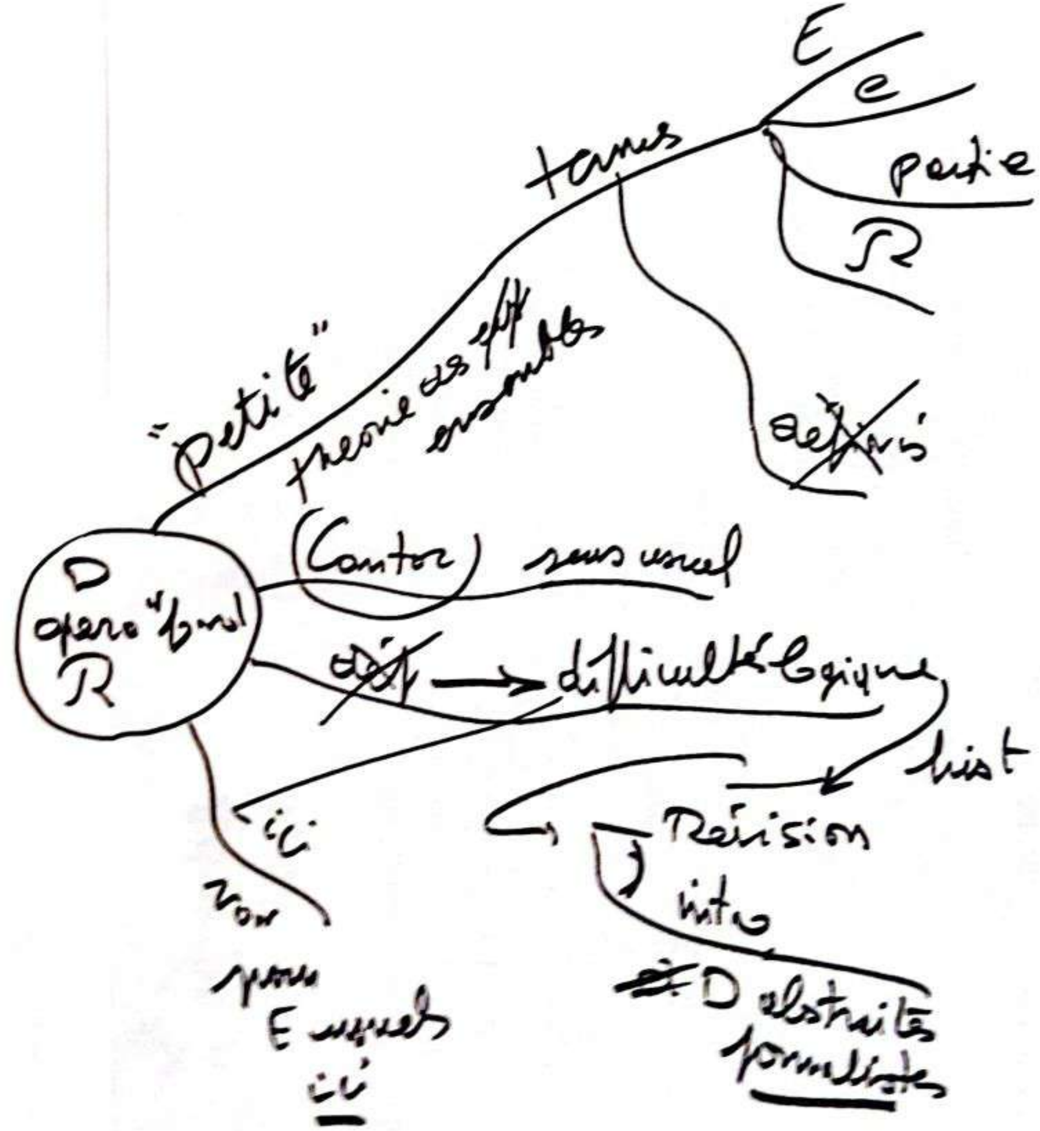
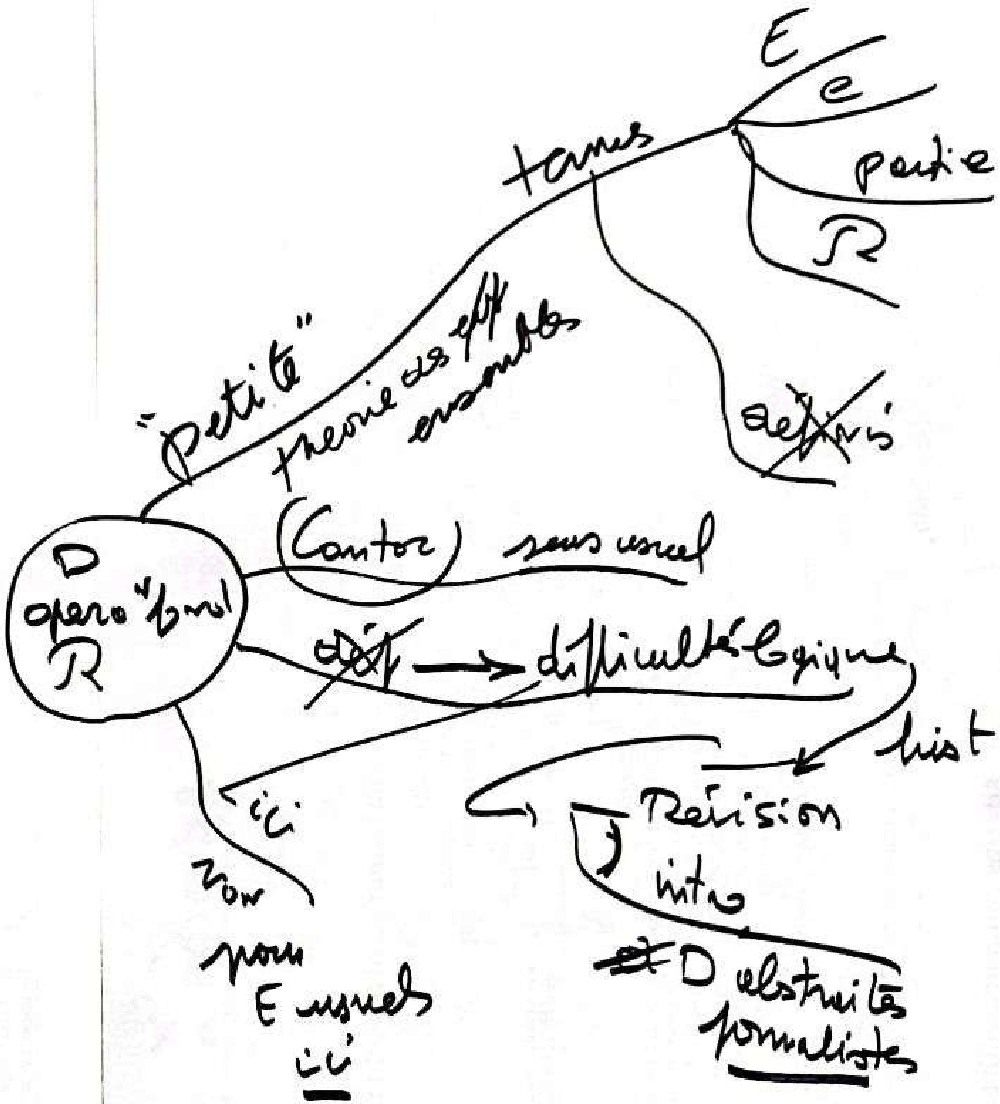
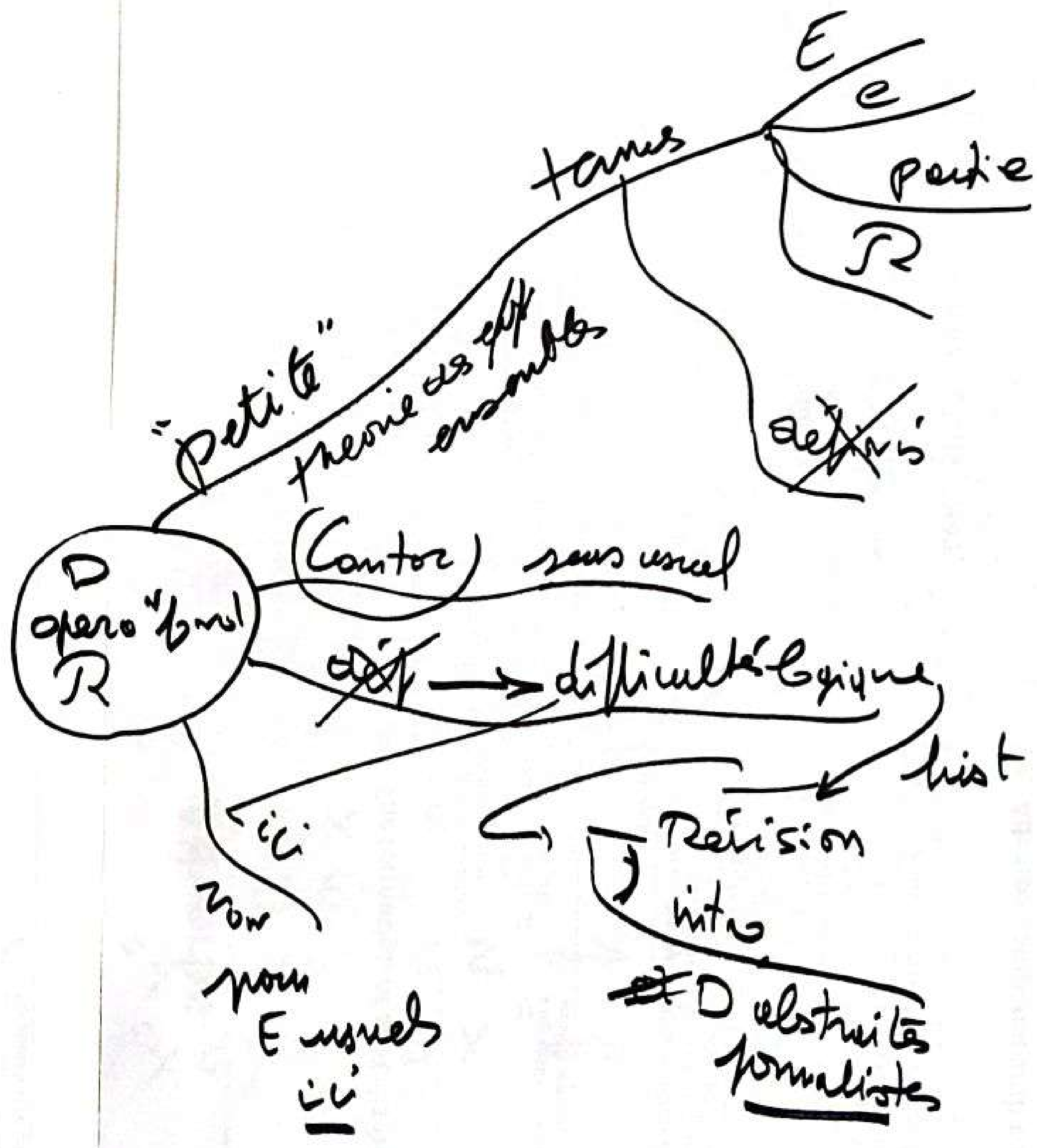


