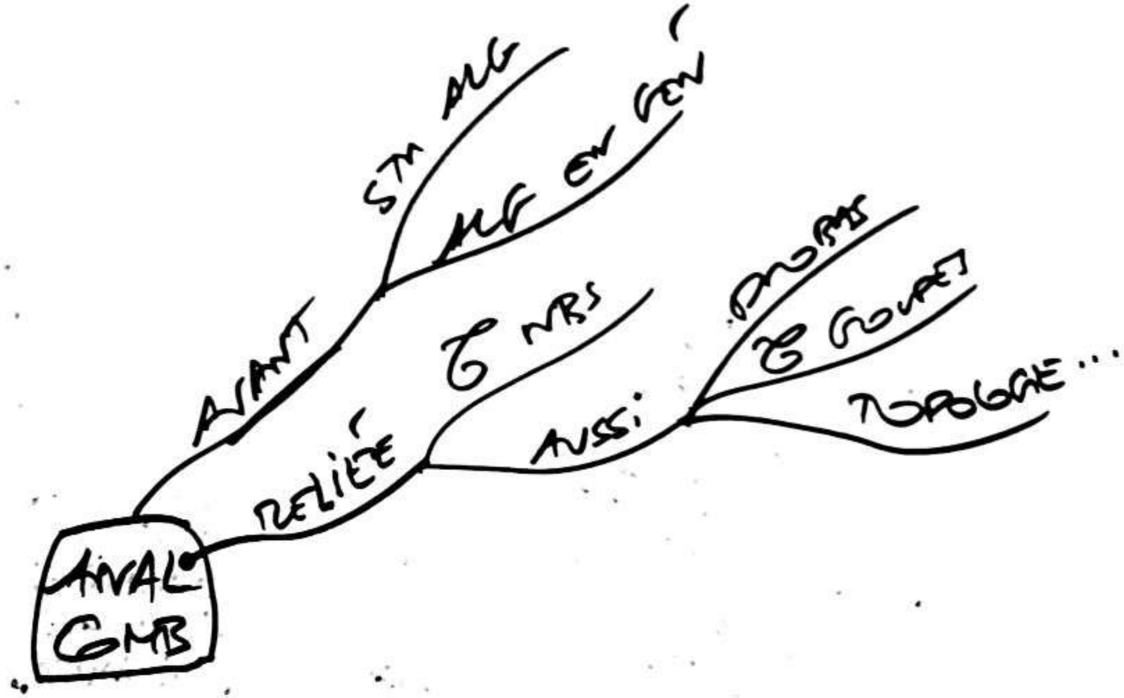
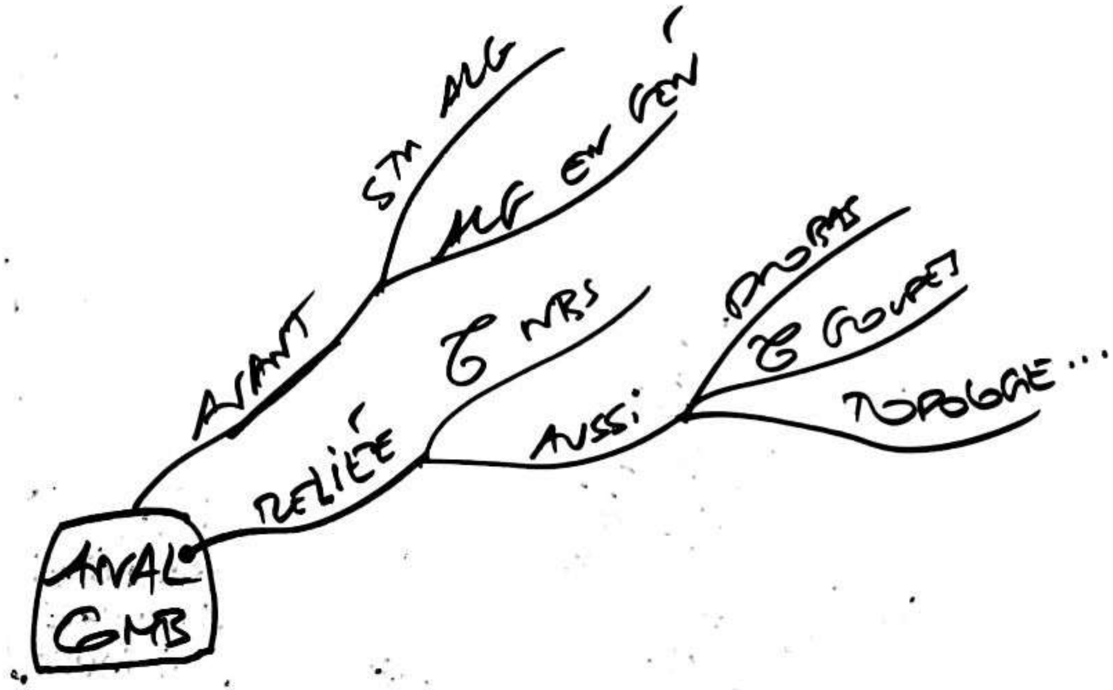
