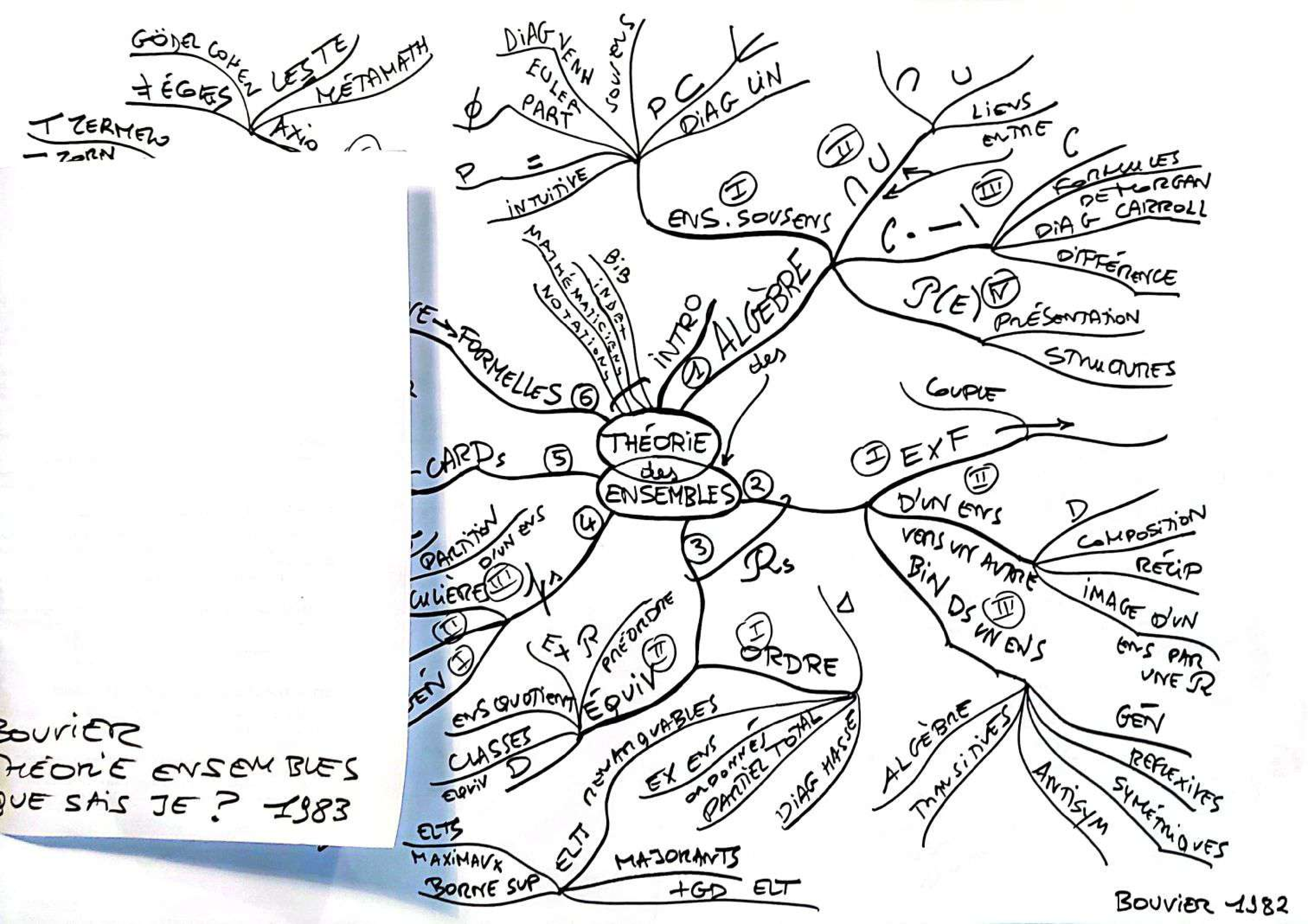
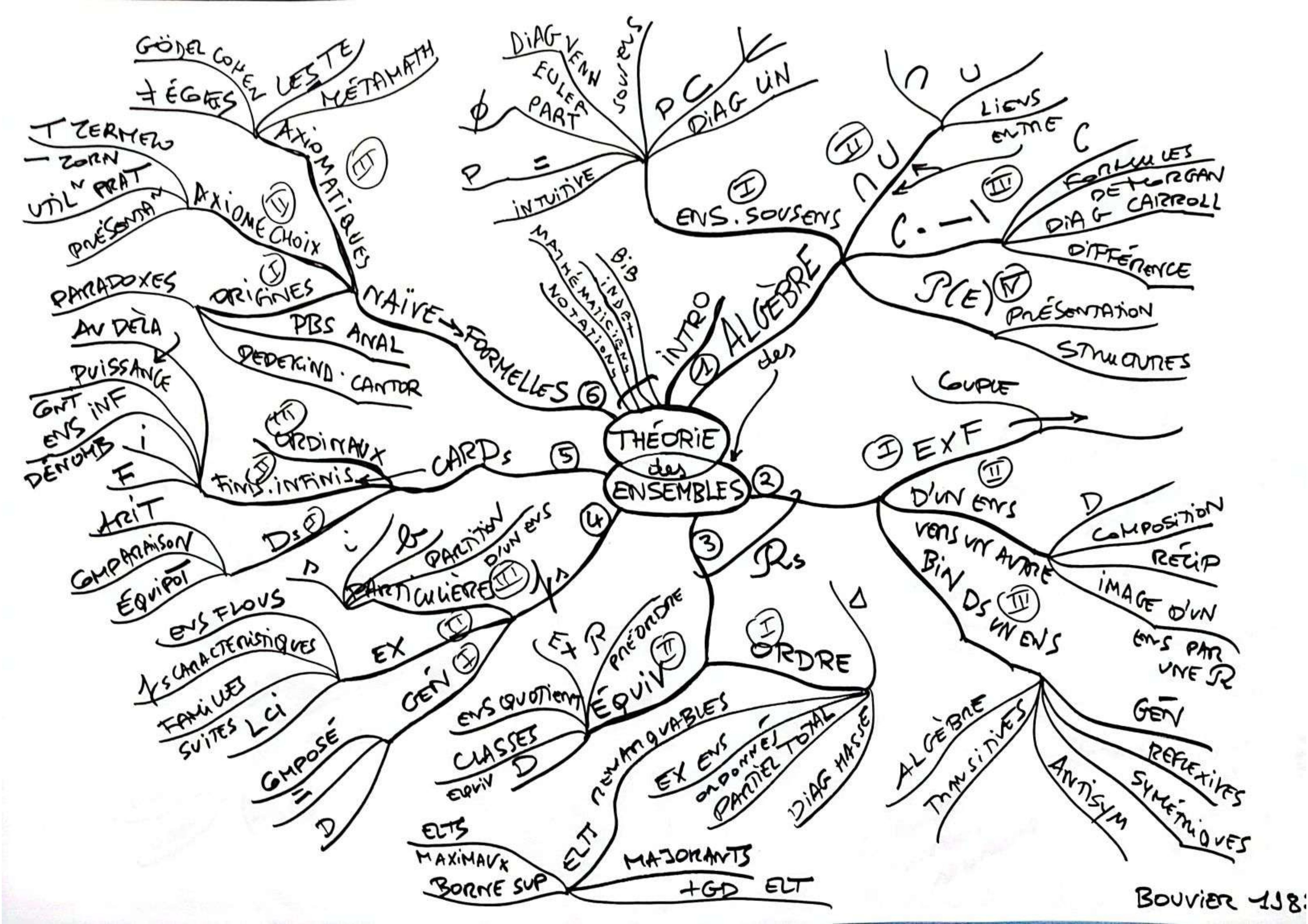


