9 + 53
62 pages

(0)

…RADINI COLLECTION
…ATHÉMATIQUES
…LGÈBRE DES STRUCTURES

PROGRESSION

début XIX Gauss Galois

2nd plan

nb rés ≡

étu str alg

REM HIS

ainsi

NOTION LC & GROUPES

GAUSS & FORMES QUADRATIQUES

POSSIBLE rép 1 Δ par

$f = ax^2 + bxy + cy^2$

x

y

LC

nouveau

en classes équiv sur lesquelles on sait une opérat on pourrait calculer comme nbs

→ Gauss ZFQ

commutative

$f_1 \, f_2 \rightarrow f_3$

1

REM HIS

début XIX

Gauss

Galois

→ 2nd plan

nb

rés $=^N_S$

étu str alg

NOTION LC & 6 GROUPES

GAUSS & 6 FORMES QUADRATIQUES

POSSIBLE rép 1 D par

$f = ax^2 + bxy + cy^2$

Ainsi

x

y

LC

nomm

en classes équiv

sur lesquelles

on pourrait calculer comme nbs

on défini une opération

→ Gauss 2 FQ

Commutative

$f_1 f_2 \to f_3$

Remarque Historique

PROGRESSION

REM HIS

début XIX Gauss Galois

→ 2nd plan

nb rés =

étu str alg

NOTION LC & GROUPES

• GAUSS & FORMES QUADRATIQUES

POSSIBLE rép 1 Δ par

$f = ax^2 + bxy + cy^2$

LC

nouvelle

en classes équiv

sur lesquelles on pourrait calculer comme nbs

en suite une opéra°

↳ Gauss loi

2 FQ

Commutative

$f_1 \, f_2 \to f_3$

ainsi

bis souvent la str est considérée

des lois entre ces opéra°

E

mis de côté le caractère LC

sur on peut le munir

$\mathbb{Z}$

(x, y) — $x+y$

E

G

x

y

$\in E$

Notion de 1 G Gs

GALOIS & 1° GROUPES

REM HIS

"mémoire sur conditions de résolubilité des =ons par radicaux"

pr étudier une =n alg au niveau 0 fallait examiner (E permutations racines

"Groupe de substitution"

(a, b, c, …, m)

Pas nouveau

G substitution associé : composé de ttes les permutations possibles de rac

m!

Nouveau chz Galois ~~est~~ embeau

il analyse ⊕ gén Gs

invariant

sous groupe

par suite

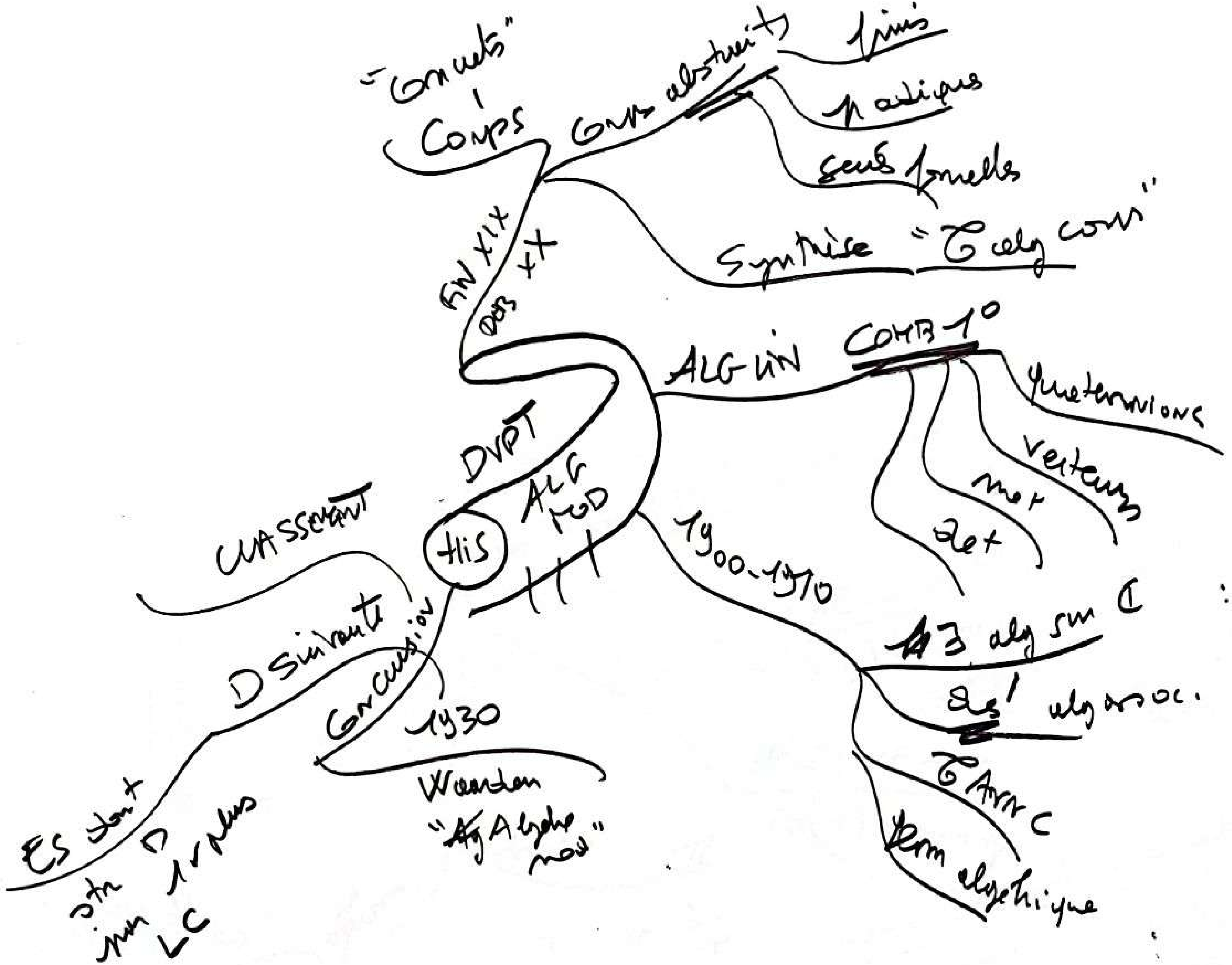
G continus

Lie

Top alg

Subs

finis


HIS
DVPT
FIN XIX
DEB XX
Corps
finis
Synthèse
ALG LIN
COMB 1°
quaternions
vecteurs
mat
det
ALG MOD
1900-1910
alg sur C
alg assoc.
Artin
algébrique
CLASSEMENT
D suivante
ES dont
LC
1930
Waerden

(2)

La structure d'un ensemble E
finie ou infinie
est caractérisée par la ou les
lois de composition qu'on
peut appliquer aux éléments
de cet ensemble

LC

NOTATION
$\perp$
$\top$ truc
$+$ $\ast$ ( )
$\ast$ o) selon réalité

LCi
$E \times E \to E$ en un seul
$(x, y) \longmapsto z$
$x \perp y = z$ — composé de x et de y

LCE
$\Omega \times E \to E$
$(\alpha, x) \longmapsto y$
domaine opérateurs de la loi

qui lui n'appartient
=

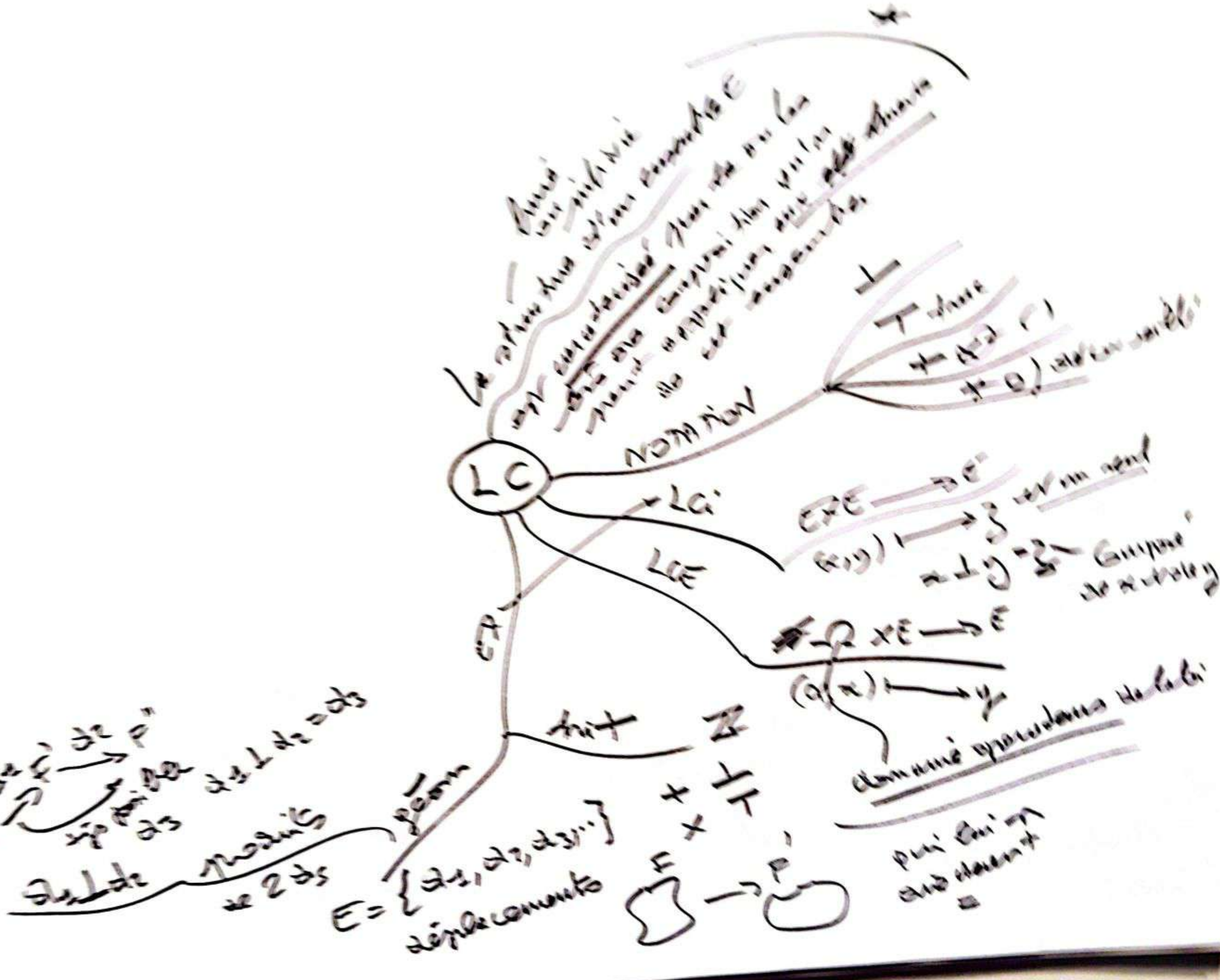
EA

Arit
$\mathbb{Z}$
$+$ $\perp$
$\times$ $\top$

géom
$E = \{d_1, d_2, d_3, \dots\}$
déplacements
$F \to F'$

$d_2 = d_3$
points
$2\,d_3$

GÉNÉRALITÉS


LC
NOTATION
LCi
LCE
CP
déplacements

P 1 LC

C $x \perp y = y \perp x$

A $(x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z) = x \perp y \perp z$

iA = Groupoïde

D 1/Au+ par rapport à T

$x \top (y \perp z) = (x \top y) \perp (x \top z)$

$(y \perp z) \top x = (y \top x) \perp (z \top x)$

$x(y+z) = xy + xz$

$(y+z)x = xy + xz$

x D/+ néc T?