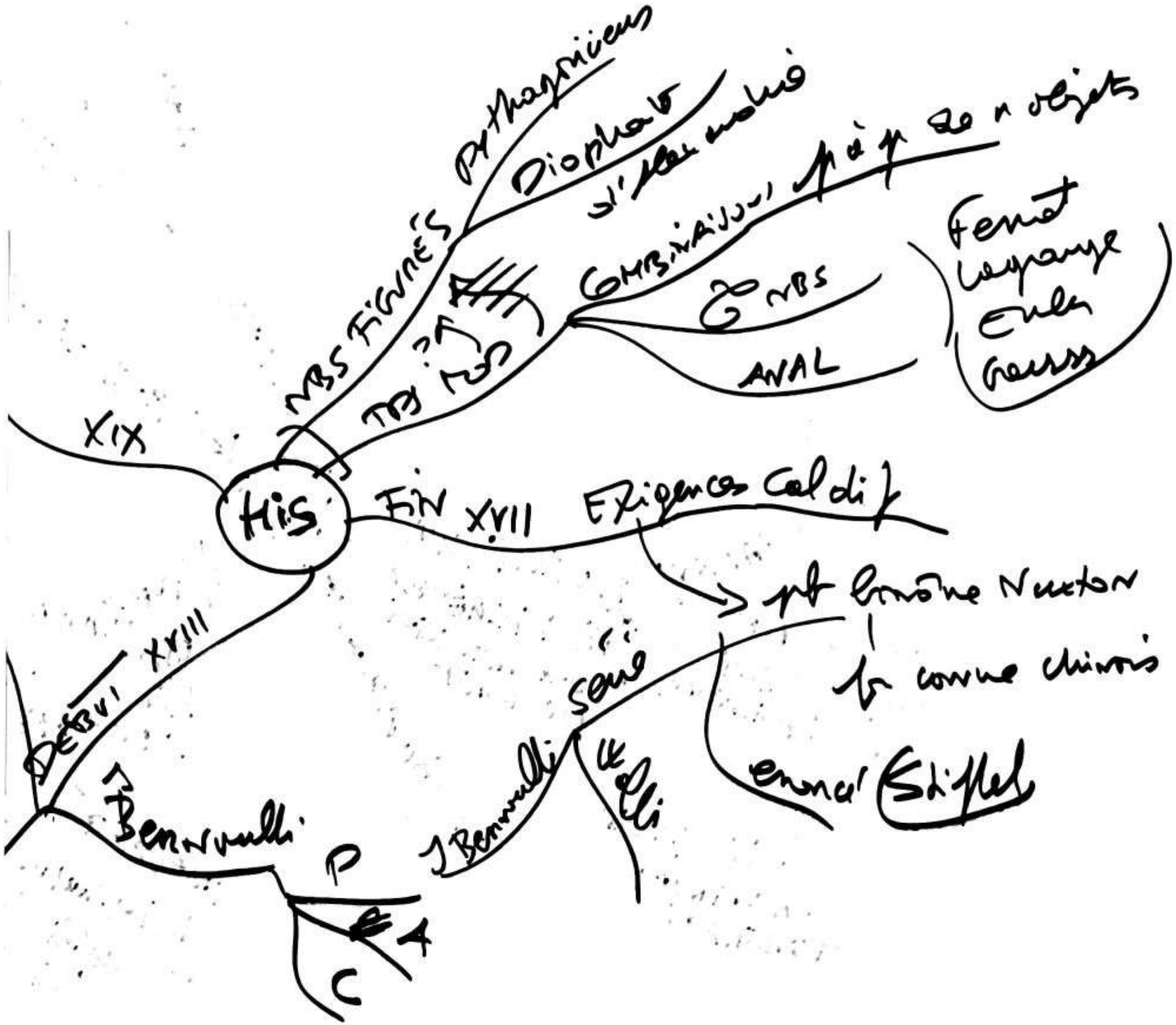
21 mars