Bouvier
Théorie ensembles
Que sais je? 1983


THÉORIE des ENSEMBLES
1 ALGÈBRE des
INTRO
BIB
INDEX
MATHÉMATICIENS
NOTATIONS
I ENS. SOUSENS
INTUITIVE
P =
∅
PART
EULER
DIAG VENN
SOUSENS
P C
DIAG UN
II ∩ U
∩ U
LIENS
ENTRE
III C. — \
C
FORMULES
DE MORGAN
DIAG CARROLL
DIFFÉRENCE
IV P(E)
PRÉSENTATION
STRUCTURES
2
I E x F
COUPLE
II D'UN ENS
VERS UN AUTRE
D
COMPOSITION
RÉCIP
IMAGE D'UN
ENS PAR
UNE R
III BIN DS UN ENS
GÉN
REFLEXIVES
SYMÉTRIQUES
ANTISYM
TRANSITIVES
ALGÈBRE
3 Rs
I ORDRE
Δ
DIAG HASSE
PARTIEL TOTAL
ORDONNÉS
EX ENS
ELT REMARQUABLES
ELT
MAJORANTS
+GD ELT
BORNE SUP
ELTS
MAXIMAUX
II ÉQUIV
PRÉORDRE
E x R
ENS QUOTIENT
CLASSES
ÉQUIV D
4
III PARTICULIÈRE
PARTITION D'UN ENS
&
∩
P
I EX
ENS FLOUS
1s CARACTÉRISTIQUES
I GÉN
FAMILLES
SUITES LCI
COMPOSÉ
=
D
5 CARDs
II FINIS. INFINIS
III ORDINAUX
I DS F
ARIT
COMPARAISON
ÉQUIPOT
F
i
DÉNOMB
ENS INF
CONT
PUISSANCE
AU DELÀ
6 NAÏVE → FORMELLES
I ORIGINES
PARADOXES
PBS ANAL
DEDEKIND · CANTOR
II AXIOME CHOIX
ZERMELO
ZORN
UTILN PRAT
PRÉSENTATN
III AXIOMATIQUES
∃ ÉGALES
GÖDEL COHEN
RESTE
MÉTAMATH
BOUVIER 1983

iNTRO

- réf
- not
- index
- suggestions
- lecture
- flous
- 1 cas
- aut rai
- ↗ mémoire
- Levène ↓ Wachel
- ordinal
- Amitoza TE
- changé de branches
- J'ex
- unités secteurs
- TNB
- au yeux
- équi
- ord
- que
- ov per GR
- ↓ formalisme
- vx

- 1960 MATHS MOD
- crânes utiles concept
- formelle abstraite
- riche + génér. possible
- 12 ans après
- Abandon présentations formelles
- ↓ approche basée sur expér. semble enfants
- MAGNITE 3e
- TE cesse apparaître préalable
- resurvient
- langage vocabulaire Gramm
- recherche
- GRAM (SCHWARTZ)
- ?
- Grps concepts formels niveau secondaire

Def en extension

$\{1,2,3,4,5,8,11,26\}$

= nb elts = "∞"

$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$

Ens finis

$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

$\{1,2,\dots,10\}$

NOTION INTUITIVE

Descript

limita

A priori

Ex $2\mathbb{Z}$

nb pairs

$12 \in 2\mathbb{Z}$

$3 \notin$

$0 \in$ ..

elts x

E

F

G

$x \in E$

$\notin$

E objets

collection

groupement

rassemblement

réunis

avant utilisé Concept

D

réunis

antiquité

emploi

& lim

mot Ensemble ~~échap~~ échappe

presque semblent

Gratuit

usage rapidement mot "ens"

restrictions

pr inglant

mot primitive

~~langage~~

avants

la ... idée

~~D~~

≃ géom pt

CHAP 1 ALGÈBRE

DES ENS

D en ~~extension~~

{1, 2, 3, 4, {8, 17, 24}

"nb elts" "∞"

N = {0, 1, 2, 3 ...} ~~anti~~finité

ensembles finis

{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

{1, 2, ..., 10}

{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

Descripti

limita

A priori

NOTION INFINIE

E objets collection

groupement

rassemblement

imprécis

avant utilisé concept

D ~~...~~ précis

explici

antinomie & lim

not E semble ~~...~~ échapper

presque semblent

Gratuites

usage rapidement not "ENS" restrictions

~~langage~~ ordinaire

pr instant

not primitive

avants la m̃ idée

~~D~~

≃ géom pt

elts x

E
F
G

x ∈ E
∉

EX 2ℤ
ent pairs

12 ∈ 2ℤ
3 ∉
0 ∈ ..

ENS SOUS ENS

D en extension

{1,2,3,4,6,8,12,24}

=

D(24)

diviseurs ent nat de 24

"nb elts "∞""

N = {0,1,2,3...} ent ~~infinité~~

ensembles finis

{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}

{1,2,...,10}

Liste ①

2 façons usuelles de D

Descript.

* un m̄ élément ne peut jamais ê ~~2 ou 1 fois~~ ds un E et un ê de cet E

Convention

~~limite~~

extrêmement

A priori

non disponible

évités

paradoxes

Ex 2Z ent pairs

$12 \in 2\mathbb{Z}$

$3 \notin$

$0 \in$ ..

E tronqué

E ~~des~~ de 5 ENS

$a \in a$

NOTION INFINITE

E objets

collection

groupement

rassemblement

imprécis

avant utilisé concept

D ~~...~~ précis

~~ambiguïté~~ emploi

& lim

not E semble ~~...~~ échapper

puisqu'ils semblent

Gratuites

usage rapidement not "ENS"

restrictions

langage ~~ordinaire~~

1er instant

not primitive

avons ts la m̄ idée

D~~é~~

≃ géom pt

elts x

E

F

G

$x \in E$

$\notin$

NOT
INT

② Compréhension Si G muni d'une P tq un objet ∈ E ssi il vérifie cette caractéristique de E

Ex $a \mid b$ a divise b ds $\mathbb{N}$

$D(24) = \{\underbrace{x \,;}_{\text{tels que tq}} x \in \mathbb{N} \text{ et } x \mid 24\}$ ∈ de x

$\mathbb{Z}$

$\mathbb{Q}$

$\mathbb{D}$ décimaux

$\mathbb{Z}[i]$ ent de Gauss

$n\mathbb{Z}$ mult ~~de~~ ent nat de n

$[a, b]$

$\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ ev ds $\mathbb{R}$

$m + n\sqrt{2}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$

mes tjs facile DM = + 6 ni quelle nuit

prot

= RST

- Transitive

S E=F et S F=G, A E=G

- Sym

S E=F, A F=E

- Reflexive ~~Réfle~~

E=E ∀E

P

S

A=B

formées mêmes elts

en cre dire que

$x \in A$ ssi $x \in B$

$\Longleftrightarrow$ équivalence

1 seule fois chaque elt

$\{3, 1, 2, 1\}$ $\{3, 1, 2\}$

$\{2, 3, 5, 7\} = \{5, 7, 2, 3\}$

extension ordre peut ê quelconque

$A \neq B$

distincts

revient à dire

il existe au moins 1 elt de l'1 qui n'est pas elt de aut

Ex

$A = \{2, 3, 5, 7\}$

$B = \{2, 3, 5, 8\}$

$7 \in A$

$7 \notin B$

ENS PARTIC

paire

E comme
{b,a} = {a,b}

Ex

$1 \in \mathbb{N}$ premier ssi
Ens ~~des~~ de ses diviseurs
est une paire
$D(1) = \{1,1\}$

