"BAGAGE"
AVANT TERMINALE

NOTIONS FONDAMENTALES
(SOUMAC & KAMINSKI)

ENSEMBLES
SYMBOLES

$\emptyset$

$\cup$ ou
" soit un soit l'autre
ou les 2 à la fois "

$\cap$ et " les 2 à la fois "

DISJOINTS $A \cap B = \emptyset$

card E
$(A \cap B)$

$A \times B \times C$

$A \times B$

$e \in E$
$\subset$

$\forall$ quelque soit
pour tout

$\exists$ il existe au moins 1

$E = \{a, b, c\}$

$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset \ \{a\}\{b\}\{c\} \ \{a,b\}\{a,c\}\{b,c\} \ E\}$

$\mathcal{P}(E)$
parties
E
$\emptyset$
compris

E partie de E
$\emptyset$ partie de E
E — pleine
(───)

elts
couples
a pris A
b ─── B
chacun des manières possibles

$\Rightarrow$ implique
entraîne

$\Leftrightarrow$ est logt
équivalent à

ENSEMBLES SYMBOLES

$\cup$ ou "soit l'un soit l'autre ou les 2 à la fois"

$\cap$ et "les 2 à la fois"

$\emptyset$

DISJOINTS $A \cap B = \emptyset$

E partie de E

$\emptyset$ partie de E

$\boxed{O}$

E — plein (——)

Couvert (collectif soit E)

$\mathcal{P}(E)$

parties

E

$\emptyset$

16 parties

$E = \{a, b, c\}$

$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset \ \{a\}\{b\}\{c\} \ \{a,b\}\{a,c\}\{b,c\} \ E\}$

$e \in E$

$\subset$

$\forall$ quel que soit / pour tout

$\exists$ il existe au moins 1 / une

$\Rightarrow$ implique / entraîne

$\Leftrightarrow$ est logt équivalent à

Card E

P

$\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}\, A + \mathrm{card}\, B - \mathrm{card}(A \cap B)$

$\mathrm{card}(A \times B) = \mathrm{card}\, A \times \mathrm{card}\, B$

$\mathrm{card}\, \emptyset = 0$

$A \times B \times C$

n ens

n-uplets

triplets

$A \times B$

$A \times A = A^2$

$A = \{1, 4\}$

$B = \{0, 3, 6\}$

$A \times B = \{(1,0)\ (1,3)\ (1,6)\ (4,0)\ (4,3)\ (4,6)\}$

pour elts

tous les couples (a, b)

tq a — A

b — B

chacun des manières possibles

2 prop^{n}
SYN

Français $\longmapsto$ lang formalisé

lang formalisé $\longmapsto$ ______

"EST TRADUIT..."
"..... EST LOG^T ÉQUIVALENT À"

X EST ENS VIDE $\longmapsto$ $X = \emptyset$

$\neg(p \wedge q) \longmapsto (\neg p) \vee (\neg q)$

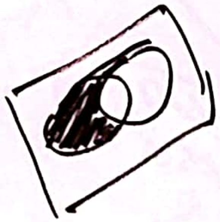
ENS

$E \times F = \{(x,y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}$

Formules de Morgan

$(X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c$

$(X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c$



$X \setminus Y = \{x \in E \mid x \in X \text{ et } x \notin Y\}$

$= X \cap Y^c$

Fini

$X = \{a, b, c, d\}$;

$a \in X$

$f \notin X$

$\{a, b\} \subset X$

Infini

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots\}$

2 usages points suspension

derniers : expliquer qu'il existe une infinité de naturels

$X \subset E \longmapsto X \in \mathcal{P}(E)$

$= 2^E$

$X \subset E$

$X^c = \{x \in E \mid x \notin X\}$

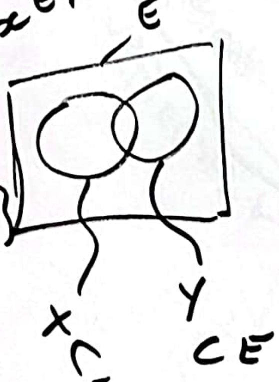
$X \cap X^c = \emptyset$

$X \cup X^c = E$

$X \cap Y = \{x \in E \mid x \in X \text{ et } x \in Y\}$

les 2 à la fois

$X \cup Y = \{x \in E \mid x \in X \text{ ou } x \in Y\}$



soit un autre

soit les 2

ENS (E) & LOGIQUE

CONJUGÉE

$(p \Rightarrow q)$ directe $\longmapsto (\neg q \Rightarrow \neg p)$ contraposée