CAR. PAN. MATHS. ANNEXE.
THÉORIE ENSEMBLES



Definitions
Operations fondamentales
Relations



D
opérat° formel
R
"petite"
théorie des ensembles
E
e
partie
R
(Cantor)
sens usuel
difficulté logique
hist
Révision
intro
D abstraites
formalistes
ici
non
pour
E usuels
ici

Eléments et partie d'un E

relation inclusion

E $(F, G \ldots)$

$(a, b, \ldots x)$

$x \in E$ nég cette P $x \notin E$

$\emptyset$ ne contient ~~...~~ aucune e

fini nb fini ce nb est le card de E

infini aussi gd que l'on veut

Etant donné — E

— 1 P d'une e de E,

ts es qui possèdent cette →

Nd E Sous Ensemble de E

= une partie

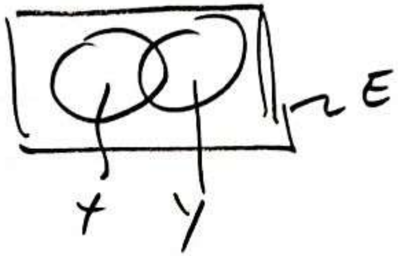
$E = \{a, b, c\}$ Contient 8 parties = SE

$\emptyset, \{a\} \{b\} \{c\} \{a,b\} \{b,c\} \{a,c\} \{a,b,c\}$

E parties $\mathcal{P}(E)$ si card $E = n$

$\mathcal{P}(E)$ contient ~~2~~ 2^n éléments

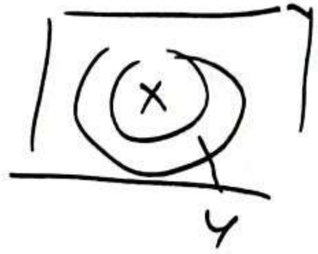
$8 = 2^3$



Si la P $x \in X \Rightarrow x \in Y$

(c.a.d si tt e de X est aussi une de Y)