elt $a \neq E\{a\}$

$a \in \{a\}$

exclu $a \in a$

E formé
un seul e
a

Ex

est un singleton
$E = \{a\}$

$a \in \mathbb{R}$
$[a,a] = \{a\}$

$\emptyset$

possède aucun e
est un vide

$E = \emptyset$

Ex $\emptyset \subset E$ E trivial quelconque
complt

carac $a \in \emptyset$ tjs faux
ou une
$a \notin \emptyset$ tjs vrai

Convention unicité

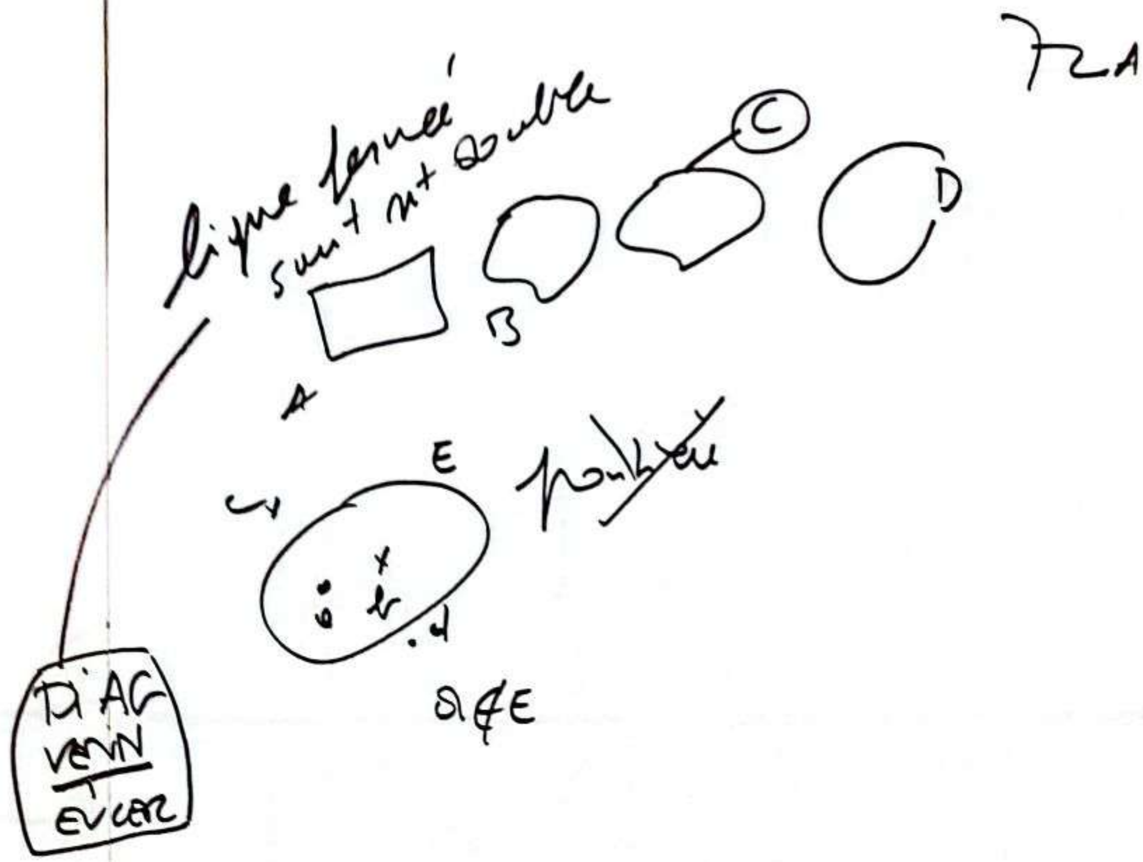
~~D~~ R

① "Naïve" logt critiquable
est façon intuitive
↓ DM
unicité
plus + "D" DM
donne 1 Axiome

② Contrad en algèbre

"Ens cercles ayant + 2 côtés égaux"
DM $\emptyset$

~~Déf~~


7.2.1
ligne fermée
A
B
C
D
E
frontière
a ∉ E

implication "$x \in A \Rightarrow x \in B$" entraîne implique

$\Rightarrow$ relation "si $x \in A$, alors $x \in B$"

Si $A \subset B$ et $B \subset A$ … R

$\boxed{B \subset A}$ ⚠

A possède au moins un elt $\notin B$ — suffit de trouver que

$A \not\subset B$ Pr DM

$\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

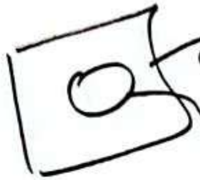
or $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \not\subset \mathbb{Q}$

$\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

puisque $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$, $\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

SOUS ENS



$A \subset B$

partie / SE

Si tous elts de A sont des elts de B

Sous-ensemble

E

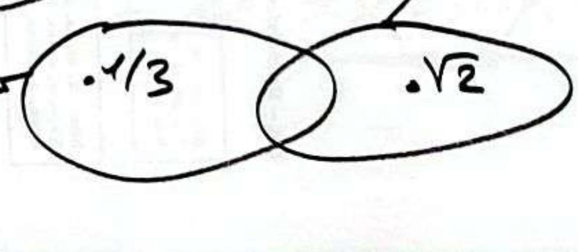
$B = \{a, b, c, d\}$ $A = \{a, b\}$

$B \supset A$

$[-2, 3] \subset [-10, 5]$

$(m + n\sqrt{2})$, $m, n \in \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$



$A \subset B$ ssi $x \in A \Rightarrow x \in B$

? Alors D

$S^+ A \neq B$ — SE partie propre

$A \subsetneq B$ strictement

$\subsetneq$

Certains auteurs $\subseteq$ large $\subset$ strict

E
SE

peut DM $\emptyset$ SE ae tout Ens E

$\emptyset \subset E$

$\boxed{\cdot x} \subset E$

$\{x\} \subset E$

$\cancel{x \subset E}$ $\cancel{x \subset E \{x\} \subset E}$

→ met double inclusion

dc si $E=F$, A $E\subset F$ et $F\subset E$

soit F

dc si $x\in E$, A $x\in F$ et $E\subset F$

dc si

formés des m̂ objets

$(E\subset F$ et $F\subset E) \Leftrightarrow (E=F)$

$(E\subset F$ et $F\subset E)$

ANTISYM $E=F$

$\Updownarrow$

$E\subset F$ et $F\subset E$

P_s

$\subset$

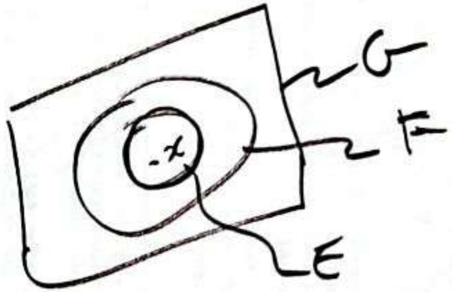
(A)

(B)

(C)

$E\subset E$ (R)

Supposons



$E\subset F \rightarrow E\subset G$

en effet

si $x\in E$ puisque, $x\in F$

$F\subset G$, $x\in F \Rightarrow x\in G$

Finalement :