$(q \Rightarrow p)$ réciproque ou converse $\longmapsto (\neg p \Rightarrow \neg q)$ inverse

IMPLICATION

$p \Rightarrow q$ $\longmapsto (\neg p) \vee q$

implique

si ... non

NÉGATION 1 QUANTIFIÉE p

$\neg(\cancel{\forall} x, p) \longmapsto \exists x, \neg p$

$\exists$ $\forall$

EXISTENTIEL

$X \neq \emptyset$

$\Updownarrow$

$\exists x \in X, p$

"il existe au moins un élément x pour lequel p est V"

QUANTIFICATEUR UNIVERSEL

$X = E \longmapsto \forall x \in X, p$

"pour tout elt de X p est V"

$X = \{x \in E \mid p\} \longmapsto$

(partie de E pr les elts de laquelle p est vraie)

pour

$X^c = \{x \in E \mid \neg p\}$

$Y = \{x \in E \mid q\}$

$X \cap Y = \{x \in E \mid p \wedge q\}$

~~X∪Y~~ $\cup$ $\vee$

DE MORGAN (négation d'1 conjonction $\wedge$ / disjonction $\vee$)

$\neg(p \wedge q) \longmapsto (\neg p) \vee (\neg q)$

$\vee$ $\wedge$

ENS
LOG
(2)

DOUBLE IMPLICATION

$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

I — = signification

$p \Leftrightarrow q$

I

p ssi q

iff

DEDUCTION

$p \wedge (p \Rightarrow q) \longmapsto (p \vdash q)$

vraie or

mp

de p je déduis q

R_s (1) BINAIRES DS 1 ENS E

R BIN DS 1 ENS E

SUBSIDIAIRE

EST UNE PROP comme quoi peuvent + vérifier (ou non) les élts de E×E

EX

$E = \{p, m, e_1, e_2\}$ FAMILLE

père mère enfants

si R veut dire "est enfant de"

on peut écrire

$e_1 R p$

$e_1 R m$ "car c'est vrai"

$e_2 R p$

$e_2 R m$

$p \not R e_1$ non $(p R e_1)$ — FAUX

GRAPHE

est l'ens des couples de E×E pour lesquels R est vérifiée

$\{(e_1,p),(e_2,p),(e_1,m),(e_2,m)\}$

P POSSIBLES

TRANSITIVITÉ

≈ CHASLES

aRb et $bRc \Rightarrow aRc$

ANTISYMÉTRIE

aRb et $bRa \Rightarrow a=b$

SYMÉTRIE

"2 sens"

$aRb \Leftrightarrow bRa$

RÉFLEXIVITÉ

aRa $(\forall a \in E)$

lorsque l'élt vérifie R avec lui même

$\mathcal{R}$ (2)

ORDRE

- $(\mathbb{R}, \leq)$ tot^t ordonné
- $\mathbb{N}^*$ muni de $\mathcal{R}$ « a divise b » pas tot^t : 3 divise 7 n'est pas vérifiable
- PARTIEL : lorsque on peut trouver au moins un couple $(a, b) \in E^2$ ne vérifiant pas $\mathcal{R}$
- TOTAL : E tot^t ordonné par $\mathcal{R}$; lorsque pour tout couple (a,b) de E^2 l'on a $a\mathcal{R}b$ ou $b\mathcal{R}a$
- ORAT : O, R, A antisym, T
- EX : $a\mathcal{R}b$ « a est inférieur ou égal à b » $\leq$