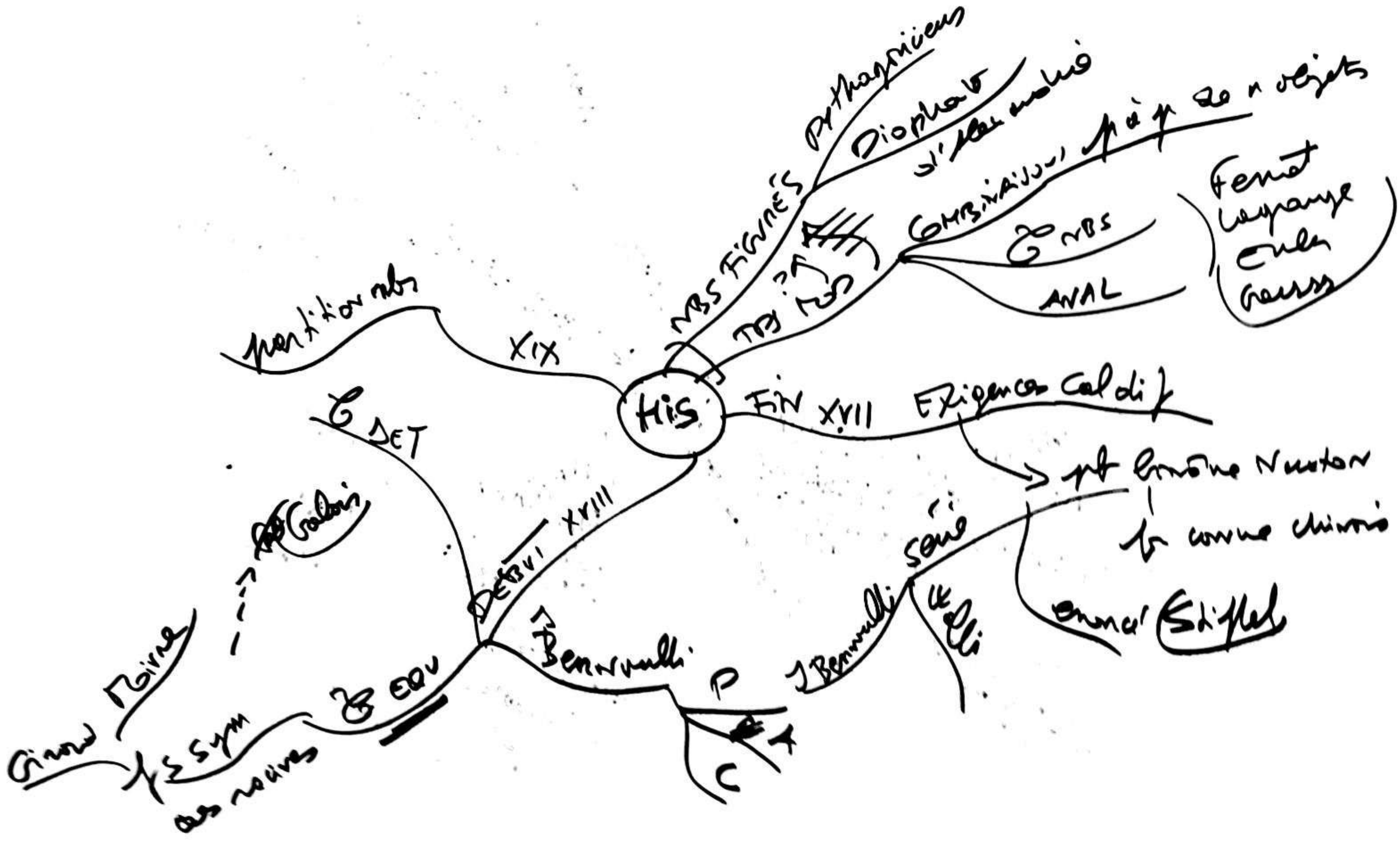

CAR COL

ANALYSE
COMBINATOIRE


ANAL COMB
AVANT
STM ALG
ALG EN GÉN
RELIÉE
NBS
AUSSI
PROBAS
GROUPES
TOPOLOGIE ...