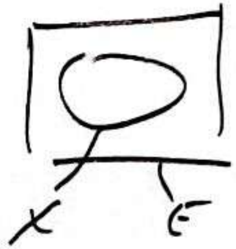
X est inclus ds Y



Y contient X

$X \subset Y$ $Y \supset X$

nég ~~cette~~ cette R



$X \not\subset Y$ $Y \not\supset X$

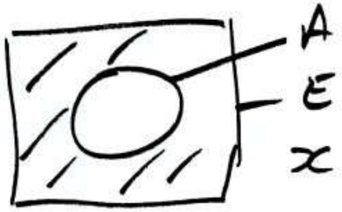
on a en part $\forall X \subset E$

$\emptyset \subset X$

$X \subset E$

"$X \subset Y$ et $Y \subset Z$" $\Rightarrow$ "$X \subset Z$"

"$X \subset Y$ et $Y \subset X$" $\Rightarrow$ "$X = Y$"



$x \in E$

- E es x qui possèdent en outre la P "$x \in A$" n'est autre que A
- E ~~es~~ es E qui ne possèdent pas cette P c.a.d. pour lesquels $x \notin A$
- E complémentaire de A (dans E)

$\complement_A \quad E-A \quad \overline{A}$

E : E entiers < 100

A : pairs ≤ 100

$\complement A$: impairs < 100

☒ Opérations ~~xx~~ sur les Es

. = A et B rep le même objet

$A = B$ nég $\neq$

. $\cup$ X Y

S ~~des~~ es qui $\in$ à l'un au moins

Es X ou Y $S = X \cup Y$

. $\cap$ P à la fois $= X \cap Y$

Si $X \cap Y \neq \emptyset$, se rencontrent

$\cap = \emptyset$ disjoints

• Recouvrement d'un E

E(X_i) d'Es dont $\cup$ est E

$$\bigcup_i X_i = E$$

Partition

(X_i) de E tq pour tout couple indices (j,k) différents $(j \neq k)$,

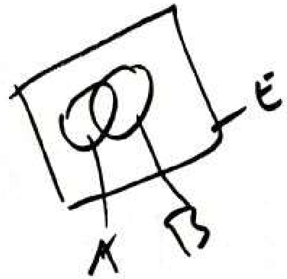
$$X_j \cap X_k = \emptyset$$

c'est donc un E de parties de E disjointes 2 à 2, dont $\cup$ est E

. $\forall$ X, Y Z

~~réf~~ règles fond

de calcul sur les Es ↓



(1) $\emptyset = \complement E$

$E = \complement \emptyset$

(2) $\complement(\complement A) = A$

(3) $A \cup A = A \quad A \cap A = A$ idempotence

4) $A \cup (\complement A) = E \quad A \cap (\complement A) = \emptyset$

5) $A \cup \emptyset = A \quad A \cap E = A$

6) $A \cup E = E \quad A \cap \emptyset = \emptyset$

7) $A \cup B = B \cup A$ com

$A \cap B = B \cap A$

8) $A \subset (A \cup B) \quad (A \cap B) \subset A$

9) $\complement(A \cup B) = (\complement A) \cap (\complement B)$

$\cap \qquad \cup$

(10) $A \subset B \Leftrightarrow \complement A \supset \complement B \Leftrightarrow A \cup B = B$

$\Leftrightarrow A \cap B = A$

(11) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset \complement B \Leftrightarrow B \subset \complement A$

12) $A \cup B = E \Leftrightarrow \complement A \subset B \Leftrightarrow \complement B \subset A$

(13)

$A \cup (B \cup C) = \cancel{(A \cup B) \cap (A \cup C)}$ $\cup$

$= (A \cup B) \cup C$

$\cap$ Associativité

14) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$\cap \quad \cup \qquad \cap \quad \cup \quad \cap$

Dist $\cup / \cap$

$\cap / \cup$

15) $A \subset B \Rightarrow$

$(A \cup C) \subset (B \cup C)$

et $\cap \qquad \cap$

modifie 2 sens

1 inclusion

$+ = +$

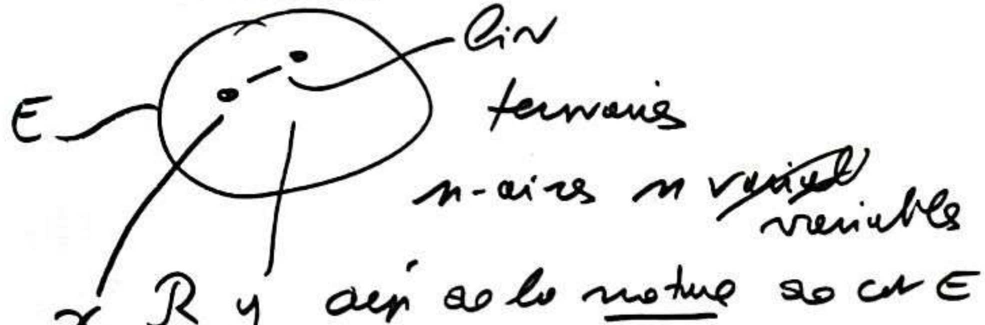
$- \quad -$

16 $(C \subset A$ et $C \subset B)$

$\Leftrightarrow [C \subset (A \cap B)]$

$A \subset C \quad B \subset C \;(\Leftrightarrow)\; [(A \cup B) \subset C]$

R binaires



n-aires n ~~variab~~ variables

x R y agit sur la nature des é de E

peut

R "parallèle à" ~~entre~~ des D

dans E droites 1 plan

Soit x, y 2 var 1 ∈ E

$\mathcal{R}$ $\mathcal{R}(x,y)$

signifie que (x,y) vérifie $\mathcal{R}$

y ~~R~~ $\mathcal{R}(x,y)$

x

non $\mathcal{R}$ $\overline{\mathcal{R}}$ $\overline{\mathcal{R}}(x,y)$ ~~est~~ non pas //

$\mathcal{R}$ qui est vraie quelle que soit val

es sur lesquels elle porte = identité

Si vérité 1 $\mathcal{R}$ entre 2 es

=> ___ 1 $\mathcal{R}$ $\mathcal{S}$ entre ces e.

implication

$\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{S}$

Si "$\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{S}$ et $\mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{R}$"

$\mathcal{R} \Leftrightarrow \mathcal{S}$

équivalents

E D 1 plan

$\mathcal{R}$ //

$\mathcal{S}$ n'a aucun point commun.