ÉQUIVALENCE

- E : Réf, Sym, Trans
- EX $\mathbb{Z}$: $a\mathcal{R}b$ signifie « a-b est multiple de 3 »
- mult. ? divise ? en 2 parties sur lesquelles...
- 2, 4, 6, 8 multiple de 2
- CLASSE D'ÉQUIV DE a modulo $\mathcal{R}$: ens de ts les elts x de E qui vérifient $x\mathcal{R}a$ pour a fixé s'appelle classe d'équiv de a modulo $\mathcal{R}$
- ens des C.É. (modulo $\mathcal{R}$) (ds E) : est un ens de parties de E disjointes 2 à 2

$\frac{E}{\mathcal{R}}$ $E/\mathcal{R}$ « ens quotient de l'ens E par la relation $\mathcal{R}$ »

$\mathcal{R} = (E, F, G)$

DÉF ANN

GRAPHE DE $\mathcal{R}$

$G \subset E \times F$

$(x,y) \in G \longmapsto x\mathcal{R}y$

on peut considérer $\mathcal{R}$ comme une certaine application de $E \times F$ dans l'ensemble des valeurs de vérités {vrai, faux}

$E \times F \longrightarrow \{V, F\} = \{1, 0\}$

$(x,y) \longmapsto 1 \longmapsto x\mathcal{R}y$

$(x,y) \longmapsto 0 \longmapsto \neg(x\mathcal{R}y)$

DANS E ssi $E = F$

ÉQUIV

PARTIES ou CLASSES X de E DÉFINIT UNE PARTITION DE E NOTÉE $(X_1, X_2 \dots)$

VÉRIFIANT $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n = E$

$X_i \cap X_j = \emptyset$ ssi $i \neq j$

et pour tout i $X_i \cap X_i \neq \emptyset$

$x\mathcal{R}y$ ssi $\exists X_i$ tq $x \in X_i$ et $y \in X_i$

PRÉORDRE SYM

$x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$

ORDRE

PRÉORDRE ANTISYM

$x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$

PRÉORDRE

PRT

R

$\forall x \in E \ x\mathcal{R}x$

T

$\forall x, \forall y, \forall z \ x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$

ens OBJET — ens IMAGE

DÉP / SOURCE — ARR / BUT

$$f : \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{array} \right.$$

symbole / nom — f

$\forall$ elt x doit avoir un correspondant $f(x)$

zéro ou 1

"f"

transformé / image de x par f / val de f au point x

- elt INITIAL
- VARIABLE
- ANTÉCÉDENT de $f(x)$

on

APP^NS / FONC^NS

GRAPHE G_f

ens couples (x, y) de $E \times F$ t.q. on forme soit l'image par f du 1er terme

" $\{(x,y) \in E \times F \,/\, y = f(x)\}$ "

" $\{(x, f(x)) \in E \times F\}$ "

graphe ou peut rep. E et F par schémas

"graphe naturel"

ou "f"

REP GRAPHIQUE

rep graphique de f ds CBE

ABUS

de G_f

ET ALORS

ens POINTS $M(x,y)$

d'ÉQUATION $y = f(x)$

$E = F = \mathbb{R}$

ordonnée

graduée

ABSCISSE

O

ORIGINE

O ROND ou seulement ⊂

4

Unique quelconque soient 2 élt, choisis distincts, ils ont des images distinctes

INJECTIVITÉ

PART on pose $f(x) = f(x')$

on cherche des solutions : f est une inj si on trouve une sol et une seule ds E, à savoir $x = x'$

GÉNÉRALITÉS SUR APPLICATION

ou 1 $f(x)$

SURJECTIVITÉ

EX $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow f(x) = 2x^3$

$2x^3 = 2x'^3$

$x^3 - x'^3 = 0$

$(x - x')(x^2 + xx' + x'^2) = 0$

Sol évidente $x = x'$

$\Delta = -3x'^2$

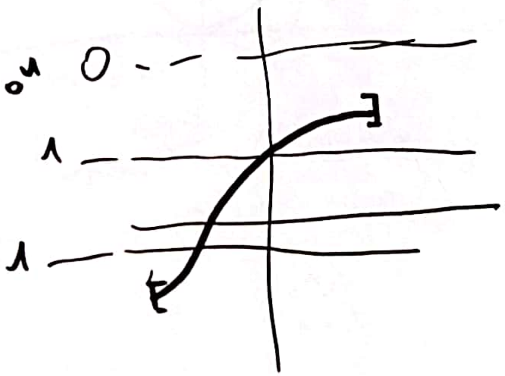
seule pos ds $\mathbb{R}$ si $\Delta \geq 0$