D LCE

LCE D/LCi

$\Omega \times E \longrightarrow E$

$\top$ $\perp$ LCi

α, β, γ x, y, z

★ $\alpha \perp (x \top y) = (\alpha \perp x) \top (\alpha \perp y)$

Elts Caractéristiques

- Absorbant
  - $x \perp y = x$
  - elts de G
  - $0 \times x = x \times 0 = 0$
- Simplif. dans cal
  - $a + x = a + y \Rightarrow x = y$
  - $ax = ay \Rightarrow x = y$
  - $x \in \mathbb{R}$ régu pour + et ×
  - $+ = + =$
  - $- = \cdot$
  - $\times = \cdot$
  - $\div$
- * Régulier à G = simplifiable à G
  - D+G régulier
  - $a \perp x = a \perp y \Rightarrow x = y$
- E LCI
  - certains elts
  - composés de ses elts quelc avec toute propriété
- e (N)
  - $e \perp x = x \perp e = x$
  - pour laquelle
  - $\mathbb{Z}$ + $0 + x = x + 0 = x$
  - × $1 \times x = x \times 1 = x$
- * elt idempotent
  - $x \perp x = x$
  - $\mathbb{Z}$ 1 pr ×
    - $1 \times 1 = 1$
  - 0 idempotent pour +
    - $0 + 0 = 0$
- (S) Possédant 1
  - $y \perp x = e$
  - symétrique de G de x
  - Symétrisable de G
  - ∀ x, y
  - * lorsque lci assoc
    - si il existe est unique
    - * sym de x
    - $-x$ x^{-1}
    - elts opposés
  - Si il existe un couple (x, y)
    - tq $x \perp y = y \perp x = e$
    - 2 elts sont dits symétriques
  - D
    - $x \perp y = 0$
- $\mathbb{N}$
  - il n'existe aucun y tq $a + b = b + a = 0$
- $\mathbb{Z}$
  - Symétrisables pr +
  - 0 le seul son sym
  - $-x$
  - x tq
  - seconds que $x - x = 0$

N S | IDEMP REGUL ABS

LCE ausni

E(S)

Si ∃P stable

m chaune

ses lois

Parr stable pour (S)

partie stable pour *

$x*y \in P$

E

P

iANSC

+ iCAN₀

CA N=0

i

$x+y$ somme

nbs

ent

fract

$\mathbb{R}$

$\mathbb{C}$

Signification uit elem

(1)

mais peut noter

LC ~~Numériques~~

$\in \vec{V}$ géom

muni LCi

= ADDITION VECTORIELLE

(2) +

$\vec{W} = \vec{V} + \vec{V'}$

obt en prenant

diag du parallélogramme construit sur $\vec{V}$ & $\vec{V'}$

$x*y = xy$

produit

juxtaposition

$\boxed{\times\ iA}$ ~~⇔~~ ~~N~~ C

N = elt unité = 1

(3) SYM

$-x$ iAC +

x^{-1}

iA (C)

1 ×

(4) ALG

Pr DEC Sm

énoncé sous forme

en

DEC

axiomes

LERNSP

A C D

lois LCi ou LCE

pouvant présenter certaines $\mathbb{R}$ et D

concernant cet E

(5) (S)

Str sous-jacente

à la Str F

la str alg

S

ABS

S

N

∃ erent ets

(6)

obtenue en ne considérant sur E qu'une partie des lois qui déf F

MORPHISMES

- Logarithmes
  - ① $10^a \times 10^b$ ← remplacer par leurs images a à b à F
  - ② Ceci ds F $c = a + b$ ← par son antéc 10^c ds F
    - $10^a \times 10^b = 10^c = 10^{a+b}$
  - 3 remplacer 4/rés
  - ant dit
  - isomorph
  - $10^3 \xrightarrow{f} f(10^7) = ?$
    - " + "
    - $= f$
    - $10^3 \times 10^4 = 10^7$
  - (×) $E = \{1, 10, 10^2, 10^3\}$, $F = \{0, 1, 2, 3\}$, f
  - $f(10^3) + f(10^4) = 7$
    - $f(10^3) = 3$
    - $f(10^4) = 4$
- Généralités
  - $E \xrightarrow{f} F$
  - (S) $x \longrightarrow f(x)$
  - (T) ← peut
    - chaque LC ds E → un LC ds F
  - $\perp$ LCi E
  - $\perp'$ ~~E~~ LCE
  - T LCi ~~E~~ F
  - T' LCE F
  - Alors essai ns nous limiterons
    - $\perp_1$ à T_1
    - $\perp_2$ à T_2
    - $\perp'_1$ à T'_1 etc.
  - Si (T) est telle que on limiter
    - $\perp \longleftrightarrow T$
    - $\perp' \longleftrightarrow T'$
    - respectant certaines conditions
    - f E→F = **morphisme**
- i
  - le difficile sur
  - T1 facile
  - au lieu
    - $E \perp_1$
    - $z = x \perp_1 y$
    - Si $f(z) = f(x)\, T_1\, f(y)$
  - remarque ds E pr exprimer le résultat
  - $\forall \in$ LC
  - il peut ê un morphisme

$\overset{(S)}{E} \longrightarrow \overset{(T)}{F}$

$f : E \to F$ — Loi T

— Loi $\perp$

tq

- pr chaque Loi $\perp$ ds E, associée à une Loi T ds F une corr biuniv

(E) Loi LCI's $\longrightarrow$ (F)

$\star \boxed{f(x \perp y) = f(x) \, T \, f(y)}$

chaque LCE $\perp' T'$

chaque LCE $\perp'$ E — Ω

$\star \boxed{f(\alpha \perp' x) = \alpha \, T' f(x)}$

$E \xrightarrow{corr} F$

$LC_S \longrightarrow LC_T$

= morphisme

MORPH

D

≠ sortes

$E = F$ autom

isom

endom

$E(S)$

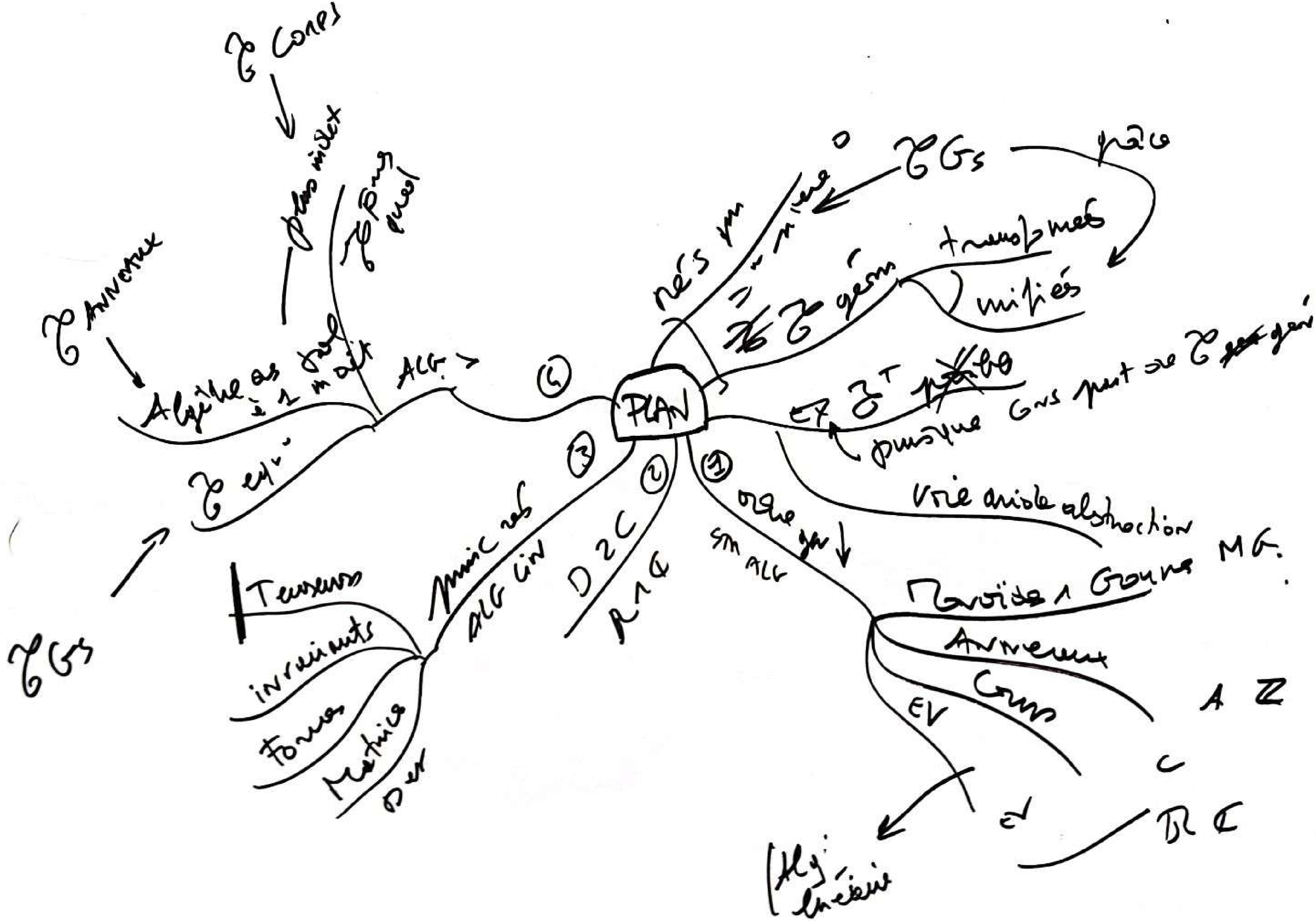
$f(x) \perp' f(y) = f(z)$ vérif sur F

$E = \{x, y, z \dots\}$

$F = \{f(x)$

Si $\exists$ Loi $\perp$ ds E $\wedge$ Loi corr T ds F et

Si $x \perp y = z$ vérifiée sur E



PLAN
CORPS
ANNEAUX
ALG.
Tenseurs
invariants
Formes
Matrice
ALG LIN
D 2 C
transformées
unifiés
voie axiale abstraction
Groupes MG.
Anneaux
Groupes
EV
A Z
C
Alg. linéaire

(3)

MONOÏDES & GROUPES

MONOÏDES GROUPES

AVEC 1 LCI = ~~ALG~~ str algébrique

2 — = Algèbre

1 seule opéra°

1ère mise en évidence ~~Galo~~ Galois 1830

MONOÏDES
GROUPES

AVG 1 loi = ~~AG~~ str algébrique

2 — = Algèbre

1 seule opéraⁿ

1ère mise en évidence Ch. Galois 1830

MiANC

Monoïdes

D.