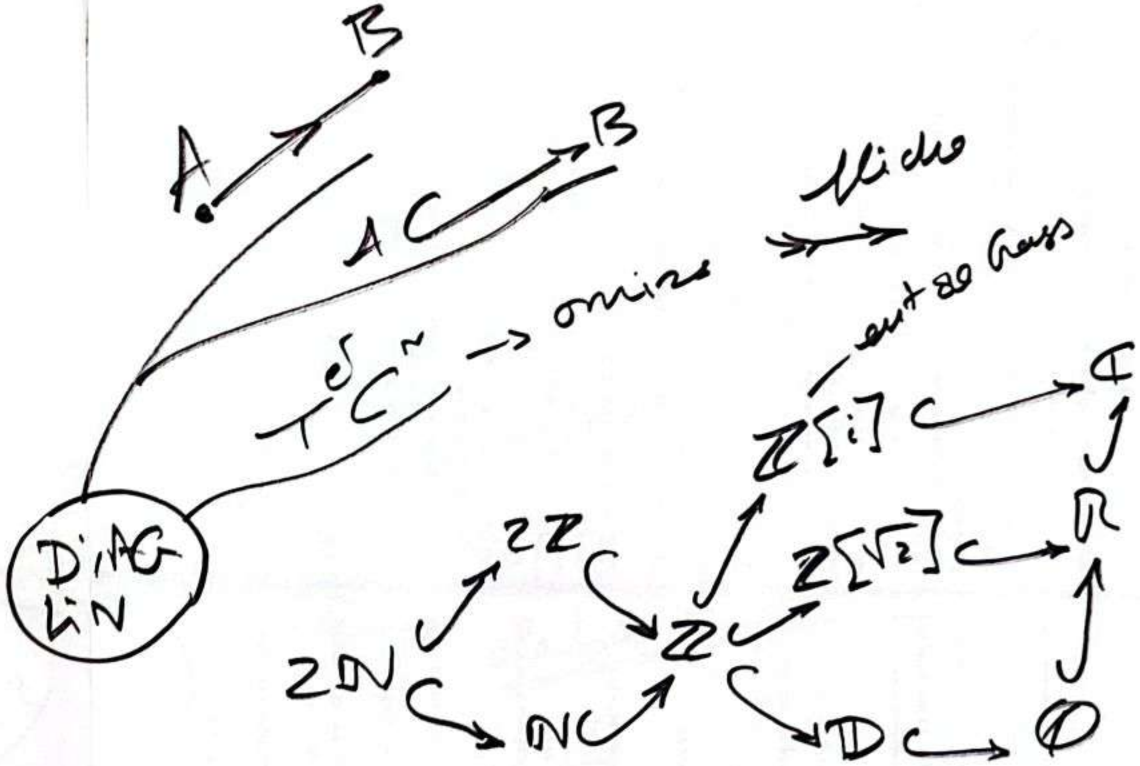
$x\in E \Rightarrow x\in G$

cela prouve

$E\subset G$

mais de C

(T) $E\subset F$ et $F\subset G \Rightarrow E\subset G$


DIAG LIN
A
B
A C
B
2N
N
2Z
Z
Z[i]
Z[√2]
D
Q
R
C

= A et x ∈ B}

A = {a b c d}

B = {b d h}

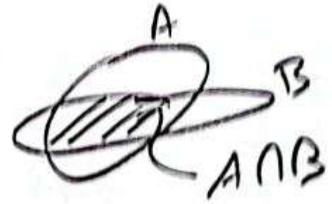
→ 5 élts C = b d ∈ A et B ★

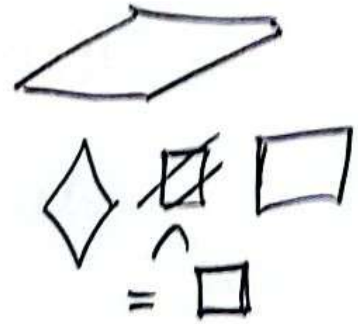
en outre les seuls élts qui sont com à A et B ★

C = intersection de A et de B

A ∩ B

se lit A inter B





Comm

4

3

∈ 4 Z

D(24) ∩ D(10) 2

{1, 2, 4}

à la fois 24 et 20

II ∩ ∪

$A \cap B = \{x ; x \in A \text{ et } x \in B\}$

Gmm

$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$

4

$\mathbb{Z}[i] \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$

3

$8\mathbb{Z} \cap 12\mathbb{Z} = 24\mathbb{Z}$

2

$D(24) \cap D(20)$

$\{1, 2, 4\}$

à la fois 24 et 20

$A = a\ b\ c\ d$

$B = b\ d\ h$

– ts elts $C = b\ d \in A$ et B ★

– en outre les seuls elts qui sont com à A et B ★

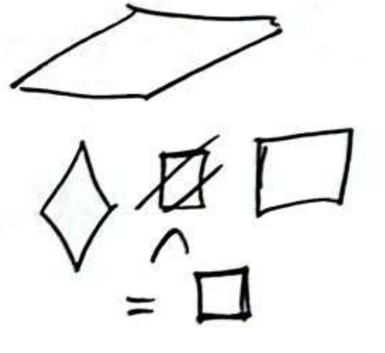
C est intersection de A et de B

tyém

$A \cap B$

à la fois A et à B

E 1



5 $A \cap B = A$

4 $A \cap B \subset A$
$A \cap B \subset B$

3 $A \cap A = A$ idemp

final $(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C) = \{t\}$

$A\cap(B\cap C) = \{t\}$
$\Uparrow$
d'autre part $B\cap C = b\ t$

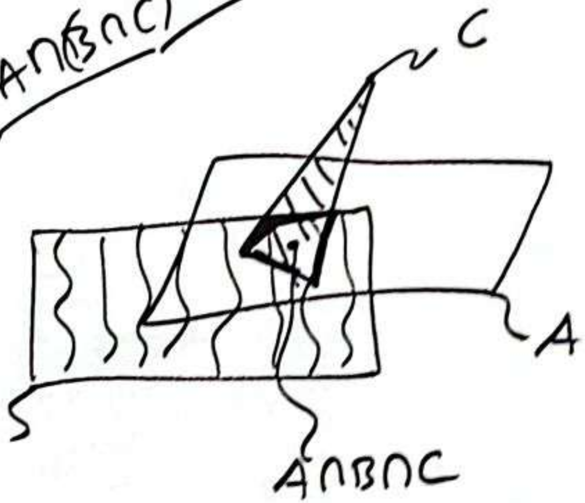
$(A\cap B)\cap C = \{t\}$
$\uparrow$
$A\cap B = t\ y$

E
A a x t y
B b y t
C a t b c

∩ Ps

1 $A\cap B = B\cap A$ CM

2 $(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$ ASS



DM
Met double ⊂
établit succ+ que
$(A\cap B)\cap C \subset A\cap(B\cap C)$
et que $(\quad) \subset (\quad)$
pas inutiles

A1 2 1 8 16

A2 2 1 16 32 3

A3 1 3 16 $A = \bigcap_{i=1}^{3} A_i = A_1 \cap A_2 \cap_3$

$= 1, 16$

E

par D un $\cap A$ ds Ens

ss elts qui $\notin$ à ts les A_i

com n

$\mathcal{U}^n \quad i = 1, 2, \ldots, n$

$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ = intersection de i égal 1 jusqu'à n ds A_i $= \{x;$ pour tout i, $i = 1, \ldots, n$, $x \in A_i\}$ *

$S^t A_1, A_2, \ldots A_n$

$x \cdot 0 = 0$

$A \cap \phi = \phi$

$\phi \simeq 0 \times \mathbb{R}$

$x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$

6

$\cap$ pas de m̃

il se peut que 2 Ens non vides

~~est~~ avant 1 $\cap$ vide

A B

disjoints

A triang equilat 600

B — rect 900

Si non il existe un triangle

$C \in A \cap B$

Cont

Ps

$\cap$

3

$\sim [2, 17]$

$[-1, 3]$ $[4, 17]$

2

$\mathbb{Z}$

$6n+1$

$6m+2$

Ex

1

$$\begin{array}{ccc} & A & \hookrightarrow A\cup B \\ C \to A\cap B & & \\ & \hookrightarrow B & \end{array}$$

$\emptyset \subset A\cap B \subset A \subset A\cup B$

— B —

$x\cdot 1 = x$ si $x \in \mathbb{R}$

⑥ $A\cup\emptyset = A$ N

⑤ S $A\subset B$, $A\cup B = B$

④ T.In

③ $A \subset A\cup B$ et $B \subset A\cup B$

idemp $A\cup A = A$

② A $A\cup B\cup C$

① ∩ $A\cup B = B\cup A$

Ps

∪

A a b c d

B b d h

D a b c d h

formé de 5 elts ∈ soit à A

— B

— aux 2

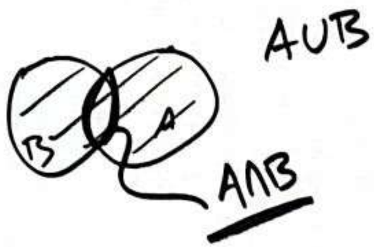
= $A\cup B$

union

réunion

« ou » non exclusif

un elt peut ∈ à A et B



Comm ~~A~~: $A\cup B = \{x ; x\in A \text{ ou } x\in B\}$

Si on compare Ds ∩ et ∪

on peut avoir une def en changeant

le « et » en « ou » et réc.