Coup oeil
historique


His
XIX
partition nbs
NBS FIGURÉS
Pythagoriciens
Diophante
d'Alexandrie
COMBINAISONS
p à p de n objets
NBS
ANAL
Fermat
Lagrange
Euler
Gauss
FIN XVII
Exigence calcul diff
pt binôme Newton
série
Bernoulli
J Bernoulli
P
C
Stifel
DEBUT XVIII
DET
EQU
Galois
Girard
Moivre
FS sym
des racines

termes littéraux

1 2 1 — 2nd o

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ — 3ème

Coef num

1 2 1

1 3 3 1

peut montrer que dvpt $(a+b)^n$ ne comprend que termes littéraux au nième o

or coef ← construction

△ Arit Pascal

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & ~~\ ~~ & & 20 & & 15 & & 6\ 1
\end{array}
$$

→ les termes lit suivent ? =+ 6°

$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3$
$+ 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

Triangle arit (Pascal)

termes littéraux

$$\begin{array}{l} \quad\ 1 \quad\ \ 2 \quad\ \ 1 \qquad 2^{nd}\ 0 \\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

3ème

Coef mmm

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

peut montrer que dvpt $(a+b)^n$ ne comprend que termes littéraux au $n^{ième}$ 0 or coef ← construct°

Δ Arit Pascal

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\ & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\ 1 & & 6 & & 15 & & & & 20 & & 15 & & 6\ 1 \end{array}$$

→ les termes lit obtient $\hat{c}$ $=^t$

$6^0$

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

Fonction factorielle n
& formule du binôme

n!
& form binôme

n!

$n \in \mathbb{N} \geq 1$

$n! = 1 \times 2 \times 4 \times \dots \times (n-1) \times n$

$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$

$(4+1)! = 5! = 120$

$\cancel{(5+1)! = (5+1)5!}$

$= (4+1)(4!) = 5 \times 24 = 120$

propriétés

① $\forall n \geq 1$ on a $(n+1)! \overset{?}{=} (n+1)(n!)$

② Cas part pour $1! = 1$

★ et $0! = 1$

rien à prouver !

③ Méthode gd → Form Stirling

$n! = \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \times \sqrt{2\pi n}\,(1+\varepsilon)$

aussi petit que on veut

ex $n = 50$

$n! \simeq \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

Binôme Newton

**$n!$ & Form binôme**

- $n!$
  - $n \in \mathbb{N} \geq 1$
  - $n! = 1 \times 2 \times 4 \times \dots \times (n-1) \times n$
  - $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$
  - $(4+1)! = 5! = 120$
  - $(5+1)! = \cancel{(5+1)}\,5! = (4+1)(4!) = 5 \times 24 = 120$
  - = [illegible]
- propriétés
  - ① $\forall n \geq 1$ on a $(n+1)! = (n+1)(n!)$ ?
  - ② cas part pour $1! = 1$
    - ★ et $0! = 1$
  - ③ $n$ très grand → Stirling
    - rien à reprendre!
    - $n! \simeq \left(\frac{n}{e}\right)^n \times \sqrt{2\pi n}\,(1+\varepsilon)$
    - aussi petit que on veut
  - ex $n = 50$
    - $\boxed{n! \simeq \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}$
- Binôme Newton
  - $C_n^p = \binom{n}{p}$
  - a pour valeur le nb de C de $n$ objets pris $p$ à $p$
  - on peut montrer que le coef de [illegible]
  - $(x+a)^n$
    - $x-a$ on le sait
    - → pour voir si on a été une prof impaire
    - [illegible] du 1°
    - $= x + a$ coef
    - indet

$\cancel{a+}\ (x+a)^n$

$= x^n + \binom{n}{1} a x^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 x^{n-2} +$

$\binom{n}{r} a^r x^{n-r} + \dots a^n$

$n!$

[illegible]

etc...