- $E \neq \emptyset$
- LCI Binaire $x \perp y$
- A | N
- $(E, \perp, e)$ — $\perp$: A, e : N

Ordre : Nb elts fini, qui $\supset$ = card

Rem

1. (C)
2. E, A — Sous monoïde : e et fermé pour $\perp$, $a \perp b \in A$
3. iA = semi groupe
4. $(E, \perp, e)$ — I, N — Monoïde

Ex.

- $(\mathbb{Z}, +, 0)$
- $(\mathbb{Z}, \times, 1)$
- $(\mathbb{N}, \times, 1)$
- $(\mathbb{N}, +, 0)$

Pr DM

1. $\neq \emptyset$
2. LCi A
3. $\exists e$

M des ~~Substit~~ substitutions

∃ card E ENS S au moins M

$S(E) = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$

×	s_1	s_2	s_3	s_4
s_1	s_1	s_2	s_3	s_4
s_2	s_2	s_1	s_4	s_3
s_3	s_3	s_3	s_3	s_6
s_4	s_4	s_4	s_3	s_5

$E = \{a, b\}$

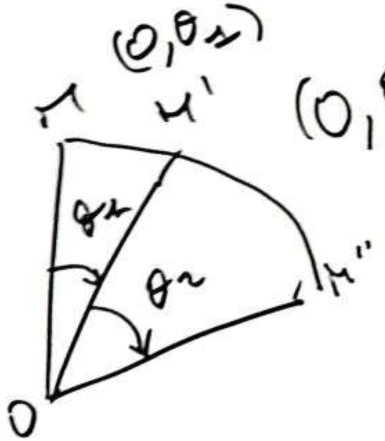
4 S possibles $s_1\ s_2\ s_3\ s_4$

$s_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$ elem N

$s_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

$s_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ a & a \end{pmatrix}$

$s_4 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & b \end{pmatrix}$



$(O, \theta_1+\theta_2)$

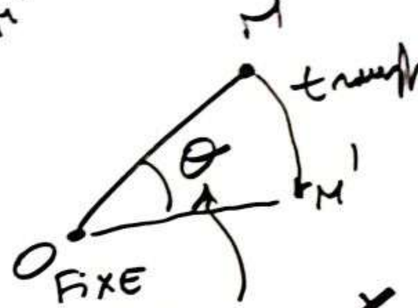
$M \xrightarrow{(\theta)} M'$

$\Omega(O,\theta)$

$\underbrace{(\theta_1)}_{\text{associe rot}} \perp (\theta_2) = (\theta_3)$ = angle

$(\theta) \perp (-\theta) = (-\theta) \perp (\theta) = (0)$

"produit"



MIAN

$\boxed{\text{GIANS}}$ C

monoïde

dont ts elts sont symétrisables pr opérer sur le M

- $(G, \perp, e)$
- ≠ ∅ A
- pr tout $x \in G$, il existe x' tq $xx' = x'x = e$
- Abelien

STR G

• D

• Notation

• A

$(G, \perp, e)$

× multiplicatif

+ additif

$\times$ géom

Gr thème résultante de 3 vecteur (x, y, z)

Composante

règle ~~[illegible]~~

★ est le G des vecteurs géom à 3 dim

parallélépipède

$(\mathbb{R}^3, +, 0)$ G

$(\mathbb{R}^*, \times, 1)$ GC

$(\mathbb{Q}^*, \times, 1)$ GC

$xx^{-1} = x^{-1}x = 1$

a $1/a$ $\frac{b}{a}$ a/b

$(\mathbb{Z}, +, 0)$ GC

$x+(-x) = (-x)+x = 0$

$e = 1$

x^{-1} inverse

0

$-x$ opposé

$(0,0,0)$ $(-x,-y,-z)$

$(x,y,z)+(x',y',z') = [(x+x'), (y+y'), (z+z')]$

D addition vecteur

$(M, \perp, e)$

Δ N

G

ens des elts symétrisables = sous monoïde

$= \underline{U(M)}$

STR G

• Sous groupe d'un monoïde

$u_1 \; u_2 \; u_3$

Si de + $u_1 \perp u_2 \in U(M)$ $\forall u_1, u_2$

= sous G du M

Ex

$M = (\mathbb{Z}, \times, 1)$

= G des elts symétrisables de M

$=$ G des unités de M

Seuls elts symétrisables -1 et $+1$.

seuls entiers possédant un inverse ent

$U(M) = \{1, -1\}$

groupe symétrique d'un ens

$E = \{a, b, c, \dots, m\}$

$\mathrm{Sym}\, E = E_n$

Chaque elt ~~...~~ une permutation de E

ens contient donc $n!$ elts

G ordre n

G des S_n sur n elts

elts sym quels ?

Contient un G

$M = S(E)$ des subs°

$U(M)$ = G sym de E

noté $\underline{\mathrm{Sym}\, E}$

isom

:) intérêt de la notion de Groupe

Si établissons P gén Gs
et ∀ ces cas → économie de DM

groupes elts très dissemblables
peuvent ê en fait rapprochés

$\bullet$ 2 M $(E, \perp, e)$ $(E', \perp', e')$

Si $\exists f$ bij tq

$\forall x, y \in E$

$$\begin{cases} f(e) = e' \\ f(x \perp y) = f(x) \perp' f(y) \end{cases}$$

Ex

Gs $(\mathbb{R}, +, 0)$ $(\mathbb{R}^+, \times, 1)$

$x \xrightarrow{f} e^x$

$$\begin{cases} f(0) = e^0 = 1 \\ f(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y \\ \quad = f(x) \times f(y) \end{cases}$$

$\bullet$ T Cayley

tout M est isom à 1 M de substitution

tout G est isom à un G de substitu

obtenir

étude classe des M de S_n
$\forall$ G M

GIANSC

Si $A \subset$ un G pour $\perp$ définie sur

SOUS G

• D

• EX "ô triviaux"

$(P, +, 0)$ SG $(\mathbb{Z}, +, 0)$

nbs pairs

SG $(\mathbb{Q}, +, 0)$

SG $\mathbb{R}$

$\mathbb{C}$

• Rem

1- Pr que soit

2- peut que $\perp$ ~~considère~~ considéré soit le même ds 2 es

$\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$

$(\mathbb{R}^+, \times, 1)$ ~~SG~~ $(\mathbb{R}, +, 0)$

$\{e\}$ SG de G

G unité

• SG cycliques

$a \in G$ X

note a^2 comme $a \times a$

convention $a^0 = 1$

règ cal sur exposants

Soit maintenant E puissances de a

$\langle a \rangle = \{1, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$

$\left\{ \begin{array}{l} a^n a^m = a^m a^n = a^{m+n} \\ (a^n)^m = a^{nm} \end{array} \right.$

DM que $\langle a \rangle$ est un SG

SG cyclique de G engendré par l'élt a

Si G est + ~~addit~~

remplacés par multiples $0, a, 2a, ka$

enfin

$\forall$ G cyclique ~~est~~ est commutatif

G est dit lui même cyclique s'il coïncide avec ses SGs a générateur

DÉCOMPOSIᵒⁿ 1 G SUIVANT SON SG

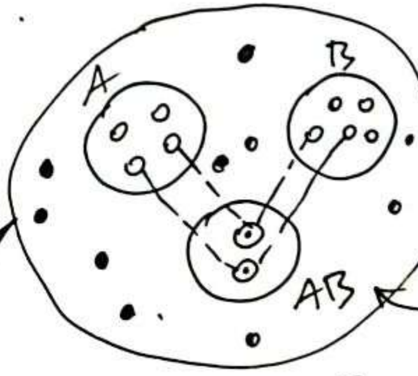
Homomorph.

À revoir

→ ≠ Alg lin

Si décomp à G et à D

Produit des SE d'un G



$\forall a \in A$ $b \in B$ $\exists x = ab \in G$

E de ts les élts x de G représentables par le composé ab est le produit des SE A et B

$(AB)C = A(BC)$ ← F A N

...

Si $A \supset$ que a AB se réduit à aB

BA Ba

pas nect $\subseteq$

~~Cl~~ Classes d'équivalence à G

peut donc décomposer G en CE à G ou à D modulo A

AD 4-

3

2 CE à G selon un SG

2-

se sont disjointes 2 à 2

Soit G incident sub finis

soit $\forall y \in A$, $yA = xA$

1-

G est ~~décomp~~ décomposé

...