2 mots sont duals

$\cup$ 2 ens $\neq \emptyset$
n'est jamais vide
pourvu qu'elle $\supset$ ces 2 ens

$\neq \cap$

$\cup$

Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$
ens elts qui $\in$ au moins à un des A_i

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x ; \text{"il existe } i\text{"}, i = 1, \dots, n, \; x \in A_i\}$

★

$\cap$ "pour tout"

Lois ∩ et ∪

Ps analogues

$\mathbb{R}$ $\times$ Dis / +

~~x.(y+z)~~ $x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$

mais + ~~Dis~~ / $\times$

$1+(2\cdot 3) \neq (1+2)\cdot(1+3)$

∩ D / ∪

∪ D / ∩

$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$

∪ ∩ ∪ ∩ ∪

E

DM met doubleC

A = △ ○ □ B △ ▭ C ○ ▭

A∪C △ ○ ▭

A∩(B∪C) = △ ○

Lois ABSORPN de BOOLE

A ∪ ∩

$A\cap(A\cup B) = A$

disposition

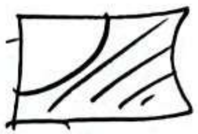
C_E^B | ceci ① ② et $C_E(C_E^A)=A$ ★

C_E^A | + ... double C ③

$C_E^A = C_E^B \Leftrightarrow A=B$

C_E^A complémentaire de A dans E pas rapport

élts de E qui $\notin A$



com $C_E A = \{x ; x \in E \text{ et } x \notin A\}$

R 1 D quie si $A \subset E$

$C_E^A \subset E$

2 comme negation

$E - A$

$E \setminus A$

$\overline{A}$

de +

A $\overline{A}$ disjoints

$A \cap \overline{A} = \emptyset$

III C —

C

$\complement_E^B$

$\complement_E^A$

ceci ① ② $C_E(C_E^A) = A$

est double C

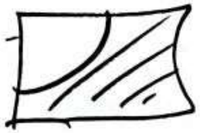
+ ③

$C_E^A = C_E^B \Leftrightarrow A = B$

$\complement_E^A$ complémentaire de A dans E

elts de E qui $\notin A$

par rapport



comm $C_E A = \{x ; x \in E$ et $x \notin A\}$

R 1 D quie si $A \subset E$

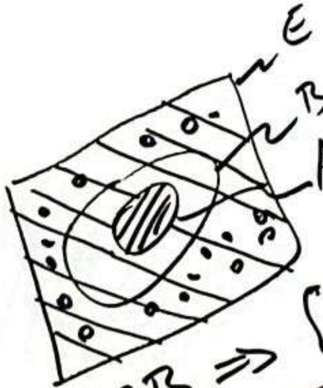
$\complement_E^A \subset E$

2 et donne negation

$E - A$

$E \setminus A$

$\overline{A}$



$A \subset B \Rightarrow \complement_E^B \subset \complement_E^A$

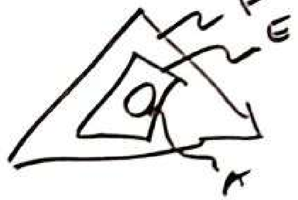
$C_E(C_E^A) = A$

$A \cup \complement_E^A = E$

de +

$A \ \overline{A}$ disjoints

$A \cap \overline{A} = \emptyset$



$(E \subset F)$

$\Updownarrow$

$C_E^A \subset C_F^A$

certains cas

En gén.

E F quelconques

S ⊃A pas possible si ~~∉~~ compris

$A = \emptyset$

$A = E$

2 CP

$C_E^{\emptyset} = \{x ; x \in E \text{ et } x \notin \emptyset\} = E$

$C_E^E =$ ———— $E = \emptyset$

C

Soit $C_E^{\emptyset} = E$ $\quad C_E^E = \emptyset$

C_E^A ~~intrinsèque~~ relative à $E \supset A$

référentiel

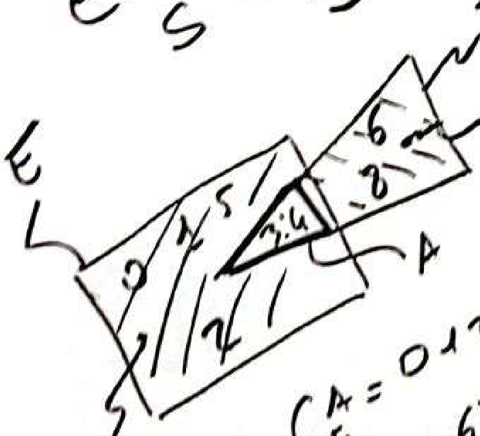
Ens réf

non A

noté

⇒

~ sm C



$C_E^A = 0\,1\,2\,5$

$C_F^A = 6\,8$

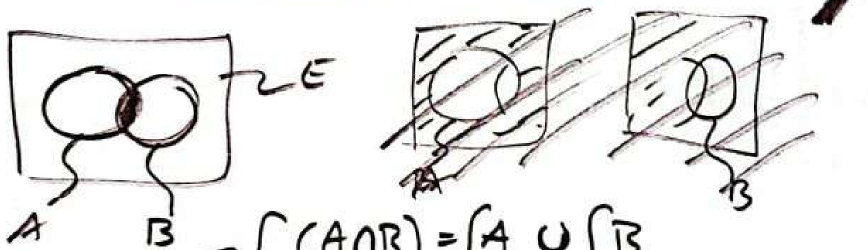
C_E

$A = \cancel{1}\,3\,4$

$F = 3\,4\,6\,8$

$E = \cancel{1}\,1\,2\,3\,4\,5$
0

② Formules de de Morgan



$\complement_E(A\cap B)=\complement_E^A \cup \complement_E^B$

$\cup \quad \cap$

DM

S^t $x\in\complement(A\cap B)$

Dire que $x \notin$ simultanément à A et B

c'est encore dire

qu'il $\notin$ au moins à l'un d'eux :

S^t ~~encore~~ $x\notin A$ ou $x\notin B$

S^t encore $x\in\complement A$ ou $x\in\complement B$

R $\quad R^t$ élément par elt

Nous montré qu'un elt x

qui vérifie une certaine ~~f~~ P

(celle $\in\complement(A\cap B)$) ensuite dans

des cas, vérifie une autre

autre celle $\in \complement A\cup\complement B$

Donc ⊕ C

$\complement A\cap B\subset\complement A\cup\complement B$.

– → Une formule pour faire R^t global

en utilisant des propriétés

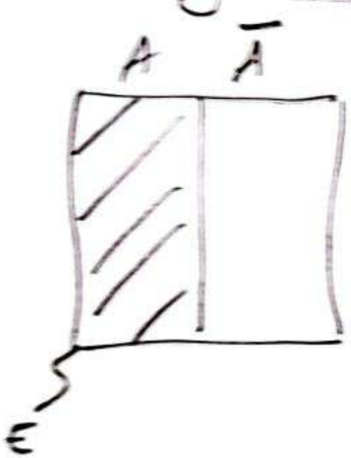
que $\complement(\complement A)=A$

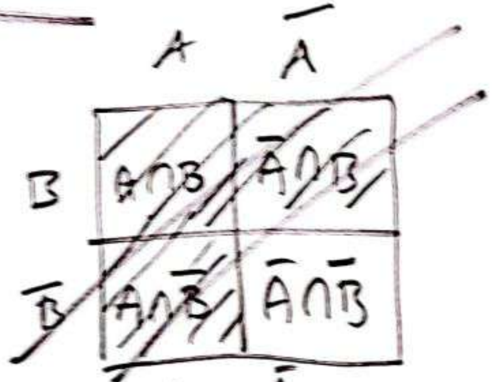
Gen $\quad S^t$ $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq E$

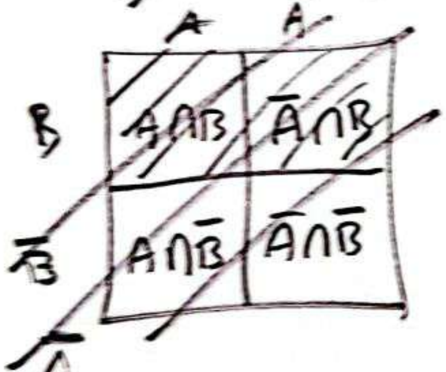
$$\complement_E\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)=\bigcup_{i=1}^{n}\complement_E A_i$$