ne P particulière
numero ordre à chaque
— realisé
— bijecn
in F

ao choisir
oit
(-1) éléments
ent + appliquer ou 2

PERMUTATIONS

$\{a, b, c\}$
tenir compte ordre
$\neq \{a, c, b\}$
dicté — ordre
— désordre

a b c
a c b

operation
par laquelle
on intervertit
b e c d'un E
= Substitution

Son résultat
est une Permutation

?
Combien y a-t-il
de P possibles ?
ds un E à n éléments

3
cas
$n = 2$

abc bca cab
acb bac cba
$P_3 = 6$

$P_2 = 2$

$P_n$

établir
formule

P
A
C
R

Permutations
Arrangements
Combinaisons
Repetitions

PERMUTATIONS

$\{a, b, c\}$

tenir compte ordre

$\neq \{a\,c, b\}$

Fixer ordre

désordre

a b c
a c b

opération par laquelle on intervertit les e d'un E

= Substitution

Son résultat est une Permutation

Combien y a-t-il de P possibles d'un E à n éléments ?

$P_n$

une P particulière numéro ordre à chaque

= réaliser bijection E ds F

a 2
b
(n-1)
b a 3

1
2
3
...
n

n façons de choisir
reste (n-1) éléments
que on peut appliquer sur 2

$F = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

$E = \{a, b, c, \ldots, k\}$
ensemble de
n elts permutables

Établir formule

3

cas $n = 2$

abc bca cab
acb bac cba

$P_2 = 2$

$P_3 = 6$

$$P_n = n(n-1)(n-2) \cdots \times 3 \times 2 \times 1 = n!$$

soit les répétitement

$$10! = 3\,628\,800$$

$P$

$A_n^p = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)$

ordre $p$

$p$

$n$

20 chevaux

$E = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$

Combien de tiercés en tout

n'a-t-on de certain de gagner dans l'ordre

$\{1, 2, 3\} \neq \{2, 1, 3\}$

$\rightarrow \{3, 2, 3\}$

1er 2e 3e

$A_{20}^3 = 20 \times 19 \times 18 = 6840$ # p-list

Déterminer de combien de façons on peut ranger 20 objets trois à trois

ordre compte

$A_n^p$ des $A$, $p$ dans $n$

$\cancel{A_3^{20}}$ $A_{20}^3$ $p$ $n$

$A$

Résumons combien pour $p$ les

injection

E

1 2 3 ... 20

20 choix

19

reste 18

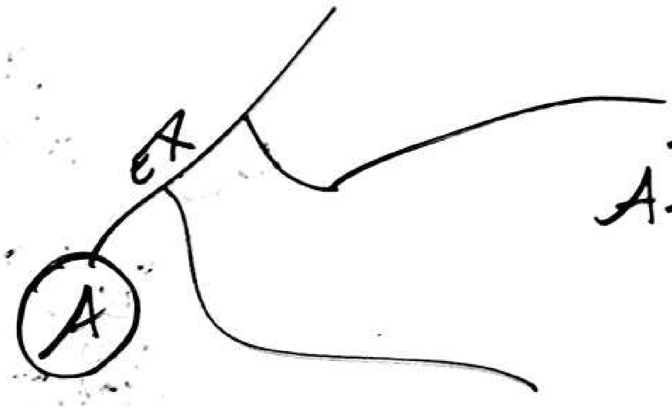
un $A$ de 3 objets de E = A ordre 3

$A_{20}^{3} = 20\times19\times18$

$\cancel{A_n^n = n(}$ $A_n^p = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)$ $n$ objets

ranger $p$ à $p$ ~~n~~ en tenant compte ordre

$\boxed{A_{20}^{3}\ n!}$




3 cubes jaune

7 couleurs

VIBJVOR

$A_7^3 = 7\times6\times5$

10 qualités

$A_{10}^4 = 10\times9\times8\times7$

NB $C_n^p$ $A_n^p$

$n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)$

$p!$

C, p éléments n

$$\boxed{C_n^p = \frac{A_n^p}{P_p}}$$

gén

puisque à chaque C de p elts de E on a p! A soit obtenues par P — $3 \times 2 \times 1 = 6$

$C_{20}^3 = \dfrac{A_{20}^3}{6}$ = 1140

C 6× moins dénombré qu'un A

ordo

D

C

20 chevaux

$A_{20}^3 = 6840 = 20 \times 19 \times 18$

ds le désordre

{3,4,5}
{4,5,3}
{5,4,3} etc...