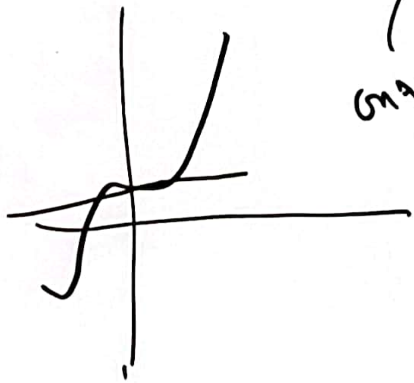
$x' = 0$

$x^2 = 0$

ds $x = 0$

$\Rightarrow x = x'$





SURJ

ens images ou ens image F (donné)

Généralement on aussi $f(E) = F$

en prat.

pose $f(x) = y$ avec hyp $y \in F$

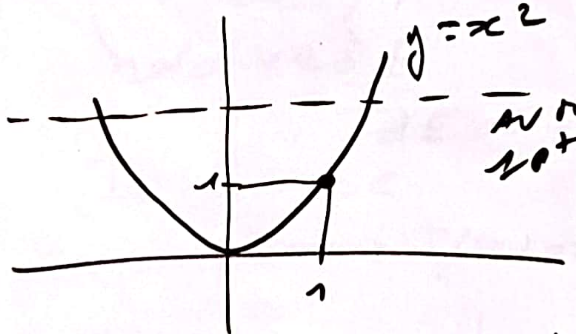
on cherche solⁿ x

on trouve au moins une sol ds E donné

$$f(x) = 4x^2 \qquad \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

$$= y \Rightarrow x^2 = \frac{y}{4}$$

hyp ici $y \geq 0 \Rightarrow \underbrace{x = \frac{\sqrt{y}}{2} \text{ ou } -\frac{\sqrt{y}}{2}}_{\in \mathbb{R}}$



au moins 1 pt intersection

peut restreindre f ~~surj~~

$\rightarrow$ ens $F \to F(E)$

~ arrivée

Bij = inj & surj

O ROND — ou seulement $\circ$

$$f : \begin{cases} E \to F \\ x \mapsto f(x) \end{cases} \qquad g : \begin{cases} F \to G \\ x \mapsto g(x) \end{cases}$$

Composée de g par f $\quad g \circ f$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & f(x) \arrow[r, "g"] & g[f(x)] \end{tikzcd}$$

$$g \circ f : \begin{cases} E \to G \\ x \mapsto g \circ f(x) = g[f(x)] \end{cases}$$

prat on pose $f(x) = y$, on exprime $g(y)$ puis on remplace (ds expr obtenue) y par exprⁿ $f(x)$

$f(x) = x^2$ $\qquad g(x) = \frac{1}{x^2+1}$

1 $\quad g(y) = \frac{1}{y^2+1} \Rightarrow g[f(x)] = \frac{1}{(x^2)^2+1}$

$\to g \circ f(x) = \frac{1}{x^4+1}$

2 $\quad f(y) = y^2 \Rightarrow f[g(x)] = \frac{1}{(x^2+1)^2}$

$\to f \circ g = \frac{1}{x^4+2x^2+1}$

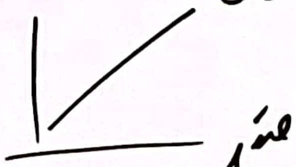
$g \circ f \neq f \circ g$ en gén

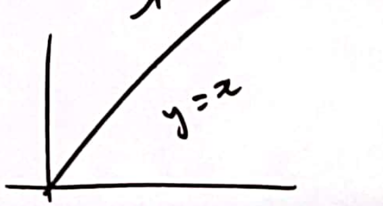
Identité ou app identique relative à E

Id_E ou Id

$Id : \begin{cases} E \to E \\ x \longrightarrow I_d(x) = x \end{cases}$

G = diag de E^2





. Réc 1 bij f

f^{-1}

$f(x) \longmapsto x$

image $\qquad$ antec

$f^{-1} \begin{cases} F \to E \\ x \longrightarrow f^{-1}(x) \end{cases}$

peut poser $f(x) = y$

résout relat à $x \to x = f^{-1}(y)$

on échange x et y

. $f(x) = 1 - x^3$

$f(x) = y$ s'écrit $1 - x^3 = y \Rightarrow x^3 = 1 - y$

$\to x = \sqrt[3]{1-y}$

$y = \sqrt[3]{1-x}$

$f^{-1} \circ f = Id_E$

$f \circ f^{-1} = Id_F$

FONCTIONS

à valeurs ds

DS ?