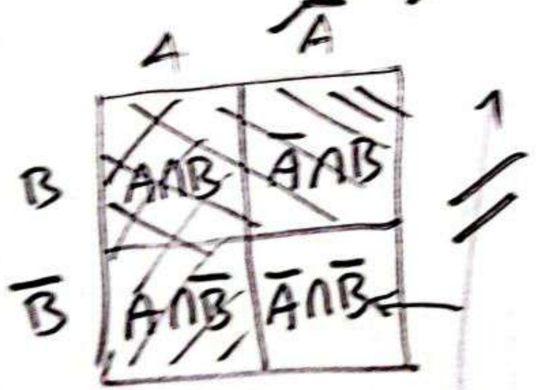
$\cup \qquad \cap$

③ Diag Carroll









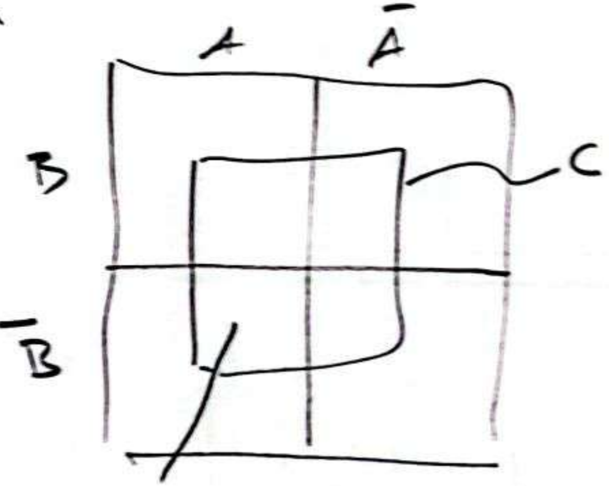
A∪B partie hach au - 1 fois

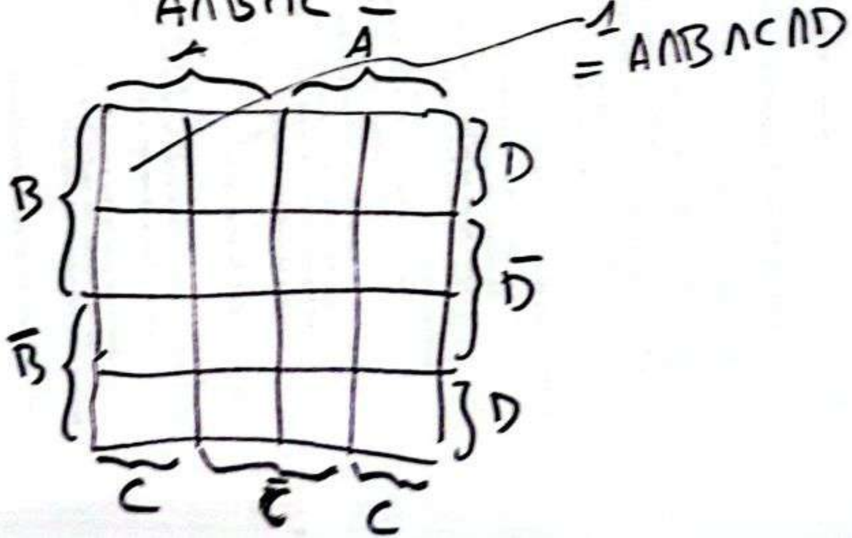
A∪B 2

$$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$$

Rôle "sym" joué par A et son ∁ peut ê mis à profit lors étude ~~mé~~-moire logique attributs

- DIAG Karnaugh
  Veitch





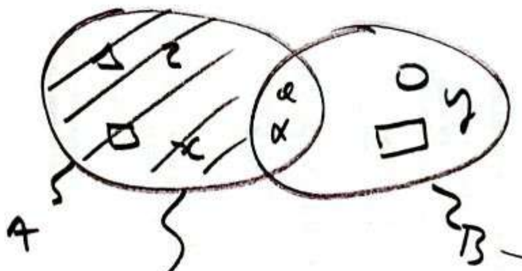
④ $A - B$

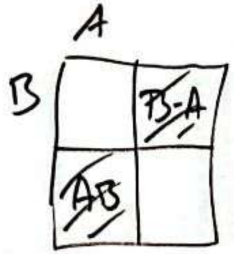
$A \setminus B$

//

Ens des élts de A qui $\notin B$

A $\Delta\ 2\ \alpha\ x\ \square$ B $\alpha\ o\ a\ \square\ y$





$A-B$ $\Delta\ 2\ x\ \square$

$B-A$ $O\ \square\ y$

~~Commutative~~

Comp $A-B = \{x ;\ x \in A \text{ et } x \notin B\}$

$E^* = E - \{0\}$

NBs

C_B^A de résultat

déf que si A SE de B

tjs déf

C_B^A C_A^B

toutefois si $A \subset B$

$C_B^A = B - A$

Ⓡ

① $A-B$ tjs SE de A

② prend déf $\emptyset$ par $\emptyset = E - E$

sens ← indép E choisi

Comparons diff entre En et ens nbs par ex

→ ressemblances et dissemblances

① $\mathbb{Z}$ $x - 0 = x$

$A - \emptyset = A$

② $(x - y = 0) \Leftrightarrow (x = y)$ $\neq$

$(A - B = \emptyset) \Leftrightarrow (A \subset B)$

$A\ \alpha\ b$ $B\ a\ \alpha\ b$

$A - B = \emptyset$ et $A \subsetneq B$

IV $\mathcal{P}(E)$

(1) Présentation

ex clu Ens de tous les Ens

Ens formé de certains Ens

$\mathcal{P}(E)$

b, c}

$2^3 = 2 \times 2 \times 2$

IV $\mathcal{P}(E)$

ensembles

E quelc

SE de E forment un ens

= Ens parties de E $= \mathcal{P}(E)$

Comp

$\mathcal{P}(E) = \{X ; X \subset E\}$

$(X \in \mathcal{P}(E)) \Leftrightarrow (X \subset E)$

$\emptyset \in$ $E \in$ 2 elts nom

jamais vide

$\mathcal{P}(E) \neq \emptyset$

$\mathcal{P}(\emptyset) \neq \emptyset$ $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

$2^2 = 4$

~~$\mathcal{P}$~~ $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$

$E = \{a\}$ $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}\}$

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(E)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\emptyset, \{a\}\}\}$

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(a)))$ 8 elts

IV $\mathcal{P}(E)$

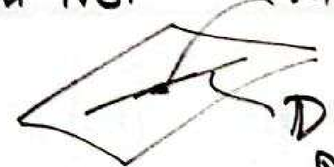
1) Présentation

ex clu Ens de ts les Ens

Ens formé de certains Ens

- $\cancel{P}$ ens de pts
  ens $\mathcal{D}$ droite de P
  ens d'ens

- Soin not



$m \in P$

$l \in D$

$D \subset P$

$\mathcal{D}$

$D \in P$

partie du plan
non pas un elt

$\in \mathcal{P}(E)$

E a b c

$\emptyset$ $\{a\}$ $\{b\}$ $\{c\}$ $\{a,b\}$ $\{a,c\}$ $\{b,c\}$

$\{a,b,c\}$

8 $\quad 2^3 = 2\times2\times2$

adhectons

E quelc

SE de E forment un ens

= Ens parties de $E = \mathcal{P}(E)$

Comp

$\mathcal{P}(E) = \{X;\ X \subset E\}$

$(X \in \mathcal{P}(E)) \Leftrightarrow (X \subset E)$

$\emptyset \in \quad E \in \quad$ 2 elts rem

jamais vide

$\mathcal{P}(E) \neq \emptyset$

$\mathcal{P}(\emptyset) \neq \emptyset \quad \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

$2^2 = 4$

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$

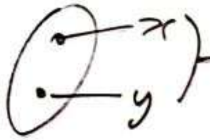
$E = \{a\} \quad \mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}\}$

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(E)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\emptyset, \{a\}\}\}$