Gauche $xe = x$

$x \in xA$ CE ~~auff~~ à Gauche du G G modulo A engendrée par x le produit xA

$x \in G$

CONCLUSION

1- D (G, +, e)

2- Notion SG A

3- ℰ G de substitutions

G symétrique de n objets Sn ∋ n! ~~substitutions~~ substitutions possibles

Galois
·G

50-60 ans

Dedekind 1872

Hilbert 1897

ANNEAU

4

STR ANNEAU

Galois
G

50-60
ans

Dedekind 1872

Hilbert 1897

ANNEAU

4- ( ) $\in E$

3- $(m+n\sqrt{2}) + (m'+n'\sqrt{2})$
$= (m+m') + (n+n')\sqrt{2}$
$= a + b\sqrt{2} \in E$

2- $+ \times$ AC et distrib D

1- $m = n = 0 \Rightarrow m + n\sqrt{2} = 0$ donc $0 \in E$
$m = 1$, $n = 0 \Rightarrow = 1$, $1 \in E$

E $m + n\sqrt{2}$, $\in \mathbb{Z}$, $\in \mathbb{Z}$

5 $0 \; 1 \; N \; +\times$
6 sym
Donc
$(E, +, 0)$ GC
$(E, \times, 1)$ M
$\times$ D
Anneau non abelien

MiAN GiANS

~~MiAN~~ GiANC

A $(E, \bot, T, e, e')$
2 opérations une algèbre

Anneau

$(G, \bot, e)$

Str algébrique

$(\mathbb{Q}, +, \times, 0, 1)$

$(\mathbb{Z}, +, \times, 0, 1)$

Ø alg

EX NUM

D

D générale

$(E, \bot, T, e, e')$
1- $(E, \bot, e)$ G Abélien GiAN
2- (E, T, e') Monoïde MiA
associant D
3- $\forall x, y, z \in E$
$\begin{cases} xT(y \bot z) = (xTy) \bot \\ (y \bot z)Tx = (yTx) \bot \end{cases}$

seulement
$\not\subset$ 2ème

4- Str triche
rel x traits alg

Renl Not

mutuellement

Jakobson 3-

2- (E, T)
(magma
semigroupe

D

NB $\begin{vmatrix} x(y+z) = xy + xz \\ (y+z)x = yx + zx \end{vmatrix}$

G $(E, +, 0)$
M $(E, \times, 1)$

1- $\bot$ AC "+" 0 $-x$
Signification usuelle

$x(y+z) =$
$2(3+4) =$
$2 \times 7 =$

2- TA
+
1
pas nec
se prévoir
inverse

D(nn)
soient
ê D axiomatique

LC ~~est~~ soit G
non M

x	a	b	c	d	...	n
$f(x)$	0	1	1	0	...	1

0 ouvert
1 fermé donc

Ex ... électrique

D

01101

17 contacts

1er ouvert
2ème fermé... / 17 caractères pour décrire l'ensemble circuit

300 est écrite

Alors que 2 situations

comment penser
ou il ne passe pas

Soit x val 1 contact

[tout = 1 fermé
rien = 0 ouvert zéro]

Si ouvert $= x = 0$
fermons le pass val $x' = 1$
et ouvrons $\boxed{(x')' = 0}$

couple (x, x') symétrique
2 seuls couples possible de val sym $(1,0)$ et $(0,1)$

V	b = 1	b = 0
a = 1	1	1
a = 0	1	1

Combinaison (a, b) et donc 1 si sur E des contacts "V" vel ou

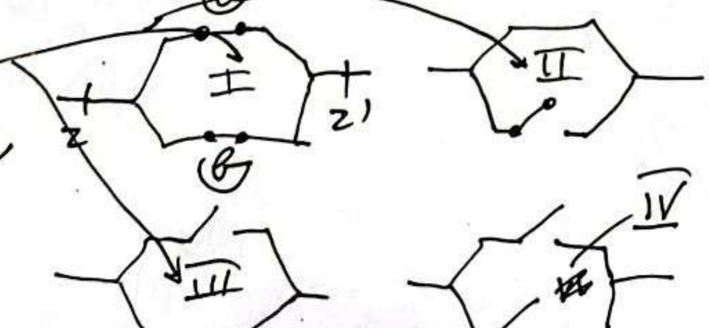
equiv à un contact unique C

Montage en dérivation
2 contacts

$c = 1$

Il suffit que l'un ou l'autre des contacts soient fermé

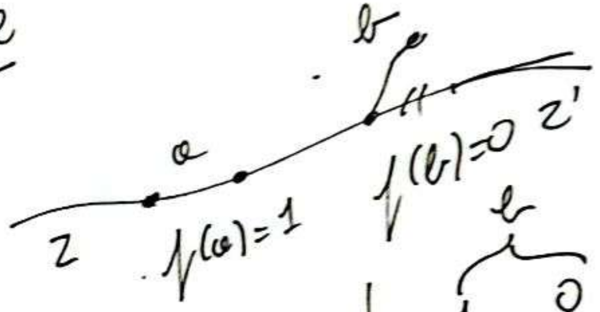
cas est pour val 1



4 val possibles

I a et b = 1
II a = 1 b = 0
III a = 0 b = 1
IV a = b = 0

Série



$\wedge$		$\overbrace{1 \quad 0}^{b}$
a	1	1 0
	0	0 0

Resumé

$B = \{0,1\}$

$\vee \wedge$ 2 opér

1 aep opér "'" $\begin{cases} x=0 & x'= \\ x=1 & x'= \end{cases}$

Ex élec (suite)

D

Aut ex

poli 1 inad

$\sqrt{2}$ est ~~…~~ carrés ~~…~~ rdu

~~Boster~~ Al

clas no mod

Z Algèbre

* Nom GM

VAC $a \vee b = b \vee a$

③ Ver 1

mut D

② DM

$\{B, \wedge, 0\}$ Monoïde

1 N

d'autre part unique

$0' = 1$ et $1' = 0$

on a $1 + 1' = 1 + 0$

et $0 + 0' = 0 + 1$

tt elt de $B = \{0,1\}$

possède un inverse

pour

$(B, \vee, 1)$ G ①

$(B, \vee, \wedge, 1, 0, ')$ ⇐

Anneau

= Booléen

= Algèbre de Boole

TYPES

- en imposant conditions supplémentaires au monoïde (E, T, e')
- • CTC Abelien $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$
  - Mot car ordre si NON
- • Domaine d'intégrité
  - Si $x \neq 0$ et $y \neq 0$ => $x \neq x$
  - A est unitaire
  - E^* exclusion et un sous monoïde Mais pas
  - $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$
  - $ab = 0 \Leftrightarrow a$
- • Diviseurs de 0
  - Si il existe $a \neq 0, b \neq 0$ et $ab = 0$
  - $ab \neq 0$ ssi $a = 0$ } diviseurs de
  - Sul aucun $x \neq 0$ ou 0
  - ∀ Ens qui po tou div 0
- • Corps
  - 2ème Loi Grp sur $\forall a \neq 0$ ↓ inverse = Anneau de division
  - Grp $\mathbb{Q}$ $\mathbb{Z}$ ~~corps~~
  - H $a \neq 0$ ↓ a^{-1} tq $aa^{-1} = 1$
  - $ab = 1$ possible que si $a = b = 1$
- • Algèbres NON ASSOCIATIVES
  - 2ème opé ✗ = A non Assoc
- + simple
  - Mod G Fond par 2 vec Multiplication sp F ou Tenseur Linear modules
  - muni d'ens $\vec{V}$ géom 3 dim
  - × vec
  - A × vec

CONGRUENCES

NOTION IDÉAL

on dit aussi ideal de A

I SG tq pr $\forall a \in E$ $b \in I$

$(E,+,0)$

$\mathbb{Z}$ $b \equiv c \pmod a$

$b-c$ divisible par ent a

généralisation

sur M ou sur G

$(E,\perp,e)$ MIAN

a et a' sont dits congruents $\equiv$ $\mathcal{R}$

si $a \equiv a'$ et $b \equiv b'$

entraine $a \perp b \equiv a' \perp b'$

Cong RE qui peut ê composée selon

E ns ts els d'équiv à a

ds E forme CE $\overline{a}$

$\overline{E} = \{\overline{a}, \overline{b}\}$

ens quotient

sur $\equiv$

$\overline{E} = E/\equiv$

ens CE

Si MG

$\overline{a^{-1}}$

$\overline{a}\,\overline{a^{-1}} = e$

D

SG K de G

est dit normal

ou invariant

si pr $\forall g \in G$ $g^{-1} k g \in K$

K $g^{-1} k g \in K$

DS 1A

2x2 2xD

Si $a \equiv a'$ et $b \equiv b'$

Alors $a+b \equiv a'+b'$

et $ab = a'b'$

$\overline{a}+\overline{b} = \overline{a+b}$

$\overline{ab} = \overline{a}\,\overline{b}$

$\mathcal{R}$ qui est compatible avec les 2 lois

Cong $(E,+,0)$ GIANS

$(E,\times,1)$ MIAN

$E \xrightarrow[\text{bij}]{f} E'$

$(a,b) \longmapsto (a',b')$

image de $0 = 0'$

$1 \quad 1'$

$-a \quad -a'$

$-a$

$a^{-1} \quad a'^{-1}$

ISOM

Si pas de division par 0

alors commutatif

gen

2 As isomorph

peuvent avoir des elts

de nat ≠

mais les opera alg ...

Structure de GRPS

⑤

i j k . $\sqrt{}=1$

D

aut alglin ...

XIX NB! nb Algébrique Dedekind

Hilbert ...

Complètent str A Ax suivant

Pr $\forall x \in A$ $\exists N$ ...

$\exists$ sym 2 ... bi

• Axiomes $\uparrow A$ + Axiom $\uparrow$

1- $E \neq \emptyset$

2- ~~(E,+~~ $\perp +$

3- e 0 $\leftarrow \neq$ de

4- $-x$

5- T

6- e' 1

7

8 $\underline{2 \times D}$

iA

I A N S

• Rem

① ② ③

fini ~~fini~~ infini

(nnn)

① AC

② $\forall$ elt $x \neq 0$ ...

suffit

ex $C \not\subset$

$= m + n\sqrt{2}$

$\mathbb{C}$

$\mathbb{R}$

C

$\mathbb{Q}$ ~~$\not\subset$~~

$\mathbb{Z}$ $\not\subset$

• Ex

CGm

Pr DM

...l +1 or −1 ont un inv

$1^{-1} = 1$ $-1^{-1} = -1$

D

- Axiomes
  - ↑A + Axiome ↑
  - 1- $E \neq \emptyset$
  - 2- ~~E,+~~ $\perp$+
  - 3- e 0 ← ≠ de
  - 4- $-x$
  - 5- T
  - 6- e' 1
  - 7
  - 8 2×D
  - iA
  - I A N S
- Complétant str A ↑↑ suivant
  - pr $\forall x \in A$ $\neq N$ ...
  - $\exists$ sym 2 ... bi
- XIX NB1
  - ns Algébrique Dedekind
  - Hilbert ...
- Rem
  - ① ② ③
  - fini / infini (...)
  - ① AC
  - ② $\forall$ elt $x \neq 0$ ...
- Ex CGm
- Pr DM
  - suffit
- ex C ⊄
  - aut + alg lin ...
  - $\mathbb{H}$ $q: a+bi+cj+dk$
  - $i^2=j^2=k^2=ijk=-1$
  - Quaternions
  - +
  - $(a+a')+(b+b')i+(c+c')j+(d+d')k$
  - $a=b=c=d=0$
  - ×

×	i	j	k
i	-1	k	-j
j	-k	-1	i
k	j	-i	-1

  - $\varphi = 0$ N
  - × N=1
- $x = m + n\sqrt{2}$
  - $\mathbb{A}$
  - $\mathbb{R}$
  - $\mathbb{C}$
  - $\mathbb{Q}$ ~~...~~
  - x^{-1}
  - $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$
  - $\mathbb{Z}$ ⊄
  - seul +1 ou -1 ont un inv
  - $1^{-1}=1$ $-1^{-1}=-1$

CORPS FINIS

EX étu clas résiduelles modulo n ds $\mathbb{Z}$

repuise cette
ens ds cushe $\mathbb{Z}$

. CONSTITUTION ens $\mathbb{Z}/n$

$n \in \mathbb{Z}_{\neq 1}$

$a\ b \in \mathbb{Z}$

$a \equiv b \ (\text{mod}\ n)$

$a - b$ divisible.

