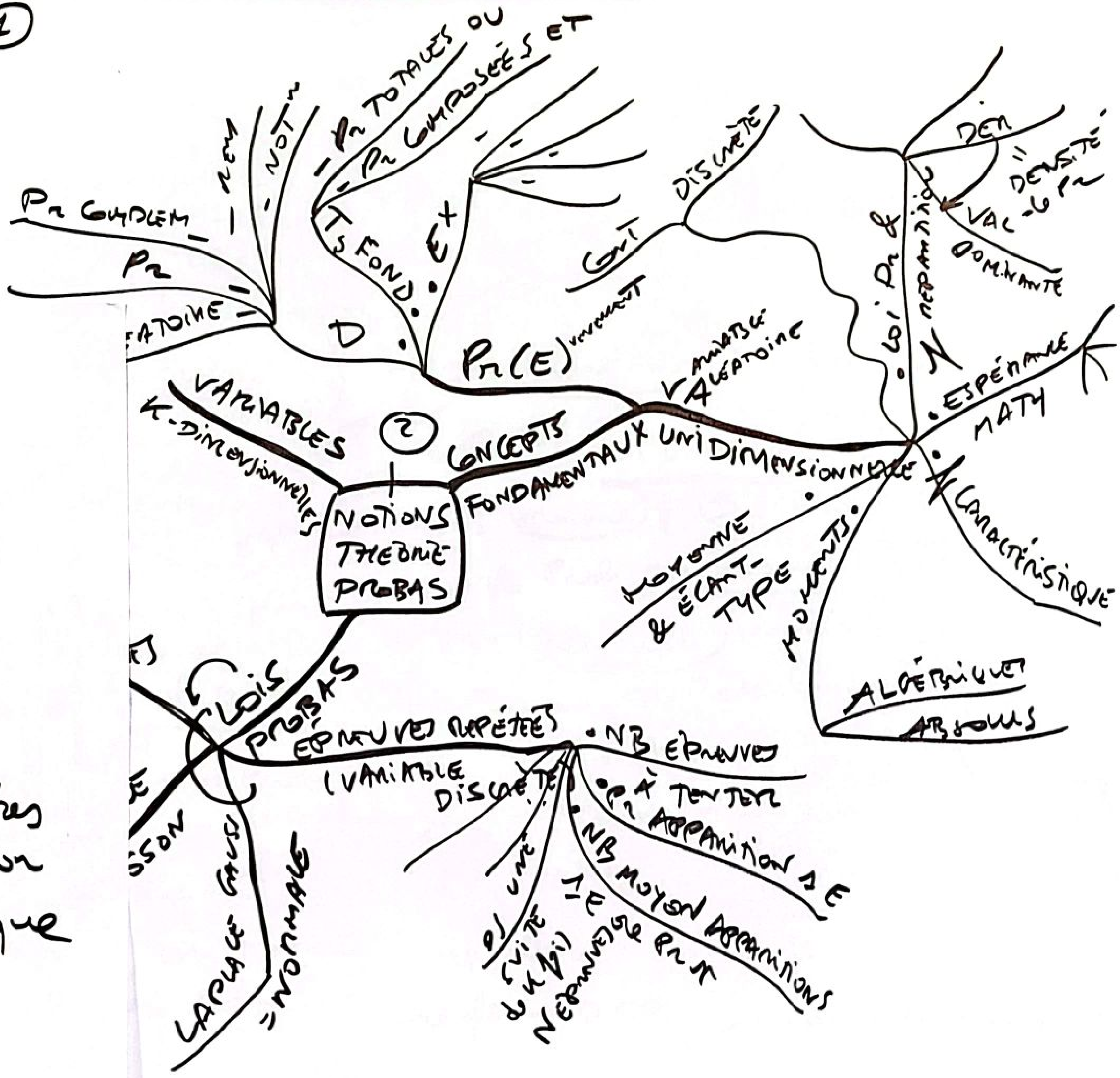
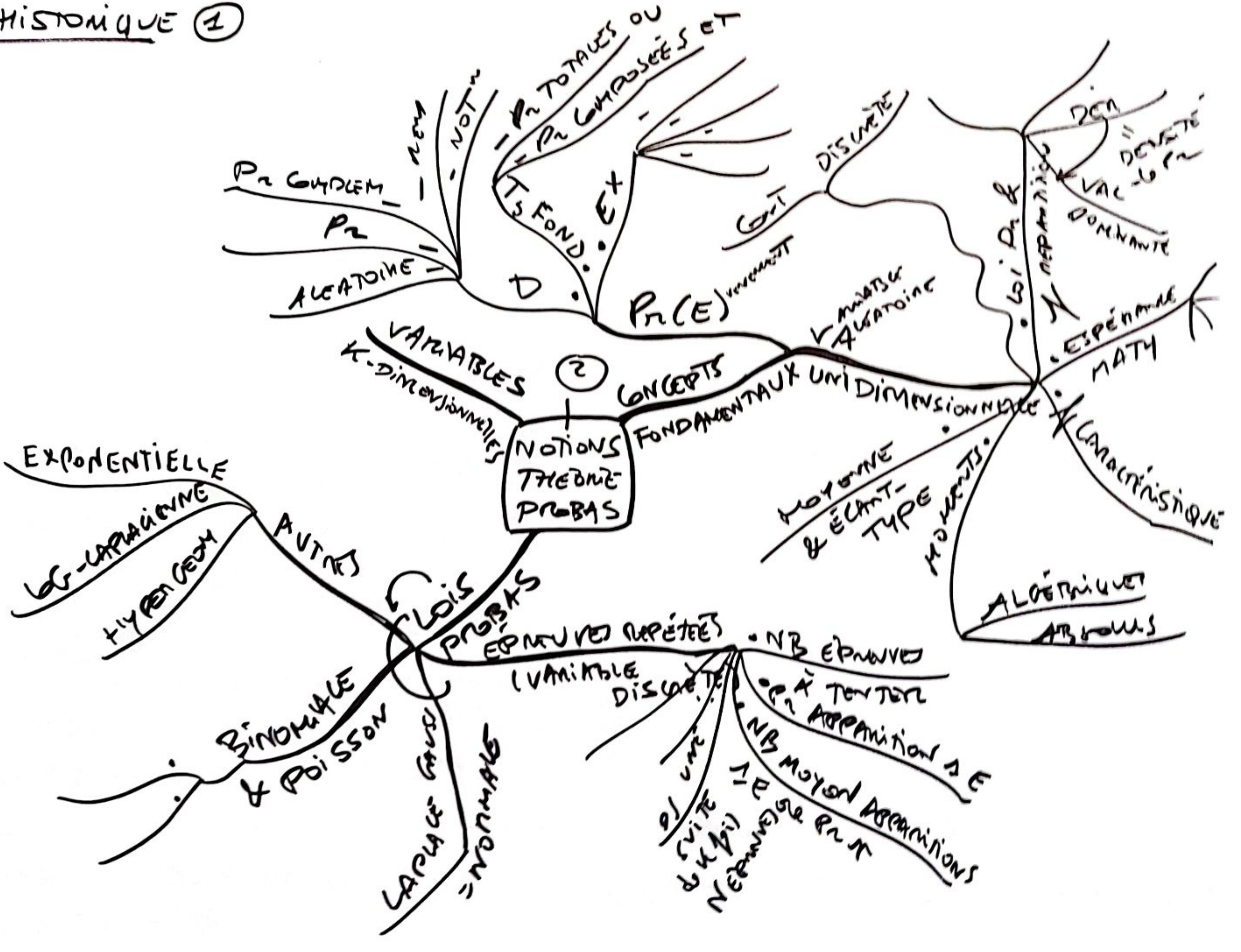
RAPPEL HISTORIQUE ①