au lieu de jouer les 6 P possibles 1 SE quelconque {x,y,z}
Jouera qu'une seule

~~E 1 2 3 ... n~~

~~∀ SE de E Gt~~

E 1 2 3 4 ... n

# SE de E contenant p elts = C

50 employés — 10 anciens
depuis + de
5 ans

Comité entreprise
5 employés
dont Pdt doit ê
~~obl~~ oblig^t 1 ancien

1

EX

C

Combien comités

11 → 50

$\binom{49}{4}$

Comme il s'agit de R équiv par E des Ps de E on peut parler de CE

P de cette ne ≠ que par les exemplaires choisis

sf une P de

| RANG | ASSORT I | II | III |
|---|---|---|---|
| 1 | $a$ | $\boxed{c_3}$ | $\boxed{c_2}$ |
| 2 | $b_1$ | $b_1$ | $b_2$ |
| 3 | $b_2$ | $b_2$ | $b_1$ |
| 4 | $\boxed{c_1}$ | $\boxed{c_2}$ | $\boxed{c_1}$ |
| 5 | $\boxed{c_2}$ | $\boxed{c_1}$ | $\boxed{c_3}$ |
| 6 | $d$ | $a$ | $a$ |
| 7 | $\boxed{c_3}$ | $d$ | $d$ |

→ P équiv

REPETITIONS

P

$n$ objets
- $a'$ exemplaires de $a$
- $b'$ ——— $b$
- $i'$ ——— $i$

$n = a' + b' + \dots i'$

$a_1, a_2, \dots$ …

7 gâteaux

- une meringue : $a$
- 2 babas $b_1\ b_2$
- 3 éclairs $c_1\ c_2\ c_3$
- tarte $d$

$$E = \{\underset{1}{a}, \underset{2}{b_1}, \underset{3}{b_2}, \underset{4}{c_1}, \underset{5}{c_2}, \underset{6}{c_3}, \underset{7}{d}\}$$

~~Nombre~~ selon 3 ordres d'arrangement

Nombre de classes

$$\frac{n!}{a'!\,b'! \dots i!}$$

$n = 26$ lettres alphabet
tous mots de 5 lettres
que l'on peut écrire

homme

hhhhh

peut former $26^5$ A
de cette sorte

n élts puis p à p
$n^p$ A
avec R

R

A

C

$$\boxed{K_n^p = \binom{n+p-1}{p}}$$

$E = \{a, b, c, \dots, n\}$ $n!$ P

opérat° P → une autre

$E \longrightarrow E$

décrire cette a

a, b, c

$a \longrightarrow b$

$b \longrightarrow c$

$c \longrightarrow a$

$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$

déf ou bij

Substitution de degré **n**

$E \xrightarrow{s} E$

une permutation est le résultat d'une ~~subst~~ substitution

et non cette opération elle-même

# Notions sur Substitutions

$E = \{a, b, c, \dots, n\}$ $n!$ $P$

opéra^n $P \to$ une autre

$E \to E$

décline cette $a$

$a, b, c$

$a \to b$

$b \to c$

$c \to a$

$(a\ b\ c)$

$(b\ c\ a)$

déf

an

bij

substitution de degré $n$

$E \xrightarrow{s} E$

une permutation est le résultat d'une ~~subst~~ substitution et non cette opération elle-même

CAR 1 $S_n$

s identique ou neutre

$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c & f \\ a & c & f \end{pmatrix} \ldots$

Conserve ts ~~les~~ ... ds m̂ ordre

Transposition — qui n'échange que 2 élts

$E \xrightarrow{t} E$

~~{a b}~~

$\{a\ b\ c\ d\ e\ f\}$ $E$

$\{a\ b\ e\ d\ c\ f\}$ ${}^tE$

$t({}^tE) = E$

2 Ps qui ne sont pas ds m̂

Parité

Dem thm : peut ê réalisée en procédant successives

impaire

ê plus ~~trop~~ paire

selon nb lui m̂ tri

Produit de 2 s

$E \xrightarrow{s_1} \xrightarrow{s_2}$

$s_p = s_1 \times s_2$

aussi obtenu par produit.

Groupes

$s_1 \times s_2$ formes

P exploitation

$s_2 \times s_1$ pas = en général

$s_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$ $s_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}$

exponentiel

s i.d.

$s \times s_i = s_i \times s = s_i$

inverse ou sym

$s^{-1}$