" a/b comme le

$\mathbb{Z} = \bigcup$ des n classes ré
modulo

$C_0 = \bar{0}$ v

$C_1 = \bar{1}$

$C_2 = \bar{2}$

$C_{n-1} = (n-$

$\mathbb{Z}/n = \{C_0, C_1 .$

$= \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}$

PROPRIÉTÉ

- SOUS GRPS
- Caractéristique
- Extension

connectement définis

G

A

C

XIX

mise en ordre

alg

anal

exploita° :-

$\mathcal{E} = {}^{ns}$

$\mathcal{E} \neq {}^{s}$

Hamilton

σ

REM HIS

1er plan

...ique

...logie

ENS $\vec{V}$

n periode

$\vec{V}$ n dim Grassmann 1846

"Alg ex ten

Alg lin

Pearro

axiomatique EV

1920

EV CP str + gén module

module

MODULE

REM
HIS

XIX
G
A
C
correctement définis
mise en ordre
alg
anel
exploitation :)
$\mathcal{C}$ =ns
$\mathcal{C}$ f^{ns}
ENO $\vec{V}$ Hamilton
ñ période
$\vec{V}$ n dim Grassmann 1846
"Alg ext
Alg lin
Peano
axiomatique EV
1920
EV CP stn + gén module
module

1er plan
alg homologique
topologie

str algébriques

G 1 lci

A C 2

LCI & ~~LE~~ LCE

// G x,y

~~D~~ D

nb transf^n geom subs^n simp par G quel ≅ math

D m

LCi + → G GiANS (C)

NB (G, +, 0)

D

D LCE sur G

$\Omega\ \alpha\ \beta$

(α, x)

Anneau

1 GiAN

2 iA

3

(N

2D

CORPS

GIANS

iANS

iAN

S

module à gauche sur Ω

Si

$$\begin{cases} \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y \\ (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x \\ (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x) \\ 1x = x \end{cases}$$

$\forall x, y \in G$

$\alpha, \beta, 1 \in \Omega$

neutre pour 2ème LCi de Ω

$\Omega \times E \to E$

$(\alpha, x) \to \alpha x$

Composé à Gauche

$(x+y)\alpha =$

$x(\alpha+\beta) =$

$x(\alpha\beta) =$

$x1 =$

Droite

$x = (-1, \ldots)$

$y = (3, \sqrt{2})$

$z = (1/3, 4)$

LCi $+$ c A N $\vec{0} = (0,0)$

$x + y = (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$

$+$

$(2, 1+\sqrt{2})$

$-x = (-a, -b)$

S

Groupe

$G = \{x, y, z \ldots\}$

LC_E

$\mathbb{Z}$

$\lambda x = \lambda(a,b) = (\lambda a, \lambda b)$

Homothétie avec le rapport

module sur $\mathbb{Z}$

groupe de droite

car

$C \times$ dit

$(\lambda a, \lambda b)$

$= (a\lambda, b\lambda)$

onc

E ~~mix~~ . Simplicité

EX

E abstrait

Ring

topologie

alg homologique

cal

Anneau sur $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$

$=$

EV

$\mathbb{C}$

corps

Structure d'ESPACE VECTORIEL

HIS • $\mathbb{C}$ → $\vec{V}$

EV = Module sur 1 C

opposé pouvoir 5 chap Alg lin

méc
phys
informatique

analyse
géom diff

~~AS~~ annexe
calc mat
1850
1860
Sylvester Cayley
Hermite
D Ax 1888
PEANO

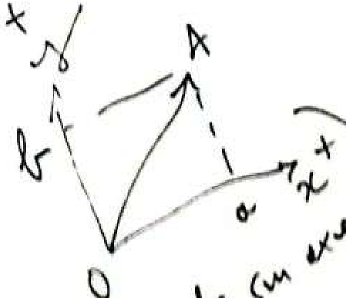
↓ calcul Ron $\mathbb{C}$ comp → comparaison calc ds EV

géom CP
origine
très importance
capitale
XIX
Gauss $\mathbb{C}$
Hamilton quaternion 1843
Grassmann alg extérieure 1844

a+bi
$i^2=-1$
$(a,b)\times(a',b')$
$=(aa'-\cancel{bb'},\ ab'+ba')$
$= (aa'-bb', ab'+ba')$
quaternions
(a,b,c,d)
opérations
calc $x=(a,b,c,\dots n)$

axiom + def avec
dim en $\vec{V}$
somme
composantes
$(a,b,\dots n)$
objet math
$\vec{V}$
DEF
n dim
not $\mathbb{C}$

géom
$\vec{V}$ géom
segment fléché
7
déf géom $\mathbb{C}$
assemble cette nouv



HIS · C

EV = Module sur 1 C

Ramfrey calc mat
1850
1860
Sylvester Cayley
Hermite
D Ax 1888 Peano

opérat° pouvoir ts chap Alg lin
méc
phys
informatique

analyse
géom diff

↓ calcul ds C corps ⇒ capacité cal ds EV

C → $\vec{V}$ géom CP
origine
↑ ref.
importance capitale XIX

Gauss C
Hamilton quaternions 1843
Grassman alg extérieure 1844

a+bi
$i^2 = -1$
$(a,b) \times (a',b')$
$= (aa'-bb', ab'+ba')$
a b
a' b'
$= (aa'-bb', ab'+ba')$

14 quaternions
(a, b, c, d)

← cal x = (a, b, c, … n)
opérat°
som
prod + déf axes
dim ds $\vec{V}$
composante
(a, b, … n) objet math
$\vec{V}$
DEF
quaternion 4
Grassman n dim
$\vec{V}$ ê 2 dim

rep géom C
ds ensemble cartésien
(a, b) qui déf un C peut avoir ê déf sous un segment fléché
" $\vec{V}$ géom "
géom
rep C
= $\vec{OA}$ segment fléché
peut ê déf
proj a et b sur axes

E métriques = EVN ETB EPH EE EM

aust
EXE → R

Approx fs cont par polyn.

MODULES SUR 1 A

SUR 1 A

MODULES
1 LCi + 1 LCE

SUR 1 C

EV
1 LCi + 1 LCE

Sur un corps C

+ NOTION DISTANCE (D)

NORME E → R^+

EV NORMÉS de BANACH
1 LCi + 1 LCE + (D)

+ 2ème LCE

PRODUIT SCALAIRE

préH

E ~~EV~~ HILBERTIENS
1 LCi + 2 LCE + (D)

+ 2ème LCi

ALG NORMÉS DE GELFAND
2 LCi + 1 ou 2 LCE
+ (D)

multiforme E topologiques
E partiellement ordonnés

E norme de fs cont

impose

doter EV str complémentaires

• ALG → ANAL

– que CL au 1er O

$\vec{V_1} + \vec{V_2}$

$\alpha\vec{V}$

E compo

LCE homothétie

HiS

– + Distance

ce qui impose axiomatiser notion de passage à la limite

→ E métrique

EV + Métrique = E de Banach = EV Normé

+ 2ème LCi

+ Algèbre

Algèbre normé

Gelfand 1938

EVN + → 2ème LCE

Définissant le cos entre 2 $\vec{V}$s

et

elt de produit scalaire

E hilbertien
Cantorienne ...

Ai Stone von Neumann
1930

P 1 a 

zéro ou 1

ADSB $\forall$ elt x doit avoir un correspondant $f(x)$

INJ

D ssi $\forall x \in A$, $\forall x' \in A$, $f(x)=f(x') \Rightarrow x=x'$

$\neq$ $\neq$

P

sur ~~plus~~

SURJ

D ssi $f(A)=B$

P ssi ~~pr~~ $\forall y \in B$, il existe au moins un $x \in A$ ~~tq~~ tq $y=f(x)$

BIJ +

D

un x unique tq

P A sur B

ssi il existe g $B \to A$ tq

$f \circ g = \mathrm{Id}_B$ et $g \circ f = \mathrm{id}_B$

bij réc f^{-1} $B \to A$

• $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$

$g \circ f$ bij $\quad (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

LCI sur 1 E

déf

D $f : E\times E \longrightarrow E$

$(x,y) \longmapsto$ Composé de x et de y

$x+y \cdot * T \ldots$

GROUPE

$(E,*)$ GIANS(C)

D ssi

① (A) $(x*y)*z = x*(y*z)$

② (N) $x*e = e*x = x$

③ (S) $x*x' = x'*x = e$

(C) $x*y = y*x$ +

SOUS GROUPE

(E,*) H

ssi

① $H \neq \emptyset$

② $x \in H \Rightarrow x*y \in H$
$y \in H$

③ si $x \in H$ $x' \in H$

P ssi $x \in H$ $y \in H \Rightarrow \overline{x*y'} \in H$

⚠ $\cup$ fini pas SG

MORPH

ISO — $f : E \to F$

de $(E,*)$ ds (F,T)

ssi

$\forall x\, y \in E$

$f(x)\, T\, f(y) = f(x*y)$

bij

CORPS COMMUTATIF

$(E,+,\times)$ ssi

① $(E,+)$ GC GIANSC 0

② $(E-\{0\},\times)$ GC GIANSC 1 unité

③ $\times$ D / +

$x\times(y+z) = (x\times y)+(x\times z)$

	A		C	
G				unitaire
I	I	I	I	I
A	A	A	A	A
N	N	(N)	N	N
S	S		S	S-{0}
(C)	C	(C)	C	(C)
		D		D
	*	T		

- $a \neq 0_E$, $b \neq 0_E$ et $a T b = 0_E$ diviseurs de 0
- Si il y a pas intègre
Corps n'est intègre
$a T b = 0 \Rightarrow [a = 0 \text{ ou } b = 0]$

CARDIOLOGIE / CHIRURGIE / ...