Calcul des Probas
CANATINI Collection
- Rappel historique
- Notions

RAPPEL HISTORIQUE ①



CALCUL PROBAS
RAPPEL HISTORIQUE

XII "hasard" ← espagnol ← arabe
nom
az-zahr
"dé à jouer"
↑ Croisés
st Louis
* ↓ gîtes [illegible]

Fin XVI De ludo aleae | (Cardan)
Cal Prob avec
Coups
passionné

Pr
~~est~~
ESPERANCE

1654 Corresp | (Pascal) (Fermat)
notions bases "cal chances"
Prob < simples
composées
Esp / en rapport
avec
cal Comb

1657 | (Huygens)
De ratiociniis in ludo
aleae
Formulation courant
Si parmi N cas ayant tous la même
chance de se produire, un joueur
peut gagner a dans n de ces cas
et b dans les autres

Son esp de gain a
$= E = \frac{na + (N-n) b}{N}$

1705 (Bernoulli) | Ars Conjectandi
↑ 1713
jacques

1708 (Montmort) Essay analyse jeux
hasard
→ Pub^{n} lois Combin
~~1718~~ (Moivre) | Doctrine chances
règle Prob composées

1738 (Bernoulli) neveu
Paradoxe St Petersbourg
2 joueurs A et B pile face
Si F 1er coup A ⟶ B
1 franc
$n^{ième}$ coup 2^{n+1}
quelle est esp de B ?
règle ⟶ ∞
paradoxe expliqué

1733 Buffon calcul int
"pb aiguille"

1763 Bayes Det^n Prob causes
à partir effets observés

1771-1818 Mémoire Laplace 1C
théorie analytique probas
(1812)

1809-1823 Mém, Gauss sur distr^n
Probs, C enams ...