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(E)))$ 8 elts

② Str sur $\mathcal{P}(E)$

LC



→ of g de E

3 $\cap \cup -$

$3 + 7 \to 10$

$A \cap B \to A\cap B$ $\quad A\cup B \quad \cancel{A}\ A-B$

$\cap$	P	$\cup$
$(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$	A	$\cup$
$A\cap B = B\cap A$	C	
$A\cap A = A$	IDEMP	
$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$	D	
$A\cap(A\cup B) = A$	ABSORP^N	
E $\quad E\cap A = A\cap E = A$	Neutre	$\emptyset$ $\quad A\cup\emptyset = A$
$\emptyset$ $\quad \emptyset\cap A = \emptyset$	ZERO	E $\quad A\cup E = E$
$\complement_E(A\cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B$	MORGAN	$\cup$ $\quad \cap$

intro ne

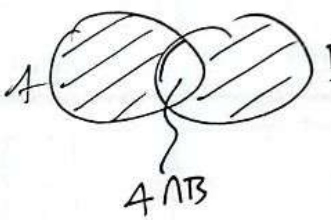
Δ dif sym

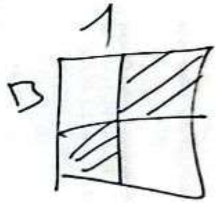
$$A \Delta B = (A\cup B) - (A\cap B)$$

A ou B et seulement à l'un d'eux

A a d b x u $\quad$ c d b y

$A \Delta B =$ a x c g u y





ou exclusif Δ

ou $\cup$ inclusif

on a tjs $\underbrace{A\Delta B \subset A\cup B}_{\text{stricte}}$

A $\quad A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$

$\emptyset$ N $\quad A\Delta\emptyset = A$

S $\quad A\Delta A = \emptyset$

C $\quad A\Delta B = B\Delta A$

$(\mathcal{P}(E), \Delta)$ GC

R_s concept 3 mot fond

① fs ~~mult~~ multiformes (comme log ℂ)

② R Bin ds un Ens PRÉO Ordre Equiv

y = v

CHAP II R

R ~~D~~ math

(présentat° + rig fonct

D formelle α

$$(x,y) = \{\{x\},\{x,y\}\}$$

② E×F

E a b c … → un elt qud

F a' b' c'

Considérons 5 Couples

(a,a') (a,b') …

Admettons que ces Coup forment un Ens

produit cartésien

E b d e   F 2 8   3×2 = 6

$$E\times F = \{(b,2),(b,8),(d,2),(d,8),(e,2),(e,8)\}$$

$$E\times F \neq F\times E$$

$$\{(x,y);\ x\in E \text{ et } y\in F\}$$

$$((x,y)\in E\times F) \Leftrightarrow ((y,x)\in F\times E)$$

CP

① E = F E^2

② SE $\Delta(E) = \{(a,a),(b,b)\cdots\}$

diagonale de E

$\mathcal{R}_s$ concept 3 not fond

① f° ~~mult~~ multiformes
(comme lg ℂ)] $_*$

② $\mathcal{R}$ Bin ds un Ens préo ordre ordre

③ f° ou a

langage

~~[illegible]~~ non triviaux

Ⓘ E×F

① Not couple

paire $E = \{x,y\} = \{y,x\}$

1er elt ~~[illegible]~~

ordonnée (x,y)

1er terme

— CnsT

Cnv $(x,y) = (u,v) \iff x = u$ et $y = v$

$(3,5) \neq (3,8)$

2 couples ≠

(x,y) et (y,x)

(x,x) $\quad \{x,x\} = \{x\}$

singleton

$\mathcal{R}$. ~~D~~ meth

"présentée" + rig fonct

D formelle a

$(x,y) = \{\{x\},\{x,y\}\}$

② E×F

E a b c … → un elt qud

F a' b' c' … Considérons 5 couples

$(a,a')\ (a,b')\dots$

Admettons que ces coup forment un Ens

produit cartésien

$E\ b\ d\ e \quad F\ 2\ 8 \qquad 3\times 2 = 6$

$E\times F = \{(b,2),(b,8),(d,2),(d,8),(e,2),(e,8)\}$

$\neq$

$F\times E$

$\{(x,y);\ x\in E$ et $y\in F\}$

$(x,y)\in E\times F \Leftrightarrow (y,x)\in F\times E$

CP

① $E=F \quad E^2$

② SE $\Delta(E) = \{(a,a),(b,b)\cdots\}$

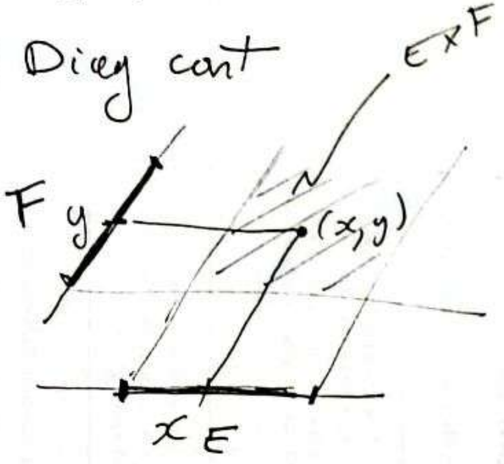
diagonale de E

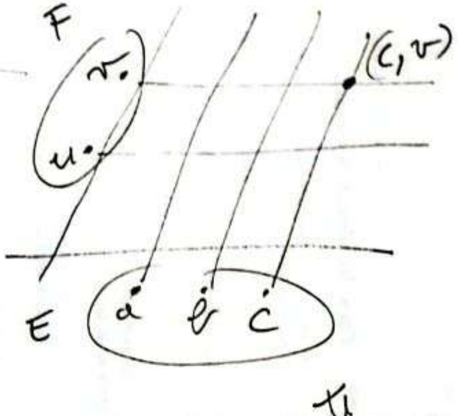
Symb

E a b c

F u v

① Diag cart





pts alignés
(isolés, segments
ou droites)

② ~~Tableau~~ Tableau

E \ F	a'	b'	c'	…	e'
a					
b					
c					
⋮					
e					

incomplète

E \ F	u	v
a	(a,u)	
b		
c		

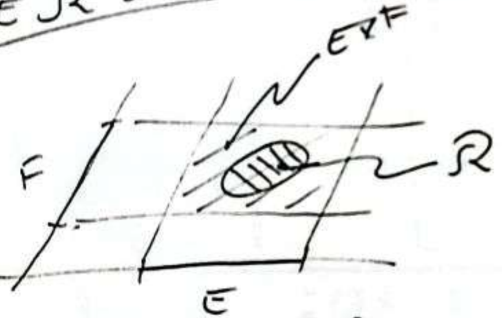
II R_s E un Ens vers un autre

① D

Graphe = $\mathcal{R}$ = correspondance *

de E vers F

tout SE $\mathcal{R}$ de E×F → Ens de couples



E E u v w F a b

$\mathcal{R}_1 = \{(u,a),(w,b)\}$ $\mathcal{R}_2 = E\times F$ $\mathcal{R}_4 = \emptyset$

St $\mathcal{R}$ $\underbrace{E}_{\text{source}}$ vers $\underbrace{F}_{\text{but}}$

St $(\underbrace{x}_{\text{antécédent de } y},\underbrace{y}_{\text{image de } x \text{ par } \mathcal{R}}) \in \mathcal{R}$

lien de $(x,y)\in\mathcal{R}$

$x\mathcal{R}y$

$((x,y)\in\mathcal{R}) \Leftrightarrow (x\mathcal{R}y)$

"avise" "ont à"...

