^{n}(u_i)$

$\times \quad \prod$

cp Factorielle $1 \times 2 \times \dots \times n$ $\quad \boxed{\prod_{i=1}^{i=n}(i) \quad n!}$

$1! = 1$
$2! = 2$
$3! = 6$
$5! = 120$ etc

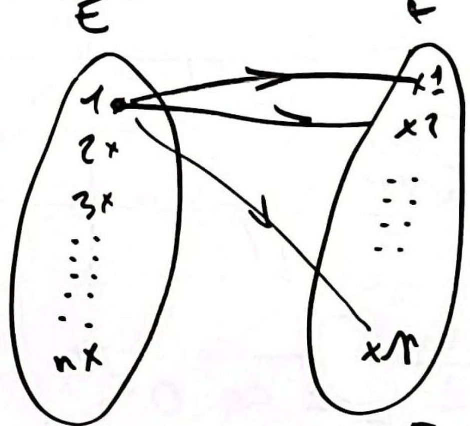
Convention $0! = 1$

4) DÉNOMBREMENTS

Compter

analyse combinatoire

• Nb applica°$^{\text{ns}}$ possibles de E dans F



$\boxed{p^n}$

card E = n   card F = p

preuve succincte

1 ∈ E on peut appliquer sur 1 elt de F de p manières

construire pour chaque elt de E

$$\underbrace{p \times p \times p \cdots \times p}_{n \text{ fois}} = p^n$$

• Nb bij de E sur lui $n!$

revient à permuter ses elts, ou à changer ordre

Compter "numérotages" possibles

$\boxed{P_n = n!}$

N°1 — 1 ~~...~~
reste (n-1) elts à numéroter
n-1

Preuve succ

• Nb injections possibles de $\{1, 2, \dots, p\}$ ds E

suppose card E = n et $p \leq n$

~~#~~ avoir Arrangement de p elts "pris parmi les n"

$$\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

PS Générer

ms on doit s'arrêter lorsque le N° p est attribué

p elts mt n N° ordre

SE ordonné de E

mais on peut retrouver mêmes elts ds un autre ordre autre nouvel A

ordre intervient

• Nb parties à p élts d'un ens E

$\text{Card } E = n$ et $p \leq n$

Combinaison de p élts "pris parmi n"

nb $\boxed{C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}}$

PS cf. A parmi

A_n^p s'E ordonnés

mais parmi eux on retrouve

$p!$ $\quad C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$ $\quad$ ordre intervient 2 fois

"ordre" → A

absence contenir A) ≠ C

ex : Course 7 partants

arrivée séparé

liste arrivée pos $P_7 = 7! = 5040$

liste ordonnée 3 premiers arrivés

$A_7^3 = \dfrac{7!}{4!} = 210$

3 ex-aequo

3 pris 7 sans ordre

$C_7^3 = \dfrac{7!}{3!4!}$ $\quad$ 35

5 Autres formules

~~B~~ Binôme Newton

· Nb tot parties de E

$\mathrm{Card}\, E = n$ $\forall$ or E fini

$\mathrm{card}\, \mathcal{P}(E) = 2^n$

D'où $C_n^0 + C_n^1 + \cdots C_n^n \ldots C_n^n = 2^n$

PS on peut dénombrer les parties en choisissant, pour chaque elt si elt est ou non dans une partie.

$E \to F = \{\text{oui}, \text{non}\}$

$\mathrm{card}\, F = 2$

· $C_n^m = C_n^{n-m}$ $\quad C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$

PS.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, pr ~~t~~ ts nbs a, b Non C

$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^m a^{n-m} b^m + \cdots C_n^n b^n$

$a = b = 1 \quad 2^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m$

Encore des formules ! !