$\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{S}$ et $\mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{R}$

Quantificateurs

- "quel que soit x, $R(x,y)$"

$R(x,y)$ vraie pr ttes val de x

$(\forall x)\ R(x,y)$

quelque soit
pour tout

quantificateur universel

- il existe au moins un x ~~tq~~ tq $R(x,y)$

pour au moins un x $R(x,y)$

$(\exists x) / R(x,y)$

quant existentiel

E {droites P}

(x,y) $R(x,y)$ $x \,/\!\!/\!\!\neq\, y$

n'est pas V quelque soit ~~...~~ D choisie

elle peut pas être précédée de $(\forall x)$

en revanche, il y a des P

au - un D qui ~~est~~ soit para à

$\rightarrow (\exists x)$

R binaires

Propriétés des / P R bin

$R(x,y)$ peut ou pas posséder

4 P
- Réflexivité
- Symétrie
- Transitivité
- Antisym

.R déf sur E ssi

$$\boxed{(\forall x \in E)\ R(x,x)}$$

$\mathbb{N}$ est diviseur $R(n,n)$

x est diviseur de x

.S $(\forall x \in E)(\forall y \in E)\ R(x,y) \Leftrightarrow R(y,x)$

pas // S

.T $(\forall z \in E)$

"$R(x,y)$ et $R(y,z)$" $\Rightarrow R(x,z)$

EX = (x,y,z) //

.A

"$R(x,y)$ et $R(y,x)$" $\Rightarrow$ $(\forall x \in E)$ $(\forall y \in E)$ $x = y$

$R \leq$ "$x \leq y$ et $y \leq x$" $\Rightarrow x = y$

$\mathcal{R}$ équivalence

D ERST

$\boxed{x \equiv y \pmod{\mathcal{R}}}$

est congru modulo

équivalent à modulo $\mathcal{R}$

/ les pas de confusions possible

Ex — // aucun pt commun ou confondus

R
S
T

$x \equiv y$ (~~plus~~ mod $\mathcal{R}$)

droite x et équivalente à la

y modulo $\mathcal{R}$ ds le plan considéré

Conc^t x et y sont

équiv en ce qui concerne leur direction

(aussi que ~~les~~ D au plan // x

- Ex avit important

$\mathbb{N}$

x y dont la division par 3

~~M~~ donne le même reste ex 2

$\mathcal{R}(x,y) \Leftrightarrow$ "le $\div$ de x par 3 donne le même reste que le $\div$ de y par 3"

$x \equiv y \pmod{\mathcal{R}}$

Convenant ds ce cas précis de congru $\mathcal{R}$ par le nb diviseur

$x \equiv y \pmod 3$

Ex $x = 17$ $y = 23$

~~6x3~~

($5 \times 3 = 15$ ~~7~~$\times$~~3~~ $=$ ~~18~~ 21)

$R = 2$ $R = 21$

$17 \equiv 23 \pmod 3$

$17 \equiv 23 \pmod 3$

ts les entiers qui $\div$ c5 par 3
donnent pour $R=2$ consituent
un ~~CE~~ classe d'équivalence par $\mathcal{R}$

$5/3$ $r=2$

$\exists$ ts entiers a_i tq

$a_i = 5 \pmod 3$
sont équiv à 5 par la R considérée
& ils constituent la CE C_1 partie de $\mathbb{N}$

$\cancel{C}\{ C_1 = \{2,5,8,11\} \dots \}$

$b_i \equiv 7 \pmod 3$
$C_2 = \{1,4,7,10,\dots\}$

$\mathcal{R}$ permet de réaliser une partition
de $\mathbb{N}$ A_1 A_2

inversement tte partition de $\mathbb{N}$
en CE A_1 A_2 déf une $\mathcal{R}$ équiv

ens $\{A_1, A_2, \dots\}$
des CE ainsi déf

= ensemble quotient

de ensemble E par $\mathcal{R}$

$\boxed{E/\mathcal{R}}$

Relations d'ordre

- équiv → classe ≠ selon critères
Ds P//à une axe donnée déterminés
contient ÷s par un ent donné mt m̄ R
'R' = ens..
- ↳ commandent les clas+ ms/autres

$\leqslant$ $\geqslant$

E ordonné par R ↳ déf sur E
une str E ordonné str ordre ou un ordre

- ordre numérique ↗ou↘ $3<4$
— alphabétique $a<b$
∃ d'autres

• D ORAT $\leqslant$ ou $\geqslant$ notée

R → $x \leq x$ ~~ordre~~
$\geqslant$

A → "$x \leq y$ et $y \leq x$" ⇒ "$x = y$"

T $y \leq z$ $x \leq z$

pts courbes position relative

$R(x,y)$

$R(x,x)$

"$R(x,y)$ et $R(y,x)$" ⇔ "$x=y$"

"$R(x,y)$ et $R(y,z)$" ⇒ "$R(x,z)$"

• R ordre réciproque d'1 RO

Si, pour tout x
— $y \in E$
∃ $R'(x,y)$ équivalente à $R(y,x)$,
R' est une RO dite RO réc ou opposée de R

• O total et partiel

Si RO R est toujours vérifiée
pr 2 es quelconques x, y de E
→ total — soit $x \leq y$
R $\leqslant$ — soit $y \leq x$

O tot

$(\forall x \in E)(\forall y \in E)\,[R(x,y) \vee R(y,x)]$

$A \vee B$

ou

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Soit } A \\ \text{soit } B \\ \text{soit les deux à la fois}\end{array}}$

disjonction

Si Con établie; $R(x,y)$ partiel ★

Ex $\mathbb{N}$

$R(x,y) \Leftrightarrow$ "x est diviseur de y"

RO ~~RT~~ RAT

• R ordre strict ★

$S(x,y) \Leftrightarrow$ "$R(x,y)$ et $x \neq y$"