$$f : E \longrightarrow F$$

$$x \longmapsto f(x) = y$$

ARGUMENT

il existe une valeur y au **plus**

D_f dom on est déf

SE de E pour lesquels il existe une valeur de f

? elles de

on dit alors

f est une application de D_f DANS F

ou

VERS

$$\mathrm{Im}\, f = \{y \in F \,/\, \exists x \in E,\ y = f(x)\}$$

SE de F qui ont des antécédents par f

INJ ssi

$(f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$

AU +

SURJ ssi

$\forall y \in F,\ \exists x \in D_f\ \ y = f(x)$

I $\mathrm{Im}\, f = E$

AU −

BIJ

(5) LC

- D Gen application

$E \times F \longrightarrow G$

DANS

CP usuels

LCI définie sur E

$E \times E \longrightarrow E$

opération interne

LCE déf sur E à l'aide de K

$K \times E \longrightarrow E$ opéra° ext déf avec K

Ex

1 $\left| \begin{array}{l} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ (p,q) \longrightarrow pq \end{array} \right.$ somme de p entiers égaux à q

2 Produit vecteurs de $\mathbb{R}^2$ par scalaires de $\mathbb{R}$

$\left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\lambda, \vec{v}) \longrightarrow \lambda \vec{v} \end{array} \right.$

obtenu en $\times$ T composants de $\vec{v}$ par réel λ

D Associée *

$\left| \begin{array}{l} E \times E \longrightarrow E \\ (a,b) \longrightarrow a * b \end{array} \right.$ $(E, *)$

. interne

$\forall (a,b) \in E \times E : a * b \in E$

. Associativité

. Associative lorsque

* associative $(a*b)*c = a*(b*c)$, $\forall (a,b,c) \in E^3$

. Commutative

$a * b = b * a$, $\forall (a,b) \in E^2$

. Elt neutre ds $(E, *)$

lorsqu'il existe e ~~ant~~ ds E

pr tout a de E $a*e = e*a = a$

Si e existe, il est unique

Si il existe e tq on ait seulement

$e * a = a$ $(\forall a \in E)$

↳ neutre à gauche

. Elts sym ds $(E,*)$

lorsque e existe,

sym de $a \in E$ est

ensemble existe ~~est~~ ds E,

a' qui vérifie

$a*a' = a'*a = e$

Si a' existe, il est unique

Si il existe a' tq on ait seul^t $a'*a = e$

sym à G de a

Cas usuels

- opération additive $+$ 0 ou 0_E

sym est dit opposé $-a$

$\times$ ou pas de signe

1 ou 1_E

inverse a^{-1} ou $1/a$

. Propriétés à 2 lois internes

$* \quad T$

distributivité de T par rapport à $*$

lorsque on a pr ts a, b, c de E

à G 1. $aT(b*c) = (aTb)*(aTc)$

à D 2. $(b*c)Ta = (bTa)*(cTa)$

6 GROUPES ANNEAUX CORPS

$E \ast T \quad (E,\ast) \quad (E,\ast,T) \dots$

E a 1 certaine str
lorsque la ou les lois
possèdent certaines propriétés

- GROUPE
$(E,\ast)$

i 1 $\ast$ interne
A 2 $\ast$ associative
N 3 un elt neutre existe dans $(E,\ast)$
S 4 un sym existe pr tt elt

abélien $\ast$ commutative

si, suffit d'avoir un neutre
à D ou les sym à D (par ex)
pr ê assuré qu'ils sont neutres
ou sym "tout court"

(A 2 / $\mathbb{Z}$ 2)