1837 Poisson formul^n LGN

1846 Bravais cor^n → Pearson

1851 Boole étude Pr causes
Pb

1887 Cebyšev démo rigoureuse
lois (C enams)

1903 Pearson C cor^n

1908 Borel Pr dénombrables 1
lois unif^n

1912 Markov
gen^n chaîn

1920-1925 w Fischer (tests)
C estim^n

1933 Kolmogorov Axiom^n

1935-1937 P Lévy emploi f
caractéristique
1 loi Pr

imp Phys XIX BOLTZMANN

besoin* probas
aide
ABSTRAITS

* C mesure LEBESGUE *
ou
* notion

CONCEPTS FOND

$P_r(E)$ aléatoire

dû au hasard

• D

— $0 \le P_r(E) \le 1$

nbs cas aléat

nb cas favor ($\uparrow E$)

nb tot cas possibles

« condition que tt cas soient également comme $=^t$ P_r ables »

Pile $p = 1/2$

dé tire 5 $p = 1/6$

certain

impossible

— P_r Complémentaire ~~Σ~~ Ev^t A

- P_r voit E contradictoire A'

$p = \frac{n}{N}$ $P_r(A)$

$P_r(A') = 1 - p = \left.\frac{N-n}{N}\right]$

$\overset{\shortparallel}{q}$

~~Rot~~ PF

$p = q = 1/2$

- Rem n CF
N CP

dénombrement

— $P_r(E) = 1$

• T Fond

— P_r totales

A B $P_r(A)$ $P_r(B)$

exclusifs l'un de l'autre

= occurrence A et B est impossible

P_r un d'eux

$P_r(A \text{ ou } B) = P_r(A) + P_r(B)$

— P_r composées

indépendants

$P_r(A \text{ et } B) = P(A) \times P_r(B)$

• E

— tirer au hasard une boule rouge ou une boule noire

5 / 15

$P_r(R) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

$P_r(N) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$

$P(R \text{ ou } N) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

— 5 Rouges, 15 Noires, 15 Blanches } 35

$P_r(R \text{ ou } N)$

exclusifs → tot

$P_r(R) = \frac{1}{7}$

$P_r(N) = 3/7$

$= \frac{4}{7}$

— 2 fois de suite 17 à roulette

main $p = 1/37$

$P_r(17 \text{ et } 17) = p \times p = p^2$

$1/1369$

Passe de 3

— 421 avec 3 dés

1er	4	2	1	4	1	2
2	2	1	4	1	2	4
3	1	4	2	2	4	1
	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6

6 façons ≠

Calcul 3e main

$p_1 = p^3 = \frac{1}{216} = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6$

chaque C exclut autres

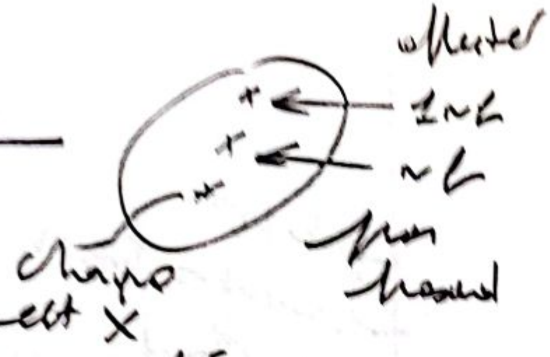
421 ou ne fait pas 214 ...

→ ~~…~~ tot

$p(\text{"421"}) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6$

$= \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$

VA unidim



→ appelé VA

Cont peut prendre ∀ val $\mathbb{R}$ ant

discrète cas contraire

- Loi Pr ~ f répartition d'une VA

↳ toute R permettant de déterminer la Pr que val X prenne une val donnée quelconque ou une val ∈ à un ens donné de val

- $Pr(X<x)$ = f répartition de la var

$$F(x) = Pr(X<x)$$

Si discrète $x_1 \; x_2 \; x_k$

$p_1 \; p_2 \; p_k$

$$F(x_i) = Pr(X<x_i) = p_1 + p_2 + \cdots p_{i-1}$$

- $$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

densité de Proba

f répartition

$f(x)\,dx$ est la Prob élém associée à dx tq $x < X < x+dx$

on a aussi

$$\int f(x)\,dx = 1$$

- val x_p tq

$$Pr(X<x_p) \leq p \leq Pr(X \leq x_p)$$

quantile d'ordre p $\quad 0<p<1$

0,5 ~~equiv~~ équivaut = médiane

- val dominante = mode
  val maximale
  1 seule mode unimodale
  pluri modale

- **Espérance math**

- v discrète X dont val
$x_1, x_2 \quad x_n$
$\text{prob}^{t} \left\{ \begin{matrix} \\ p_1 \quad p_2 \end{matrix} \right.$