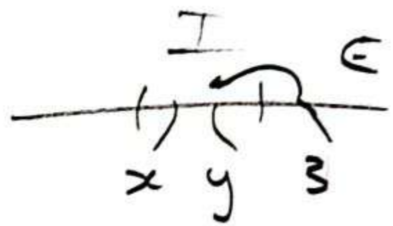
pas une RO

not $R \leq$

$S <$

• Es bornés

O total $\leqslant$



intervalle de E

= toute partie I de E telle que

$(\forall x \in I)(\forall y \in I)(\forall z \in E)$

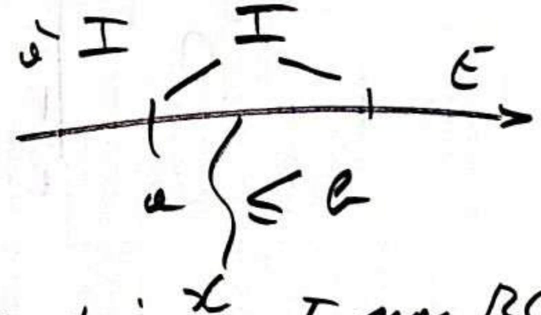
$[(x \leq z \leq y) \Rightarrow z \in I]$ ★

pr ~~tout~~ tout couple (x,y)

d'es $\in I$

si z est compris entre x et y

$z \in$ aussi à I



pouvons caractériser I par RO

et/ou par RO strict $<$

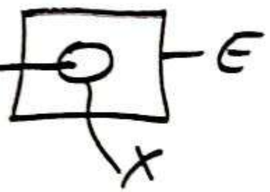
$\neq$ types int $\longrightarrow$

≠ types intervalles

$\mathbb{R}$ entre a, b et x	ce qui est considéré	Notation
$a \leq x \leq b$		$[a, b]$
		$[a, b[$
$x \leq a$	fermé illimité à G d'extrémité a	$]\leftarrow, a]$
E		$]\leftarrow, \rightarrow[$

. Majorants minorants

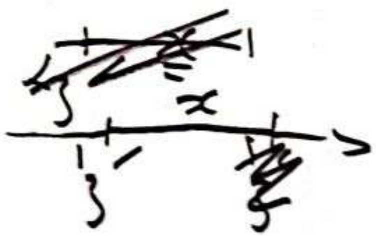
E ordonné $\mathcal{R}(x,y)$



une x tq

pour tout $z \in X$ on dit

$z \leq x$ majorant ou sous ensemble X



$x \notin$ pas néces. à X

$z \geq x$ minorant

le + pt des ~~majorants~~ majorants si il $\exists$

= Borne supérieure de cet E

sup X

inf X et

un E ordonné dont toute partie à 2 es admet une BS = Treillis

• App (fonction) ↗ ou ↘

f sur ℝ aspect particulier

Pas applicaⁿ

→ déf + générale

$$f_{(\bullet)} : \underset{\substack{\text{RO} \\ \leq}}{E} \longrightarrow \underset{\substack{\text{RO} \\ \leq}}{F}$$

ℝ ℝ

Si

pr tt $x \in E$ et

—— $y \in F$

on a l'implicaⁿ

$$(x \leq y) \Rightarrow f(x) \leq f(y) \quad \text{croissante}$$

$\geq$ $\geq$ déc

ordre inversé

= opposé à celle init

$<$

strictement cr...

Applications (Fonctions)

(1) phys y fonction d'une autre x
ex loi qui relie y à x
$y = f(x)$

ts se

l faut

se m
che
conn

Applications
(Fonctions)

(2) 2ème partie XVII

~~Cor~~ correspondances fonctionnelles

→ analyse $\mathcal{C}$ fs 1 var $\mathbb{R}$

→ spéculations
variétés algébriques

"f" "rep graph" cas particuliers

~~> + généraux
→ notion application *

dont fs au sens trad ne sont
qu'un cas particulier

$\mathcal{C}$ abstraits ensembles

Th tec ≠ classes es relève de analyse

Applications (fonctions)

(1) phys y fonction d'une autre x
~~est~~ loi qui relie y à x

$y = f(x)$

sous entendu x et y nbs de même nature ex $\mathbb{R}$

symbolise opérons qu'il faut ~~effectuer~~ effectuer pr obtenir y
smx

loi chute corps

F y parcouru par une ~~...~~ pt ponctuelle tombant chute libre

et "f" t^2 mais pr par connu

$y = k t^2$
$k = \frac{g}{2}$ g = accél pesanteur

$y = f(t) = \frac{g}{2} t^2$

(2) 2ème partie XVII

~~...~~ correspondances fonctionnelles

→ analyse fs 1 var $\mathbb{R}$

→ spéculations
variétés algébriques

"f" "rep gep" cas particuliers

→ plus générales
→ notion application *

dont fs ens trad ne sont qu'un ~~cas~~ particulier

Calculs ensembles

Tt tec ≠ classes ens relève de analyse

Définition

Si,
pr ∀ x de E,
il ~~existe~~ existe un e y de F et un seul
qui soit ds une R déterminée
f avec x,
cette R est fonctionnelle

f = ~~opérateur~~ opéra° qui associe
à ∀ x de E un elt y de F

valeur de f pr e x considéré

2 R f elles équiv dét la m̂ f

= application de E ds F
vers

mai perceur

Soit f une a de E ds F

$f : E \to F$ a

$E \xrightarrow{f} F$

déf   nom   image de x par f

~~y=~~ $x \mapsto f(x) = y$

antécédent de $f(x)$ ★ unique e de F correspondant à e x de E

E F

∃ qq plus a possibles $E \to F$

nbs → ∞

$\in \mathcal{F}(E,F)$ Si $E=F$ $\mathcal{F}(E)$

Propriétés des applications

$f : E \to F$

- **Cte**

dont E des valeurs a au plus un e

Ex $= \mathbb{R}$ $\quad \mathbb{N}$

$f(x) = 3 \quad x \mapsto 3$ a cte

- $Id_E \quad x \mapsto x$

Surpris c'est tout !

- Surj

pr tt e y de F
il existe au moins un e x de E
tq $f(x) = y$ $\quad$ E sur F

chaque e de F possède au - un ant

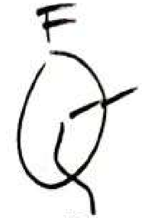
Ex $E = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ $\quad 1 \to 1$
F : $1 \; 4 \; 9 \quad n^2$ $\quad 2 \to 4$
$\quad 3 \to 9$

$\mathbb{R}$

$\nexists$ aucun e de E tq $x^2 = 2$ etc... $\quad 2 \; 3 \; 5$

/inj

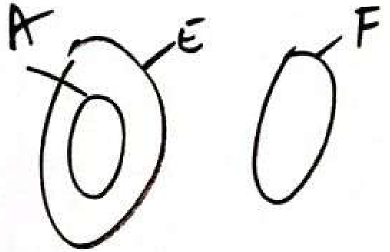
- inj



$\exists$ au plus

E $\quad$ F

2 es $\quad$ 2 images distincts



à tout elt x de A
1 elt x de E
soit un injection

a $\quad$ a
b $\quad$ b

$f : A \to E$
$x \mapsto x$

injection canonique A vers E

- Bij à la fois i $\wedge$ s

un ant et 1 seul

- Bij réciproque

$f : E \to F \quad f^{-1} : F \to E$ $\qquad$ f inverses

$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$

en cor biunivoque par a f et f^{-1}

2 E équipotents

E F

pierre chaises

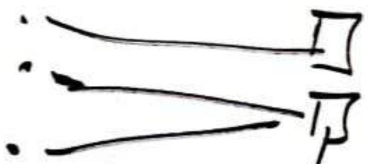
paul

Jacques

Tout le monde assis

3 cas possibles

(1)



chaque chaise au moins

SURJ

inj un plus

■ Applications composées

E F G

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & F \arrow[d, "g"] \\ & G \end{tikzcd}$$