- ANNEAU
$(E,\ast,T)$
. $(E,\ast)$ G abélien
. T interne et associative
. T distr par rapport à $\ast$

(A commutatif lorsque l'anneau avec T aussi com.

unitaire — — "aussi neutre ds (E,T)"

- CORPS
. $(E,\ast,T)$ Anneau unitaire
. tout elt, sf neutre ds $(E,\ast)$ possède un sym ds (E,T)

Com T aussi"

. Zéro $(E,\ast,T)$ 0_E neutres
. unité 1_E

Diviseur de zéro → si 2 elts distincts en genre vérifient
$a \neq 0_E, b \neq 0_E$
et $a T b = 0_E$

$(E,\ast,T)$ si il y a des
pas intègre

intégrité

Corps est intègre $aTb = 0 \Rightarrow [a = 0$ ou $b = 0]$

7 MORPHISMES

HOMOMORPHISME

$$f : \left| \begin{array}{l} (E,*) \longrightarrow (F,T) \\ x \longmapsto f(x) \end{array} \right.$$

lorsque

$$\forall (x,x') \in E^2 : f(\underbrace{x * x'}_{DSE}) = \underbrace{f(x)\, T f(x')}_{DSF}$$

transpose la loi $*$ de E en loi de F T

$(\mathbb{Z},+)$ $5^{n \in \mathbb{Z}}$

$$f : \left(\begin{array}{l} (\mathbb{Z},+) \longrightarrow (F,\times) \\ n \longrightarrow f(n) = 5^n \end{array} \right.$$

$f(n+n') = 5^{n+n'}$ donc $f(n+n') = 5^n \times 5^{n'}$

or $5^n_{n'} = f(n)_{n'}$ donc $f(n+n') = f(n) \times f(n')$

ENDO CP $E=F$ or eventuellement T or $*$ identiques

f plusfois ~~ENDO~~ homom ens.

s'il y a plus opérations E

ou F

ISOM f E F
Bij

AUTOM $F=E$

pas nec T $* = T$

+ svt étude

entre 2 G A

on voit plus ça

la loi resp

"chemin à chemin"

8 EV

2 bis — TYPE + — INTERNE $E \times E \to E$

EXTERNE 1 Aide 1 GrPS $\mathbb{K} \times E \to E$

$\mathbb{K}$ DES scalaires

$\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$

E

ENS aucun symbole pour LE

$\vec{u}$ $\vec{v}$ vecteurs

scalaires $\mathbb{K}$ λ, μ) écrits expressions

D E est un EV sur le corps $\mathbb{K}$

= $\mathbb{K}$-EV Groupe muni de 2 L

ayant P suivantes

1 Li + $(E,+)$ G abélien

2 LE est produit par scalaire

$$\begin{vmatrix} \mathbb{K} \times E \to E \\ (\lambda, \vec{u}) \to \lambda\vec{u} \end{vmatrix}$$

vérifié pr ts vecteurs et ts scalaires

- $\lambda(\mu\vec{u}) = \underbrace{(\lambda\mu)}_{\text{produit ds } \mathbb{K}}\vec{v}$
- $\lambda(\vec{u}+\vec{v}) = (\lambda\vec{u}) + (\lambda\vec{v})$ DISTRIBUTIVITÉ
- $(\lambda\vec{u}) + (\mu\vec{u}) = \underbrace{(\lambda+\mu)}_{\text{somme ds } \mathbb{K}}\vec{u}$
- $\underbrace{1}_{\text{unité ds } \mathbb{K}}\vec{u} = \vec{u}$

e nul ds $(E,+)$ est appelé vecteur nul

$\vec{0}$ ou $\vec{0}_E$

1 ESP AFFINES

~~$\mathcal{E}$ LE à l'aide EV E (d'ds $\vec{u}, \vec{v}, \dots$)~~

~~peut~~ ê muni

un ENS $\mathcal{E}$ peut ê muni d'une LE à l'aide un EV E d'ds $\vec{u}\ \vec{v} \dots$

direction de $\mathcal{E}$ + noté

elts $\mathcal{E}$ P Q M **points**

D $\mathcal{E}$ est un EA (d'EV dir E) lorsqu'on a défini une LC + schéma:

$$+ \left| \begin{array}{l} E \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \\ (\vec{u}, M) \longrightarrow M + \vec{u} \end{array} \right.$$

vérifiant pr ts points et ts vecteurs

1 $(M + \vec{u}) + \vec{v} = M(\underbrace{\vec{u} + \vec{v}}_{\text{somme ds } E})$