EV Li +

E — LE aide 1 comp

Synthèse — $\mathbb{K}$ — $\mathbb{R}$ / $\mathbb{C}$

$\vec{u}, \vec{v}$ vecteurs

λ μ scalaires

D

E EV sur $\mathbb{K}$ < somme / produit

$\mathbb{K}$-EV lorsqu'on a def 2 lois ayant P suivants

① Li → $(E,+)$ G abélien

② LE / $\mathbb{K} \times E \longrightarrow E$

$(\lambda, \vec{u}) \longmapsto \lambda\vec{u}$

(A) Somme — I A N S C

produit (A) — I A N S-{0} C ? D

$\vec{0}_E$

• $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$ (A)

• $\lambda(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$ D

• $(\lambda\vec{u}) + (\mu\vec{u}) = (\lambda+\mu)\vec{u}$ (D)

• $1\vec{u} = \vec{u}$

$V \times V \longrightarrow V$

① $(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \longmapsto \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

② × par 1 réel

$\mathbb{R} \times V \longrightarrow V$

$(\lambda, \vec{v}) \longmapsto \lambda \cdot \vec{v}$

D $(V,+,\cdot)$ EV sur $\mathbb{R}$ ssi

① $(V,+)$ GC

② $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

③ $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{v}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{v}$

④ $(\lambda+\mu) \cdot \vec{v} = (\lambda \cdot \vec{v}) + (\mu \cdot \vec{v})$

⑤ $\lambda \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = (\lambda \cdot \vec{v}_1) + (\lambda \cdot \vec{v}_2)$

CP EVS $\vec{v}$ de E ou P par $\mathbb{R}$ + × vecteurs par $\mathbb{R}$ EV sur $\mathbb{R}$

Rem analogie

1 nombres vecteurs

2 Somme $\vec{v}$ de la géom

$\lambda\vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$

Règles de Calcul

P +

(A) $\vec{v}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = (\quad) +$

(N) $\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$

(S) $\vec{v} + (-\vec{v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{0}$

(C) $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1$

P × par $\mathbb{R}$

• $(\lambda\vec{v} = \vec{0}) \Leftrightarrow (\lambda = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0})$

• $-(\lambda\vec{v}) = (-\lambda)\vec{v} = \lambda(-\vec{v})$

• $(\lambda\vec{v} = \mu\vec{v}) \Leftrightarrow (\lambda = \mu$ ou $\vec{v} = \vec{0})$

• $(\lambda\vec{v}_1 = \lambda\vec{v}_2) \Leftrightarrow (\lambda = 0$ ou $\vec{v}_1 = \vec{v}_2)$

→ en plus de ③ ④ ⑤

P + et × $\mathbb{R}$

• $(\lambda - \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} - \mu\vec{v}$

• $\lambda(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \lambda\vec{v}_1 - \lambda\vec{v}_2$

SEV

$U \subset E$ D ssi

① $U \neq \emptyset$

② $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in U$

③ $\lambda \vec{v} \in U$

P ssi

①

② $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 \in U$

CL de p $\vec{v}$ de

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_p$

et vecteur

$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_p \vec{v}_p$

$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$

SE engendré par p vecteurs

Ens des CLs de p vec de V est un SEV de V appelé

Fam génératrice

$(\vec{v}_1 \dots \vec{v}_p)$

ssi SEV engendré par $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_p = V$

T ssi

$\exists$ p réels $\lambda_1 \dots \lambda_p$

tq $\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_p \vec{v}_p$

Fam libre

$= \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_p = 0$

Rem

$\vec{v}$ lin indépendants

P pour $\forall i \in \{1 \dots n\}$

$\vec{v}_i \neq \vec{0}$

tte sous fam d'une fam libre est une f.l.

Fam liée

D ssi pas libre

Rem lin dép

T $\exists$ p réels $\lambda_1 \dots \lambda_n$ non ts nuls

tq $\lambda_1 \vec{v}_1 \dots \lambda_p \vec{v}_p = \vec{0}$

P Si un $\vec{v}$ d'une fam est nul → fam liée

Si $(\vec{v}_1, \vec{v}_p)$ fam liée

$\forall \vec{v}$ fam $(\vec{v}_1, \vec{v}_p, \vec{v})$ est liée

Base

fam lib & gen de V

= base de V

ESPACE AFFINE

$\mathcal{E}$, LE visé

muni d'un EV

$E \ni \vec{u}, \vec{v}$

direction de $\mathcal{E}$

+

elts $M\,P\,\varphi$ points

D

$\mathcal{E}$ est un EA

(d'EV ~~direct~~ direction E)

lors qu'on a d'une

LE ~~…~~ de schéma

$$+ \begin{array}{l} E \times \mathcal{E} \longrightarrow E \\ (\vec{u}, M) \longmapsto M + \vec{u} \end{array}$$

~~Verifiant~~

Verifiant pr ts points & – vec

① $(M + \vec{u}) + \vec{v} = M(\vec{u} + \vec{v})$
ds $\mathcal{E}$ — ds E

② $\vec{M} + \vec{O_E} = M$

③ $\vec{O_E}$ est l'unique vec verifiant

$$M + \vec{x} = M$$

$\forall M \in \mathcal{E}$

④ Pour ∀ "le point (P, φ) de $\mathcal{E}$"

il existe un vec ~~…~~ $\vec{u}$ de E tq

$$\varphi = P + \vec{u}$$

→ Si P et φ sont fixés, $\vec{u}$ est unique

. Ds $\mathcal{E}$ on peut écrire sous la forme

$$\boxed{\varphi - P = \vec{u}}$$

et convenu d'écrire $= \vec{P\varphi}$

Alors on a

$$\boxed{\varphi = \vec{P} + \vec{u} \Longleftrightarrow \vec{P\varphi} = \vec{u}}$$

P

$\varphi = P + \vec{P\varphi}$

$\vec{MM} = \vec{O_E}$

$\vec{MP} = \vec{M\varphi} \Longleftrightarrow P = \varphi$

$\vec{P\varphi} = \vec{PM} + \vec{M\varphi}$ Chasles

P vec, → points
passer

• A pt fixé

Soit $f : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathcal{E} \\ \vec{u} \longmapsto A + \vec{u} \end{array}$

bijection

$\vec{u}$ — 1 seul M

tq $f(\vec{u})$ ou

$A + \vec{u} = M$

• Cette bij "ramène les vec, à une m̂ origine A"

peut considérer EA $\mathcal{E}$ comme l'ens des extrémités des vecs de E, lorsque ces derniers sont ramenés à la m̂ origine A

E x, y vecteurs vecs
K corps α, β
Pour E soit un module sur K
il faut et il suffit que
① $(E, +, 0)$ G iANS
② Def sur E LCE faisant intervenir
K $(\alpha, x) \longmapsto \alpha x$
Alors K étant un C, module E
est un EV sur K

Axiomes

EV = Esp vect sur 1 C

D gén

① $x+y=y+x$
② $(x+y)+z = x+(y+z) = x+y+z$
③ 0 vec nul
$x+0 = 0+x = 0$
④ $x-x=0$
⑤ $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$
⑥ $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$
⑦ $1x = x1 = x$
⑧ $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

Ⓝ nullité
⑤ unicité

$\alpha + x = \ldots$
possible
D ?

Rem ①

D

K numérique ③

EV est dit rationnel
réel / complexe
diff

mais elts de E sont non cela des nombres

mais des listes de nombres)*

+ Gouvernent uniquement l'opération sans que la nature des objets entre en jeu

$\boxed{\text{* } 0 \neq \text{vec de } E ! \vec{0}}$

peut appeler 0

~~X~~ de E LCE ②

Ces A+ ... sont valables ici aussi

$(K, \underset{\text{LCi}}{\underline{\perp}}, \underline{\top}, \underline{\varepsilon}, \varepsilon')$

$\varepsilon' = 1$
un multiplicité

possède pas de 2ème LCi
donc pas elt unité

montre alors
$\varepsilon x = 0x = \vec{0}$

$-x = (-1)x$
ssi $\alpha x = \vec{0}$
$= \vec{0}$
0 ou $\vec{0}$

EX
trivial

unité vérifie
→ LCE A4 (5) → (8)
str EV

relevés $\vec{A}$
constituent un E muni
1 LCi + → str G
et LCE non notée
→ EV sur ℚ

E caisses enregistreuses A B C
relevé tot journalier

Jours	L	M	Me	J	V	S
Sommes	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6

relevé caisse A $\vec{A} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$

$\vec{B} = (y_1, \dots$

Franc $\vec{A} = (125, 142, 251, 247, 290, 305)$

$\vec{B} = (75, 78, 81, 87, 90, 111)$

Mon activité

$\vec{A} + \vec{B}$

$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2,$

P. net

C $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

A $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$

$\vec{A} + (0,0,0,0,0,0) = 0,0,0,0,0,0 + \vec{A} = \vec{A}$

N relevé

$(0,0,0,0,0,0) = \vec{0}$

S $-\vec{A} + \vec{A} = \vec{A} - \vec{A} = \vec{0}$

G, +

+ additions
− soustractions

dollars chgt unité monétaire

$\alpha = 1/5$

$\alpha\vec{A} = (25; 28,4$

$\in ℚ$

$\alpha\vec{A} = (\alpha x_1, \alpha x_2$

C
D

⇑ Vec géom plan forment un EV pour les 2 lois + vec & homothétie

respect 8 axiomes

A&B Cofrères

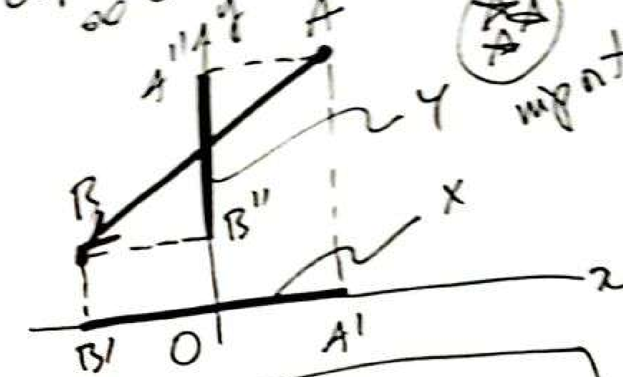
O'y N

LCi ①

LCE ②

1 EVD vecs géom du plan xOy

défini par 2 axes ou coord rectang Ox et Oy



important

$\overrightarrow{AB}$ a deux composantes

$A'B' = X$ et $A''B'' = Y$ ★

raison orientation du vecteur → X, Y ℝ négatifs ★

Segments A'B' et A"B" sont orientés sur Ox et Oy

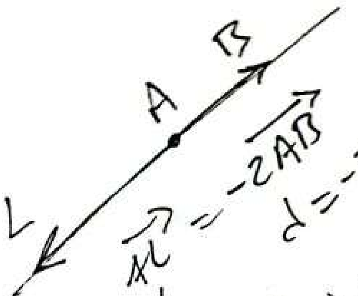
EV GEOM

comp

$\overrightarrow{AB}$ ou $(X, Y) \in \mathbb{R}$

2 L ∩

E



$\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB}$

$\lambda = -2$

son homothétique

HOMOTHÉTIE λ ②

Préalables

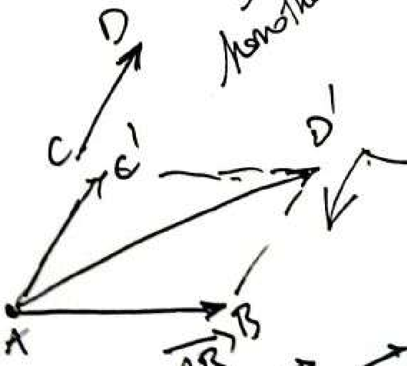
Nature 2 LC

E 2 lois vec géom

① + VEC

2 CAS ! ★

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD'}$

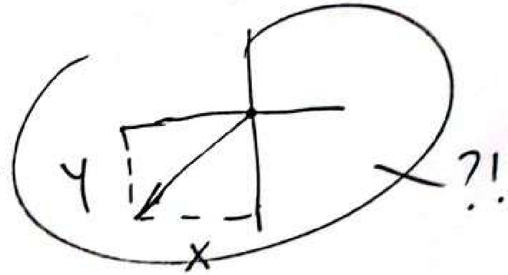
LCi

— quelconques

vecs m̂ origine

4 Segments fléchés $\overrightarrow{AB}$ qui vérifient ax ① → ⑧ forment un EV sur ℝ

Rig parallélogramme



?!