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n$$
$$= \sum_i p_i x_i$$

- cont
$$= \int x f(x) dx$$
∀ dom var de X

- Si $E(X) = 0$ VA centrée
Si $E(x) = m$ v centrée
asr $\underline{X - m}$

- E disc

1 loterie 1000 billets

$1 \text{ lot } x_1 = 10000 F$
$4 \text{ lots } x_2 = 750 F$
$5 \text{ lots } x_3 = 100 F$

$p_1 = \frac{1}{1000} \quad p_2 = \frac{4}{1000} \quad p_3 = \frac{5}{1000}$

$E = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 =$
$10 + 3 + 0{,}5 = 13{,}5$ (francs)

tot lot $10\,000 + 3000 + 500$
$= 13500 F$

chaque billet peut rapporter en moyenne ~~137~~ $13500/1000 = 13{,}5F$

2- jeu équitable
si $E = 0$
PF gagne mise x francs
E pair $e_1 = x/2$
perte $e_2 = -x/2$

$E = 0$

- **f caractéristique**

$$\varphi(u) = E(e^{iux})$$
$$= \sum e^{iux_j} p_i$$
$$= \int e^{iux} f(x)\,dx$$

- **Moments**

– mom algébrique d'ordre q

$$m_q = E(X^q)$$

$q = 1$ on pose $m_1 = m$

– algébrique p/rapp à une origine a

$$_a m_q = E[(X-a)^q]$$

Si on prend $a = E(X)$
centré

$$\mu_q = E[(X - E(X))^q]$$

– absolus $|X^q|$

- **Moyenne et écart type**

– moy ordre q / origine a

$$\sqrt[q]{_a m_q} = \sqrt[q]{E[(X-a)^q]}$$

– écart moyen ordre q

$$\sqrt[q]{E[|X-a|^q]}$$

– variance = moment alg centré ordre 2

$$V(x) = \mu_2 = E[[X - E(X)]^2]$$

- écart type

$\sigma = \sqrt{V(X)}$

- V.A réduite a X

> $\frac{X - m}{\sigma}$ espérance nulle de X

LOIS PROBAS

épreuves répétées (voir Gios)

- nb épreuves à tenter

p

— nb moyen épreuves pr que E ↑ au moins une fois

$$m = \frac{1}{p}$$

— ______ ε fois

$$m_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{p}$$

— n fois consécutives

$$M = \frac{1}{1-p} \cdot \left(\frac{1}{p^n} - 1\right)$$

- P ↑ 1 E

— p série N épreuves

$P = z$ pour que ait E apparaît au − 1 fois

$$z = 1 - (1 - p)^N$$

Si $N = 1$ on obtient N^t $z = p$

invers^t

- Nb moy ↑ p

— très gd nb N

↑ en moy $M = Np$

$Np = 1000 \times \frac{1}{2} = 500$

- Suite K fois N épreuves

très gd!

... ?!

⑥ ~~AUTO GIOS~~ ... 8 pages

Loi Laplace-Gauss = Normale

X va cont

$x \in \mathbb{R}$

$Pr(X<x)$ = f repartition

on peut determiner cette fonction à partir de sa derivée $f(x)$ = densité de Pr

étude cas où cette fonction est

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right]$$

ecart type

esp ou moy ont

Si on effectue ch var

$$u = \frac{x-m}{\sigma}$$

$$f(u) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$$

$-\infty < u < +\infty$ réduite

Loi Binomiale et Poisson

- $Pr(X=x)$ pr que va discrète X prenne la val x

x 0 1 2 3 4 , n

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

nbr de C de n elts pris x à x

$$= \frac{n!}{x!\,(n-x)!}$$

Suite n epreuves indep

$Pr(E)$ est cte $p = k$ chaque epreuve

• loi Poisson

$$P_n(X=x) = e^{-m}\frac{m^x}{x!}$$

Aut

• hypergéom

$$P(X=x) = \frac{\binom{d}{x}\binom{N-d}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

val entière — effectif — effect

• loi Laplacienne

$X \longrightarrow \infty$

$$f(x) = \frac{1}{(x-\mu)\sigma\sqrt{2\pi}} \text{ exp } —$$

• — exp:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \lambda>0$$

Var à 2 dim

2 var A X, Y

→ loi prob à 2 dim

f répar —

f plus var réelles