2 $M + \vec{o}_E = M$

unique vecteur vérifiant $M + \vec{x} = M$ $\forall M \in \mathcal{E}$

3 pr tout ~~couple~~ bipoint (P, Q) de $\mathcal{E}$ il existe un vecteur $\vec{u}$ de E tq $Q = P + \vec{u}$

si P et Q sont fixés $\vec{u}$ est unique

$Q = P + \vec{u}$

$Q - P = \vec{u}$ convention $= \overrightarrow{PQ}$

$\overrightarrow{PQ} = \vec{u}$

$Q = P + \vec{u} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{MM} = \vec{o}_E$

$Q = P + \overrightarrow{PQ}$

P $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MQ} \Leftrightarrow P = Q$ (R CHASLES)

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MQ}$

P (pas repasser vecteurs aux points)

- A pt fixé $f: \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathcal{E} \\ \vec{u} \longrightarrow A + \vec{u} = M = f(\vec{u}) \end{array} \right.$

Bijection

ramène vecteurs à la m origine et $\mathcal{E}$ ens extrémités vecteurs E

lorsque ces derniers sont reportés à m origine)

STR ALG   GACV

$(E, *)$ G ⟼ Axiomes I → V ont vérifié

I. $E \neq \emptyset$

II $*$ LCI DS E   APPLICATION DS

$$*: E \times E \longrightarrow E$$
$$(x, y) \longmapsto x * y$$

III $*$ ASSOCIATIVE

$\forall x, y, z$, $(x*y)*z = x*(y*z)$

IV Il existe un elt <u>neutre</u> e pour $*$

$\forall x \quad x*e = e*x = x$

V tout elt de G a un <u>inverse</u>

$\forall x \; \exists x' \quad x*x' = x'*x = e$ $\quad x^{-1}$

$+$ → sym ou <u>opposé</u>

GANS   Abélien

Groupe $*$ GM

<u>GANS</u>

G fini d'ordre n

E contient n elts distincts

$(\mathbb{Z}, +)$ $(\mathbb{R}^*, \times)$

∃ 2 G d'ordre 4

→ G rotations du carré

G de Klein

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

a	b	c	d
b	a	d	c
c	d	a	b
d	c	b	a

ou cyclique

~~GANS C~~
GANS C

ANNEAU

$(E, *, \perp)$ LCI

I $(E, *)$ GC

II $\perp$ A

III $\perp$ DIST / $*$

$\forall x, \forall y, \forall z \quad x \perp (y * z) = (x \perp y) * (x \perp z)$

UNITAIRE ssi il existe un elt neutre pour $\perp$

C si $\perp$ com

$(\mathbb{Z}, +, \times)$ CGA unitaire

ens poly à coef reels est un A pour lois + et $\times$

CORPS $(E, *, \perp)$ A unitaire
sauf neutre e pour $*$
a un inverse pour $\perp$

Corps rationnels $(\mathbb{Q}, +, \times)$
$(\mathbb{R}, +, \times)$
il existe corps ~~G unitaire~~
que GC A
QUATERNIONS

VECTORIELS

$V = (E, \mathbb{R})$ — corps scalaire
vecteurs

on peut def vectoriels sur autres G

V ev un vectoriel sur $\mathbb{R}$

I $(E, +)$ GC

II $\exists$ LCE a operateurs réels tq
$(E, \mathbb{R}) \longrightarrow E$
$(\vec{v}, \alpha) \longmapsto \vec{w} = \alpha \vec{v}$