EV géom

peut écrire

$\vec{V} = (x,y)$

2 composants selon axes Ox et Oy

vec géom $\vec{V}$ plan quelconque sous forme

2 LC et aid

$\forall (x,y) \in E$

$\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} (x,y)+(x',y')=(x+x',y+y') \\ \lambda(x,y)=(\lambda x,\lambda y) \end{cases}$$

$(0,0)$ $(-x,-y)$

Résumé

ens vec (x,y) p

EV sur $\mathbb{R}$

Analogie

(x,y) objet

image

$\vec{A}$ vec géom

$\vec{A}$ repéré bal.

$\neq$

nbre composants

2

6

appelé $\mathbb{R}^2$ EV vec géom et $\mathbb{R}^6$ celui des élèves

EX

Ant

\+ gént 1E dont les elts x sont de la forme $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots x_n)$

comp

$\in \mathbb{R}$

= EV sur $\mathbb{R}$

si muni

LCi $x+y$ $= (x_1+y_1, x_2+y_2$

LCE αx G

$\alpha x_1 \dots$

vec à dim ou compos

EV n-dim el

noté $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ EV n-dim el sur $\mathbb{R}$

ous domaine operateurs

$(0, 0, \dots)$ $\vec{0}$

vec géné 2 dim = images de $\mathbb{R}^2$

produit scalaire

nb réel obt par CL

$n = x_1y_1 + x_2y_2$

$\vec{x} \cdot \vec{y}$

orthogonal

$n > 3$ n'est plus construire d'images géné en ce indice

peut construire

en mesure géné

en reconnaissance

évaluation

comp

comportement

numériques

EV $\mathbb{C}^n$ sur le corps de $\mathbb{C}$

$\alpha \in \mathbb{C}$

$x_1 \in \mathbb{C}$

forme un EV sur $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}(E)$

E des ~~...~~ valeurs de $f(x)$ $f(x)$

lorsque x décrit toutes val de E

$f(x) = x^2 - 1$

f numé

x

$\mathcal{D}_f = E = \{$les réels$\}$

domaine de définition

CL combinaisons linéaires

LCE $(\alpha, \vec{x}) \longmapsto \alpha\vec{x}$

$\alpha_1\vec{x}_1$

$\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \dots$

K quelconque

$\alpha_1\alpha_2 \in$

$\vec{x}_1, \vec{x}_2 \dots$ en + en $\|$ on ext? ou ext couple avec lequel il serait lié

$\vec{V}(X, Y) = X\vec{i} + Y\vec{j}$

Considérons $\vec{x} = \alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2$

CL = 1er degré

aos vec $\vec{x}_1$ $\vec{x}_2$

$= \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i\vec{x}_i$

Rem

① ~~$\alpha_1 x$~~ ~~$\alpha_1 x$~~

② $2^\circ\ \alpha_1\vec{x}_1$

faudrait une 2ème LCi

LCi

EV dans ~~stable~~

② Si $\exists$ des K réel $\alpha_1\alpha_2$ $\neq 0$ $\neq 0$ non toutes nulles tq $\vec{x} = \vec{0}$ dien lin dép

③ Si $\vec{x} = 0$ $\Downarrow$ $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ lin indep

on ne peut exprimer un des vec en fonction des autres

④ $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$

$\vec{x}_1 = (1, 0)$
$\vec{x}_2 = (0, 1)$

$\exists?\ 2\ \alpha_1\alpha_2 \in \mathbb{R}$ $\alpha_1 \neq \alpha_2 = 0$

tq $\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 = 0$

D LCE

$\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 = (\alpha_1, 0) + (0, \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2) = 0$ ssi $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

$\Downarrow$

lin indép

⑤ $\forall$ vec x_3 de $\mathbb{R}^2$ peut s'exprimer en fonction

Revanche $\vec{x}_3(a, b)$ possible trouver 3 nuls $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ non tous nuls tq

$\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \alpha_3\vec{x}_3 = \vec{0}$

liées

CL

• Dim d'un EV

n si $\exists$ n vec ~~LD~~ lin indep

et si n'importe quel E de $n+1$ vec

ou un E vec LD

Si pour $\forall$ n il y a n vec indep

$\rightarrow$ dim ∞

$\forall$ E n vec indep ds un Esp n dimensionnel

= base pour cet espace

ex $\vec{i}$ $\vec{j}$ unitaires $\mathbb{R}^2$

3 $\mathbb{R}^3$ vec par 3 dim

• des Comp 1 vec suivant une base

$\vec{f_1}$ ... $\vec{f_i}$ ... $\vec{f_n}$ Li Base ds E n

+ $\vec{x}$ quelconque

Alors $n+1$ ~~LI~~

et $\exists$ $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ non to nuls

tq $\alpha\vec{x} + \alpha_1\vec{f_1}$ $n=0$

de plus ~~$\alpha=0$~~ $\alpha \neq 0$

$\vec{x} = -\left(\frac{\alpha_1}{\alpha}\vec{f_1}\right)$

$\beta_i = -\alpha_i/\alpha$

$\beta_1\vec{f_1}$

de Composé suivant base N... unique

• Application

~~Ap~~ Application

géom

$\vec{V} = \vec{OM}$

B E 3 dim

$M(x,y,z)$ Coord pt M

$\vec{OM}$ diagonale parallélépipède construit sur $x\vec{i}, y\vec{j}, z\vec{k}$

coordonnées

$\vec{V} = (x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

quelconque

donc B

$\vec{i} = (1,0,0)$

$\vec{j} = (0,1,0)$

$\vec{k} = (0,0,1)$

Li

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

$\Leftarrow$

$\alpha_1\vec{i} + \alpha_2\vec{j} + \alpha_3\vec{k} = (0,0,0)$

SEV

remplacé $\vec{CD}$ par vec equipol $\vec{AC'}$

SE nul $A = \{\vec{0}\}$

$\vec{V} - \vec{V}'' = \vec{0}$

opposé $\vec{V}'$

$\vec{V} \equiv \vec{V}' \pmod{\vec{0}}$

tt vec équipol à un vec $\vec{0}$

$\vec{x} \in \mathbb{R}^2 = \alpha$

$\vec{0}$ lui-m en fait partie

$\to \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} ..\} = \mathbb{R}^3 / \vec{O}$

Si lui-m ER sur K pr 2 LC

Si $\vec{x}, \vec{y} \in A$ alors $\vec{x} + \vec{y} \in A$ et $\alpha\vec{x} \in A$ $\forall \alpha \in K$

$\vec{0} \in E$ SE nul

E SE identique à E

impropres

sont propres

$\Downarrow$ $\mathbb{R}^2$ SEP de $\mathbb{R}^3$

Somme directe

A1, A2, A3

Si $\vec{x} \in E$ quelc peut être décomposé sous forme $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \dots +$ de manière unique

$\in A_1$, $\in A_2$

si cette + est unique Alors E = somme directe de ses s

ESPACE QUOTIENT

on part d'E

R équiv : $\vec{x}$ $\vec{y}$ équivalents ~~A~~ A au modulo selon le SE

$\vec{x} \equiv \vec{y} \pmod A$

Si $\vec{x} - \vec{y} \in A$

$\vec{x} \overset{A}{\sim} \vec{y}$

Ens vec $\vec{y}$ équiv à un vec $\vec{x}$

Contenant $\vec{x}$ lui-m

et la CE $\bar{x}$ (mod) $\bar{x}$ (modulo modulo A)

E CE $\bar{x}$ $\bar{y}$ ...

$= E/A$ de EV E

R équiv ds EV

ex géom

$\vec{V} \theta \vec{V}_1$ équi

"équipollent" $\vec{0}$

lorsq ① m norme ② m sens ③ m direct

$\mathbb{R}^3$

portés par une droite ou droite //

//

EFG 3EV
A B 2OL

$A: E \to F$

alors $P: E \to G$
produit ~~DF~~ $P\vec{x} = A(B\vec{x})$

$\vec{x}_1, \vec{x}_2$
$\vec{y}_1, \vec{y}_2$

- $A: E \to F$
  $B \; F \to E$

U_E
$BA = U_E$
Inverse à G
de operateur
A & A
inverse à D

Ens operateur $A_1 A_2$
qui s'applique $E \to F$
est lui même un EV
DM

$$\begin{cases} (A_1 + A_2)\vec{x} = A_1\vec{x} + A_2 x \\ (\alpha A)\vec{x} = \alpha(A\vec{x}) \end{cases}$$

$A_1 + A_2$
αA

~~OF~~ on peut déf

MORPHISMES & OPÉRATEURS LINÉAIRES

d'EVs

$E \; \vec{m} \; F \; K$

$E \xrightarrow{\omega} F$
$\vec{x} \to \boxed{\omega(\vec{x})} = \vec{y}$

$\vec{x}_1 \; \vec{x}_2$

$\alpha_1 \; \alpha_2$

LCE $\alpha_1\vec{x}_1 \; \alpha_2\vec{x}_2$

LCi $\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2$

CL très simple

Groisio[illegible]

$\omega(\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2)$
$= \alpha_1\omega(\vec{x}_1) + \alpha_2\omega(\vec{x}_2)$

Si "l'image ou compo[illegible]
est le composé des
images"
$= \alpha_1\omega(\vec{x}_1) +$