$g[f(x)]$

f composée 1 2

■ Graphes et produits cartésiens

désigne

type E particulier de couples

= E fig géom = rep graph

fig utilisées représentant certaines cor

uniquement

D (x,y)

G

Ens déf de G E 1ers elts constituant graphe

Ex $G = \{(1,2),(2,4),(3,6)\dots(n,2n)\dots\}$

E pts 1 plan déf par leur coord

(x,y) ds un rep ~~[illegible]~~ donné

cor un graphe

E Droites 1 P ⊥ 2 à 2 (D,D') cor un G

• $E \to F$

Ens ~~[illegible]~~ $(x, f(x))$ cor un G = G de l'applica°

$R(x,y)$ lis (x,y)

$G\ (x,y)$

$G^{-1}(y,x)$ réciproque

Si $G=G^{-1}$, 2 Gs sont symétriques

Produit cartésien

E F

(x,y) quelconques → n el En ens produit

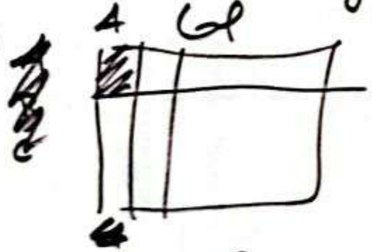
$E \times F$

ens facteurs du produit

"$(x,y)=(x',y')$" $\Longleftrightarrow$ "$x=x'$ et $y=y'$"

identiques

li



$E = \{A, B\ C\ D\ E\ F\ G\ H\}$

$F = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8$

case $(E,2)$

toute partie de X est aussi un G

1ère et 2ème projection d'un X

$E \times F$

Relation "$z=(x,y)$" la relation pr $\parallel$

$E \times F \longrightarrow E$

$z=(x,y) \longmapsto x$ | pr_1

$x = pr_1(z)$

$y = pr_2(z)$

$\Updownarrow$

$z=(x,y)$

Ens des 1ères projections de $G = E \times F$

= Ens de déf du Graphe

- Correspondance

triplet G un graphe partie de $E \times F$

(E,F,G) correspondance de E vers F

noté Γ

$(x, y) \in G$

$x \in E$, $y \in F$? x

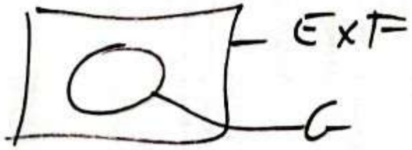
y correspond à E par G

cas + générale

~~pour~~ pour tt x il existe au moins un elt y de F ~~tq~~ tq $(x, y) \in G$

- mais il peut y avoir ~~plusieurs~~ plus. $y \in F$
- Au contraire des cas ce~ (E, F, G) tq pour tt x de E $\exists$ un seul elt ~~tq~~ y de F tq $(x, y) \in$ graphe fonctionnel
- Rigueur vocabulaire

(E, F, G)



X $\in$ déf

$\boxed{X \subseteq E}$

contenant tous élts x de E tq $\exists$ au moins un y de F qui ont une image c.a.d $(x, y) \in G$

≠ pointant cas a f

qui

pointant à la fois sur rapports entre E et X or sur la déf de G

Notion	E X déf	G
Correspondance (cor)	$X \subset E$ ou $X = E$	Pour tt x de X il existe un moins un y de F tq $(x, y) \in G$
Application (a)	$X = E$	un seul
Fonction (f)	X ~~peut~~ pas néc^t $= E$	//

Graphe fonctionnel

Ex imp

$f : \mathbb{R} \longrightarrow F$

$x \longmapsto f(x) = y$

arg — val

~~vaf~~

var

f d'une var réelle

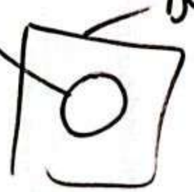
$X \subseteq \mathbb{R}$

Ens de def = Domaine de def

$Y \subseteq F$ — des valeurs

Dès lors

si $\forall x \in X$ il existe un elt y de Y et un seul tq $(x,y) \in G$ — $\mathbb{R} \times F$



2 classes

~~vaf~~ nature de F

— 1ère classe

$f : \mathbb{R} \longrightarrow F = \mathbb{R}$

$X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow Y \subseteq \mathbb{R}$

$x \longmapsto y$ calculable

à partir de x selon les règles que donne f

Ex $y = f = 1/x$ = numériques

— 2ème

$X \longrightarrow$ EV ou $\mathbb{R}$

$x \longmapsto \vec{v}$ à 1, 2, 3 n composantes selon EV choisi

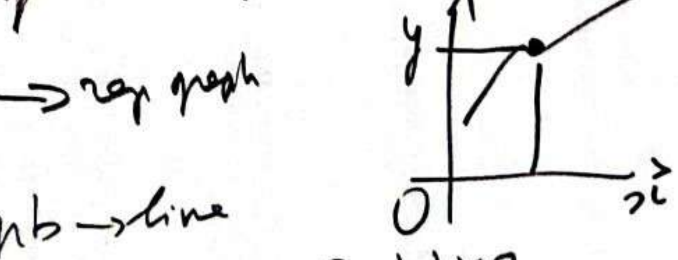
f° vectorielle d'une variable réelle

Graphe ≠ graphique f $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ partout ; f $X \to \mathbb{R}$