$1 \vec{v} = \vec{v}$

$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \forall \vec{v} \in E$

$\alpha (\beta \vec{v}) = (\alpha \beta) \vec{v}$

$\alpha (\vec{v} + \vec{v}') = \alpha \vec{v} + \alpha \vec{v}'$

$(\alpha + \beta) \vec{v} = \alpha \vec{v} + \beta \vec{v}$

$\mathbb{R}^2 \quad \mathbb{R}^3$

NOMBRES

$\mathbb{N}$ $\overset{+}{\times}$ LCI $\overset{A}{C}$

$\times$ DIS/+ $\leq$ ordre total

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ entiers CA unitaire

ANNEAU

$\mathbb{Q}$ — rationnels CAPI

partout dense pour ordre

(si a et b 2 rationnels distincts et a < b

il existe au moins un rat x

+y a ≤ x ≤ b

$\mathbb{D}$ Anneau ~~des rationnels~~ décimaux $\subset \mathbb{Q}$

il existe rat décimaux 1/3

$\mathbb{R}$ Corps tot ordonné et archimédien

quelque soit a il existe un

b > 0 naturel n

tels que

a < n b

Fonctions num

f 1er degré

lin coef a

$f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto f_{a,b}(x) = ax + b$

0

$\neq 0$ affine

Graphique en une droite

tte ~~fct~~ est une bij $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

2e degré

g_{abc} $(a \neq 0)\ x \longmapsto g(x) = ax^2 + bx + c$

parabole

à minimum ssi $a > 0$

maximum $< a$

homographiques $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \to \mathbb{R}$

$(d \neq 0)$ $\longrightarrow h(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

non définie

hyperbole

asymptotes

$cx + d = 0$

$cy - a = 0$

Opérations sur les f^{ns}

f déf sur $E \subset \mathbb{R}$

g — F

$f+g$ $f \cdot g$ af f^n définie

$E \cap F$ E

$\forall x \in E \cap F$ $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$(f \cdot g)(x) = f(x) \times g(x)$

$\forall x \in E$ $(af)(x) = a \times f(x)$

1ère & 3ème ∠ maximisent

ens fns sur déf str voc sur $\mathbb{R}$

HOMOMORPHISMES

h / $G(E,*)$ ds $G(F,\perp)$

ssi $h : E \to F$ $\forall y$

$h(x*y) = h(x) \perp h(y)$

$\mathrm{Im}\, h = \{t \in F / \exists x \in E \; t = h(x)\}$

$\mathrm{Ker}\, h = \{x \in E \mid h(x) = \underbrace{e}_{\text{neutre}}\}$

iso bij

endo $E = F$

auto

Formes bilinéaires ds vec $\mathbb{R}^2$

FB alternée $\underbrace{\varphi(\vec{v}, \vec{v}')}_{\text{Linéarité}} = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$

ssi $\neq 0$

— sym = PS $\vec{v} \cdot \vec{v}' = (\vec{v} \mid \vec{v}') = xx' + yy'$

Norme euclidienne de $\vec{v} = \|\vec{v}\| = \sqrt{(\vec{v} \mid \vec{v})} = \sqrt{x^2+y^2}$

$\|\vec{v}\| = 0$ ssi $\vec{V} = \vec{0}$ $\|\lambda v\| = |\lambda| \times \|v\|$

For Schwarz

$|(\vec{v} \mid v')| \leq \|\vec{v}\| . \|\vec{v}'\|$

Minkowski

$\|\vec{v} + v'\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{v}'\|$

Endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ ★

h est une AL ou f ssi

$\forall \vec{v}, \forall \vec{v}'$ $h(\vec{v} + \vec{v}') = h(\vec{v}) + h(\vec{v}')$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $h(\lambda \vec{v}) = \lambda h(\vec{v})$

(i, j) base canonique de $\mathbb{R}^2$

$\forall \vec{v}, \exists! (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$

h complètement déterminée

par $h(\vec{i}) = a\vec{i} + b\vec{j}$

et $\vec{j}$ c d

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x' = ax + cy \\ y' = bx + dy \end{cases}$

h autom ssi $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \neq 0$

Composition $k \circ h = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{matrix} \alpha a + \gamma b & \alpha c + \gamma d \\ \beta a + \delta b & \end{matrix}$ $P_{\vec{u}}$

autom $\perp$ ssi $\| \; \| = \varepsilon$ $\varepsilon \in \{+1, -1\}$

$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$\varepsilon = +1$ rot vect

-1 sym —

ε