Forme linéaire

dim E = M
dim F = 1
et $F = \mathbb{R}$

$\vec{x} \mapsto \vec{x}$

O unité (identité)

$A: E \to F$

Sont appelé endomorph s'écrit ★

$A(\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2)$
$= \alpha_1 A\vec{x}_1 + \alpha_2 A\vec{x}_2$

OL nul

$A \; \vec{x} \in E$

$\vec{0}$ de F 1 OL

qui vérifie

- Si E s'applique
sur K sur F
Épimorphisme

injective

monomorph

épi + mono
= iso

$\boxed{\omega: E \to F}$

ALGÈBRES

E ev sur K

2ème LCI ×

$\vec{x} \times \vec{y}$ ou $\vec{x}\vec{y}$

algèbre associative

$\vec{x}(\times \vec{y})$

pour tt $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in E$ et $\alpha \in K$

9 – $\alpha(\vec{x}\vec{y}) = (\alpha\vec{x})\vec{y} = \vec{x}(\alpha\vec{y})$

10 – $(\vec{x}\vec{y})\vec{z} = \vec{x}(\vec{y}\vec{z})$

11 – $(\vec{x}+\vec{y})\vec{z} = \vec{x}\vec{z} + \vec{y}\vec{z}$

12 – $\vec{x}(\vec{y}+\vec{z}) = \vec{x}\vec{y} + \vec{x}\vec{z}$

A $\alpha\vec{x}$ ev ×

D

8 1ès EV

non commutative si en gén $\vec{x}\vec{y} \neq \vec{y}\vec{x}$

ev 0 +

ne ×

$\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont sym ×

$\vec{x}\vec{y} = \vec{y}\vec{x} = e$

C8

LATTIS & ALGÈBRES
BOOLÉENNES

LATTIS & ALGÈBRES BOOLÉENNES

2 str très générales

= treillis *

= ens RÉTICULÉ

lattis particulier

BOOLE 1850

DEDEKIND lattis

30 ans + tard

LATTIS
&
ALGÈBRES
BOOLÉENNES

2 str très générales
= treillis*
= ens réticulé

treillis particuliers

BOOLE 1850

DEDEKIND treillis
30 ans + tard

LATTIS

$\mathcal{P}(E)$ $\mathcal{A} = \{A, B\}$

(A B C)

① tt vas ... inclus ds A et ds B ... $A \cap B$ ... + grd qui est ... $= Bi$

② $A \cup B$ + pt maj $= BS$

R.l. $\{x, y\}$ $x \leq y$ $y \leq x$

majorant – minorant – Borne sup – inf –

ORAT partiel on peut trouver au moins un couple (a, b) de E^2 ne verifiant pas R

$\mathbb{N}^*$ a divise b partiellemt ordonné

3 divise 7 n'est pas verifié

.D

E

A ... lesquel

tte partie $\{x, y\}$ à 2 elts admet une Borne sup et inf

① $\emptyset$ $\{x\}\{y\}$ ② 1 elt 2 elt ... ③ lui E ... $\hat{m}$

E $\mathcal{P}(E)$

partiellemt ordonné par $\subset$ $\leq$

.Ex

Énoncé

$a = x \wedge y$

$b = x \vee y$

Bi de $\{x, y\}$

BS

PPCM = B majorant

②

tt E A $\{x, y\}$ admettent une Bi et BS

$\mathbb{N}^*$ R ... $(a R b)$

$= BS$

+ pt nd possible des ... $= PGCD$ x et y

c'est diviseur commun m x et y

minore ... x que y

α minimum de A

①

$\mathbb{N}^*$ "m divise n"

$\mathbb{N}^*$ $\subset$ A

fantaisie $\leq$

$a = \{x, y\}$

$\cancel{m \leq m}$ $m \leq n$

LATTIS

. Axiomes

chaque couple $\exists \{x, y\}$ possédant un ~~BS~~ ~~BI~~

$Bi\ a = x \wedge y$

$BS = x \vee y$

$\leq$ 2 R binaires $\vee\ \wedge$

min intersection

ou

BS Bi

opérations sur les P

$\cup$ & $\cap$ des Ensembles

		$\vee$	$\wedge$
1	C	$x \vee y = y \vee x$	$x \wedge y =$
2	A	$(x \vee y) \vee z =$	
3	IDEMP	$x \vee x = x$	
4	ABSORP	$(x \vee y) \wedge x = x$	$\wedge$

principe de dualité

Si P peut ê ~~écrit~~ ass

Alors on peut ~~obtenir~~ en obtenir en invertissant $\vee \wedge$

P' est duale de P

dualité

le + simple

ne sont pas distributifs D

Si $x \leq y$

Alors $\boxed{x \vee (y \wedge z) = y \wedge (x \vee z)}$

$\wedge$ $\vee$ duale

Ils vérifient souvent cette forme

modulaire

ALGEBRES de BOOLE

Si E muni d'un ordre possède str lattis 4 Axiomes
2 LCI ∨ ∧
et si de +
① ∧ ∨ doublement D.
② ∃ x → x' son compli ds E
③ E ⊃ + gd elts 1
+ pt 0
> et <

Alg Bool

EX

B = {0,1}

∨ ∧ '
+ ×

électrique

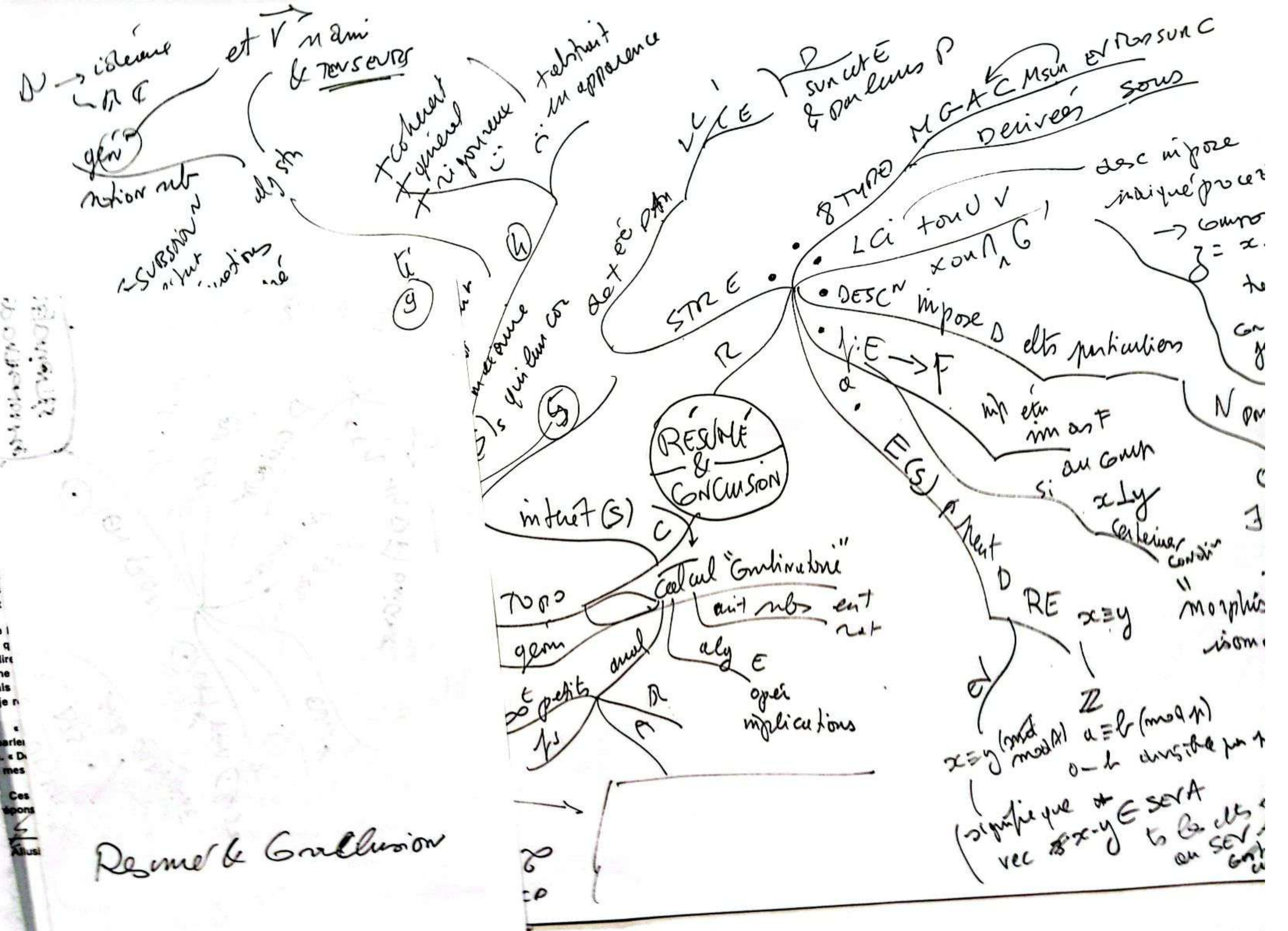
$0' = 1$
$1' = 0$

① LCI ∨ ∧ CA ID AB
② ∨ or ∧ doublement D →B
③ ∃ zère bi-unaire '
④ + gd elt 1
+ pt 0

ALG Boole

P(E)

① ∪ ∩ lattis
② — doublet Ds
③ ' Complémentation
④ + pt elt ∅
+ gd E lui
m̄



Résumé & Conclusion

RÉSUMÉ & CONCLUSION

STRE

• STYPO MGA C Msin ENR sur C

DERIVÉS SOUS

• LÉ tout V

• DESC^n impose D dts particulières

• $\mathbb{I}$E → F

desc impose

indique procédé

→ composé

$z = x + y$

N

O

∃ on

"Morphisme"

isomorph

ssi

$x \perp y$

critères condit^n

ou Graph

RE $x \equiv y$

E(S)

D

$\mathbb{Z}$

$x \equiv y$ (mod A) $a \equiv b$ (mod p)

a − b divisible par p

(signifie que $x - y \in$ SEV A

vec

ts les éts équ

au SEV A

intérêt(s)

C

calcul "Combinatoire"

topo

Config^{n}

géom

E pts

∞^t petits

anal

alg E

opér implications

arit nbs ent nat

critères (S)/s

cat. liste

Usage Pbs fondamentaux

Det initial

ρ lieux

1830-1880

intérieure à psychanal

1885

phys atom

1895-1920

quant

1920-1930)

règles gén

calcul

sans avoir besoin de DM ~~pour~~ pr chaque

tout on ~~a~~ chaque cas

en apparence

rigoureux

profond

général

dépendance

$\mathbb{N}$

UCE

sur cette

& des lieux P