soit cette f

(x,y) → rep graph

var val



nb → line

cbe représentative

Graphe et un ens

GÉNÉRALITÉS ← ALG STR

DÉFINITIONS

Str algébriques
2 impl N
Groupe

CAR PAN MAPLS ANNEXE
ALGÈBRE STRUCTURES

~~MÉTHODE~~

tions

cer E

~~E×F → G~~
~~E×E → E~~
~~E×F → E~~

E×F → G
E×E → E
K×E → E

— $a \perp (b \,\cancel{\star}\, c) = (a \perp b) \top (a \perp c)$
$\top$

$\perp$ Distributive à gauche / $\top$

— un elt est neutre

$e \perp x = x \perp e = x$

$\mathbb{Z}, +$ 0
$\mathbb{Z}, \times$ 1

E^* privé son neutre

— $y \perp x = e$

symétrique à G de x

$\cancel{x \perp y}$ $x \perp y = e$ D

— $x \perp y = y \perp x = e$

symétriques ou opposés

Si Associative ★
y si il existe est unique x^{-1} ou $-x$

A
C
D
N

S

$\boxed{\text{GENERALITÉS}}$ ← ALG STR

DÉFINITIONS

. Str algébriques.
2 impr — N — Groupe

...tions
...sur E

~~$E \times F \to G$~~
~~$E \times E \to E$~~
~~$E \times F \to E$~~

$E \times F \to G$
$E \times E \to E$
$K \times E \to E$

GENERALITÉS

~~CARADINI TOUT EN 1~~
~~PHYSIQUE 1996~~

— $a \perp (b \top c) = (a \perp b) \top (a \perp c)$

$\perp$ Distributive à gauche / $\top$

A C D N

— un elt est dit neutre

$e \perp x = x \perp e = x$

$\mathbb{Z}, +$ 0 E^* privé de neutre
$\mathbb{Z}, \times$ 1

— $y \perp x = e$

symétrique à G de x

~~$x \perp y$~~ $x \perp y = e$ D

— $x \perp y = y \perp x = e$

symétriques ou opposés

S

. Si Associative ★
y si il existe est unique $\qquad x^{-1}$ ou $-x$

$\boxed{\text{GÉNÉRALITÉS}}$ ← ALG STR

DÉFINITIONS

- Str algébriques.
  - 2 imp — N
  - Groupe

mots(?) propres nature ensembles

- str caractérisé par opérations que l'on fait ~~faire~~ sur es cat E

LC $X + * \circ \perp T$

~~$E \times F \to G$~~
~~$E \times E \to E$~~
~~$E \times F \to E$~~

LCi

$(\forall x \in E)(\forall y \in E)$

$\begin{cases} x \perp y = z \in E & \text{LCi} \\ \_\_\_\_ \notin E & \text{LCE} \end{cases}$

$E \times F \to G$
$E \times E \to E$
$K \times E \to E$

P usuelles LC

- Associative
  $(a \perp b) \perp c = a \perp (b \perp c)$
- Commutative
  $a \perp b = b \perp a$

- $a \perp (b \,T\, c) = (a \perp b) \,T\, (a \perp c)$

$\perp$ Distributive à gauche / T

A C D N

- un elt est dit neutre
  $e \perp x = x \perp e = x$

$\mathbb{Z}, +$ 0 E^* privé son neutre
$\mathbb{Z}, \times$ 1

- $y \perp x = e$

symétrique à G de x

~~$x \perp y$~~ $x \perp y = e$ D

S

- $x \perp y = y \perp x = e$

symétriques ou opposés

Si Associative ★
y si il existe est unique x^{-1} ou $-x$

- $x \perp x = x$

~~idempt~~ idempotent

- $a \perp x = a \perp y \Rightarrow x = y$

régulier à G

Si G+D a simplifiable

on elt régulier
c'est cette régularité... elts R
qui permet simplifier clas...
cul alg élém.

- $a \perp x = a$

absorbant à G

R 0 est absorbant pour $\times$
puisque $0 \times x = x \times 0 = 0$

Princ stn alg

au - une LCI = ~~elt~~ algébrique
au - 2 c'est une algèbre +

Monoïde

$(E, \perp, e)$

$\boxed{\text{Assoc}}$

Si Gm abélien
$(\mathbb{N},+,0)$ $(\mathbb{N},\times,1)$ $(\mathbb{Z},+,0)$ $(\mathbb{Z},\times,1)$ com

Groupe

$(G, \perp, e)$ + $\times$

ts elts x possèdent un sym

fini ordre n

0	1
$-x$	$\frac{1}{x}$ -1
opposé	inverse

Anneau

① $(E, \perp, e)$ G abélien
② (E, T, e') Monoïde
③ T Dist à D ou à G / $\perp$

$x T (y \perp z) = (x T y) \perp (x T z)$
$(\quad) T x$

pas nec Gm

Ex

$(\mathbb{Z},+,\times)$

1- $(\mathbb{Z},+,0)$ G Abélien
2- $(\mathbb{Z},\times,1)$ Monoïde
3 $\times/+$

$(\mathbb{Z},+,\times,0,1)$
$(\mathbb{R}$ ———— Abéliens $\mathbb{Z}\ \mathbb{R}\ \mathbb{Q}\ \mathbb{C}$

Corps

$(E,\perp,T,e,e')$ Anneau *

$\forall x \neq$ G sym

① $(E,\perp,e)$ G ~~A~~ Abélien
② (E^*,T,e') G
③ T Dis/ $\perp$

Explications accès cette structure

1- $E \neq \emptyset$
2- $E, \perp$ Assoc & Com +
3- $\exists e = 0$
4- $\forall x$ & symétrisable
$-x$
5- E, T Assoc $\times$
6- $e' = 1$
7 $\forall x \neq e$ $x = 0$, $\exists$ sym x^{-1}
8 T Dis/ $\perp$
- Si Com
$(E,\perp,e)$ (E^*,T,e')
CO
- Corps = Anneau + 7

$(\mathbb{Z},+,\times)$ ~~Corps~~
$\mathbb{Q}$ ———— Corps
$\mathbb{R}$ Corps

Récapitulation

ASSOC
COMMUT
DIST
Neutre e $\quad E^*$
SYM $\quad -x$ opposé $\quad x^{-1}$ inverse

A C D N S

IDEMPOT $\quad x \perp x = x$
RÉGULIER $\quad a \perp x = a \perp y \Rightarrow x = y$
SIMPLIFIABLE
ABSORBANT $\quad a \perp x = a$

$(M, \perp, e)$ AN $\quad$ (C)
$(G, \perp, e)$ ~~AN~~ ANS $\quad$ (C) $\quad 0 \quad 1$
$-x \quad x^{-1}$
opposé $\quad$ inverse
$(A, \perp, e)$ ANS C
(A, T, e') AN
$\perp T \quad$ D

$(C, \perp, e)$ ANSC
(C^*, T, e') ANS
$\perp T \quad$ D

MAN
G ANS
A ANSC +D
AN
C ANSC +D
ANS

EV

généralités

$\vec{v}$ géométriques
à 2 ou 3 dimensions

$\vec{v}$ géom 2 dim $\quad \in \mathbb{R}$
représentable par (x_1, x_2)
Composantes

2 ou 3

on ~~est~~ déf en géom
2 opérations sur $\vec{v}$
+ géom = composition
× par 1 scalaire

$\vec{A} = \cancel{x_1}(x_1, x_2)$
$\vec{A'} = (x'_1, x'_2)$
$\vec{B} = \vec{A} + \vec{A'} = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2)$
$\vec{C} = \lambda \vec{A}$ Mult scalaire
$= (\lambda x_1, \lambda x_2)$

$\vec{A} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$\hat{e}$ + ~~N~~ pendant représ. le géom
E vecteurs = EV sur K
$\in E_2 \dots$ $\vec{v}$ ... NUM
D = NON

D axiomatique

E $\vec{x}, \vec{y}$

K α β
corps

$(E,+,o)$ GC

LCE $(\vec{x},\alpha)$ $E\times K \longrightarrow E$

$\mapsto \alpha\vec{x}$

str EV sur Corp K

produit par

On a les axiomes suivants

1- $E \neq \emptyset$

2- $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$ C

3. $(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z} = \vec{x}+(\vec{y}+\vec{z}) = \vec{x}+\vec{y}+\vec{z}$ A

4- $\exists$ de E $\vec{0}$ tq pr tout $\vec{x}$ de E

$\vec{x}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{x}=\vec{x}$

5. Pr tout $\vec{x}$ $\exists$ $-\vec{x}$ tq

$\vec{x}+(-\vec{x})=\vec{0}$

6 $\alpha(\vec{x}+\vec{y}) = \alpha\vec{x}+\alpha\vec{y}$

7 $(\alpha+\beta)\vec{x} = \alpha\vec{x}+\beta\vec{x}$ D double

8 $1\vec{x}=\vec{x}$

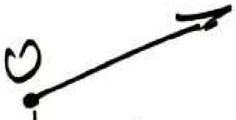
9 $\alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}$

D ~~K~~ LCE

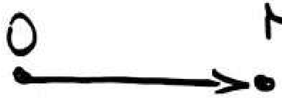
Ex E $\vec{V}$ géom usuels du plan

$\rightarrow$ EV sur $\mathbb{R}$ dim 2 ou 3

A chaque $\vec{v}$ cor un unique ★ représentant



origine 1 pt O fixé



M chaque point M du plan affine est l'extrémité d'un unique $\vec{v}$ d'origine O

K K^n ens n-uplets d'élts de K

on note $\vec{v}$ ces n uplets

$\vec{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

on peut obtenir a K^n une str EV sur K

en déf 2 lois a ~~x~~ + by

na $\neq$ scal $\in K$

K^n est un EV de dim n

Base d'un EV

Sys générateurs

E ev sur K

$S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_n\}$ sys quelconque de vecteurs de E

Considérons Ens CL des elts de S

$F = \{\vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n\}$, $\in K$

DM que F est EV sur K

SEV de E engendré par S

= sys gen = famille génératrice de ce SE

Famille libre

ssi la seule CL de S = $\vec{0}$ est celle obtenue en prenant ts coef = 0

$[S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ FL$] \Leftrightarrow$

$[\forall \alpha_1 \alpha_2 \alpha_n \in K,$

$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 \dots = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \dots = 0]$

Base d'un EV

B, FL & génératrice de E

toute

$\vec{v}$ quelconque s'écrit de façon unique comme CL $\vec{v}_s$ B

Alg mod elem

n fini elts,

DM que ttes bases 1 EV ont le même nbre n elts = dim de EV

EX:

3 $\vec{v}$ ~~coplanaires~~ forment une B

$\vec{OM} = x\vec{OA} + y\vec{OB} + z\vec{OC}$

Coord comp $\vec{OM}$ ds B $(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$

e dim 3

$K \quad \cancel{K^*}$ ~~pro~~ $\cancel{K^{(n)}}$ ~~dim~~

pouvoit muni ~~str ev~~

sur K

ex

$\forall \vec{v}(x_1, x_2, \dots x_n)$

peut écrire manière unique

à partir sys n $\vec{v}$

$\vec{e_1} = (1,0,0,\dots,0)$

$z = 0,1$

$\cancel{x}_n \qquad n)$

$\vec{v}\ (x_1, x_2, \dots, x_n)$

s'écrit $\vec{v} = x_1 \vec{e_1} + x_2 \vec{e_2}$

$B\ (e_1, e_2, \dots, e_n)$

Base canonique Espace K^n

Isomorphisme

a : EV $\longrightarrow$ ant

possédant P part my

lors $\exists$ telle a E et E' isomorphe

calculs 1 ts P 1 et ant

ont leurs équiv as autre

Pour que 2 EV soit isom.

il faut et il suffit qu'ils aient la même dim

image de ~~A~~ B par isom

est une B de autre

suivant un isom est entièrement

déterminé par la donnée

de 2 B_s CL

a : tout EV est isom. à $\mathbb{R}^2$

dim 2

3 $\qquad$ —— $\mathbb{R}^3$

assimilons

Plan ou E geom vectoriel

à $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

ℂ corps

■ historique

- ℝ entiers, nbs fractionnaires + ou –
- (–met + ou –
- qui peuvent ê racines

1 éqn alg = $P(x) = 0$

CORPS ℂ

conjugués

$z = a + bi = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

module arg

$\rho^2 = a^2 + b^2$

$\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ sin $\dfrac{b}{}$

$zz' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$

$= \rho\rho'[\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')]$

$z/z' = \dfrac{aa'-bb'}{a'^2+b'^2} + i\,\dfrac{ba'+ab'}{a'^2+b'^2}$

$= \dfrac{\rho}{\rho'}[\cos(\theta-\theta') + i\sin(\theta-\theta')]$

$z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

Moivre $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin\theta$

$\rho e^{i\theta} \rightarrow$ Euler

Racines etc..

I comp

■ Historique

II entiers, rels fractionnaires + ir-
rat + ir-
qui peuvent ê racines
1 equ° alg = $P(x)=0$
algébrique — rat
irrat
Ceux-ci sont dits surgiques
transcendants

π e

Alg
$z^2 = -2$
$i^2 = -1 \quad -2 = 2i^2$
$z = a + ib$

Leibniz Newton Euler i
Forme trig

■ Calculs $z = a + bi$
z'

$z = a + bi = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$
module arg
$\rho^2 = a^2 + b^2$
$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \sin \frac{b}{}$
$zz' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$
$= \rho\rho'[\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')]$
$z/z' = \frac{aa'-bb'}{a'^2+b'^2} + i\frac{ba'+ab'}{a'^2+b'^2}$
$= \frac{\rho}{\rho'}[\cos(\theta-\theta') + i\sin(\theta-\theta')]$
$z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$
Moivre $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$
$\rho e^{i\theta} \rightarrow$ Euler
Racines etc...