R ouvrages + ~~tho~~ G iques

D R ou cor R

donnée simultanée 3 objets

E source de R

F but —

G partie de E×F = graphe ~~R~~ de R

E F donnés

Connaissance G détermine la R et récT

→ ~~en~~ Ens des R E vers F

" $\mathcal{P}(E\times F)$ ens SE de E×F

- Ex

$=$ $\neq$

$\in$ $\notin$

$\subset$ $\subsetneq$

$\parallel$ $\uparrow\uparrow$ $\perp$

equipol

$\leq$ $<$

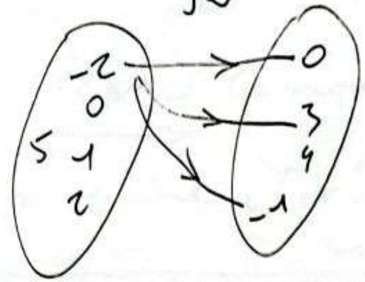
Symb DIAG ~~Sgi~~ Sagittal

$E = \{-2\ 0\ 5\ +1\ -1$ $\quad -1\ 4\ 2\ 0$

$(x,y)\in\mathcal{R} \Leftrightarrow x+y\leq 1$

Alors $\mathcal{R} = \{(-2,-1)(-2,3)(-2,0)(0,-1)$
$(0,0)(1-1)(1,0)(2,-1)$

$\mathcal{R}$

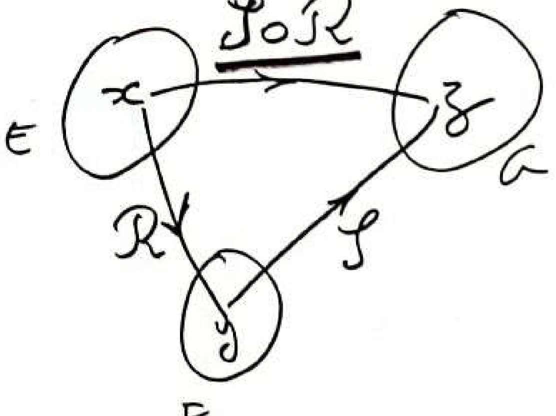


~~② Composition des Rs~~

② ~~Graphe~~ Composition de $\mathcal{R}_s$

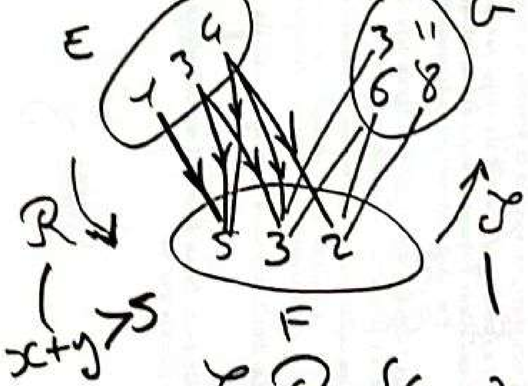
$$E \xrightarrow{\mathcal{R}} F \xrightarrow[\mathcal{S}]{\mathcal{C}} G$$

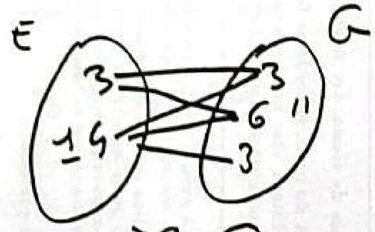
Supposons



$\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$

$(x,z) \in E\times G$ de une $\mathcal{R}$ $E \to G$
rel composée des $\mathcal{R}_s$ $\mathcal{R}$ et ~~$\mathcal{F}$~~ $\mathcal{S}$
pris cet ordre





$\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$

$\mathcal{S}\circ\mathcal{R} = \{(x,z);\ \underline{\text{il existe}}\ y \ (x,y)\in\mathcal{R} \text{ et } (y,z)\in \mathcal{S}\}$

peut $\circ$ ssi

$\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ ★

but de $\mathcal{R}$ = source $\mathcal{S}$

par cons, en gén 2 $\mathcal{R}_s$ quelc ne sont pas composables

- Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ composables

par ordre $\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$ pas nécessairement com

- Si $\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}\circ\mathcal{S}$ existent, ces 2 $\mathcal{R}$ ne sont pas nécessairement =

- Si $\mathcal{R}\ \mathcal{S}\ \mathcal{T}$ com ds cet ordre

$\mathcal{T}\circ(\mathcal{S}\circ\mathcal{R}) =$
$(\quad\quad)$

③ $\mathcal{R}$ réc

- $\mathbb{Z}$ ent > 0 n m

$n \equiv 0 \pmod m$

n congru à zéro modulo m

m divise n

équiv n multiple de m

$m \mid n \iff n \equiv 0 \pmod m \iff$ "n multiple de m"

réc l'une de l'autre

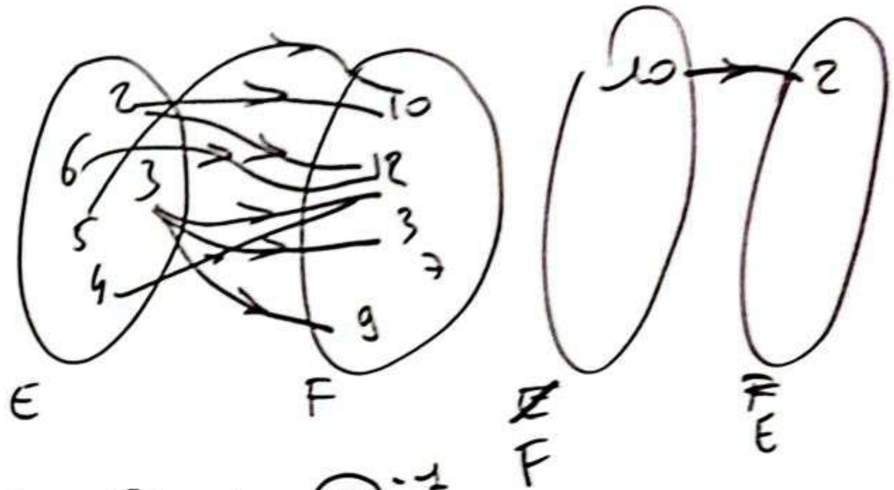
- S+ $\mathcal{R}$ $E \to F$

D $\mathcal{R}^{-1}$ $F \to E$ $\quad \boxed{x \mathcal{R}^{-1} y \iff y \mathcal{R} x}$ *

Ex $\quad E$ 2 3 4 5 6 $\quad F$ 3 7 9 10 12

$E \xrightarrow{\mathcal{R}} F$ 1é

$\xleftarrow{\mathcal{R}^{-1}}$ multiple de



Ps immédiates $\mathcal{R}^{-1}$

① $(\mathcal{R}^{-1})^{-1} = \mathcal{R}$ car par D

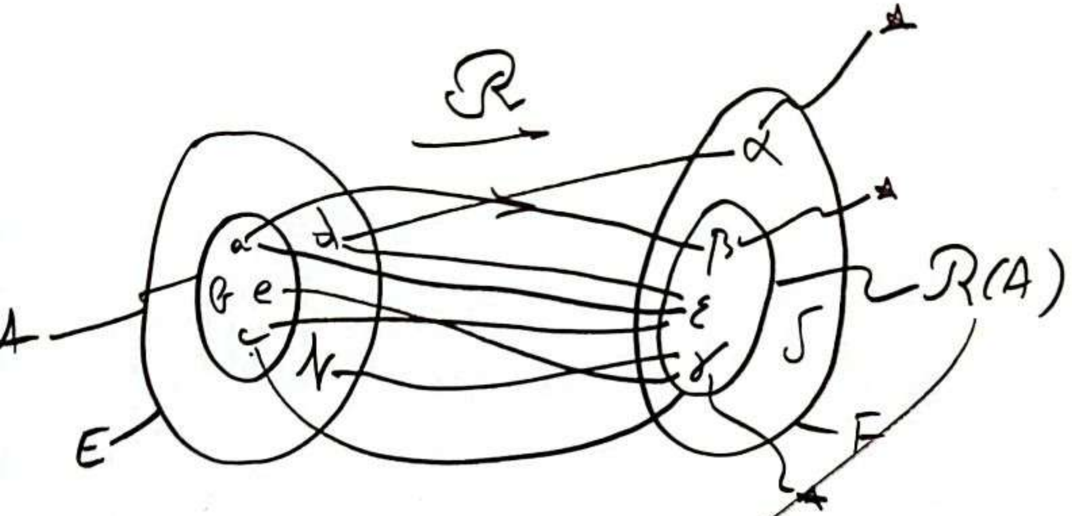
$(x,y) \in (\mathcal{R}^{-1})^{-1} \longmapsto (y,x) \in \mathcal{R}^{-1}$

② S $\mathcal{R}$ $\mathcal{S}$ comp

A $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{R}^{-1}$

$\boxed{(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{-1} = \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1}}$ *

④ Image d'un Ens par une R

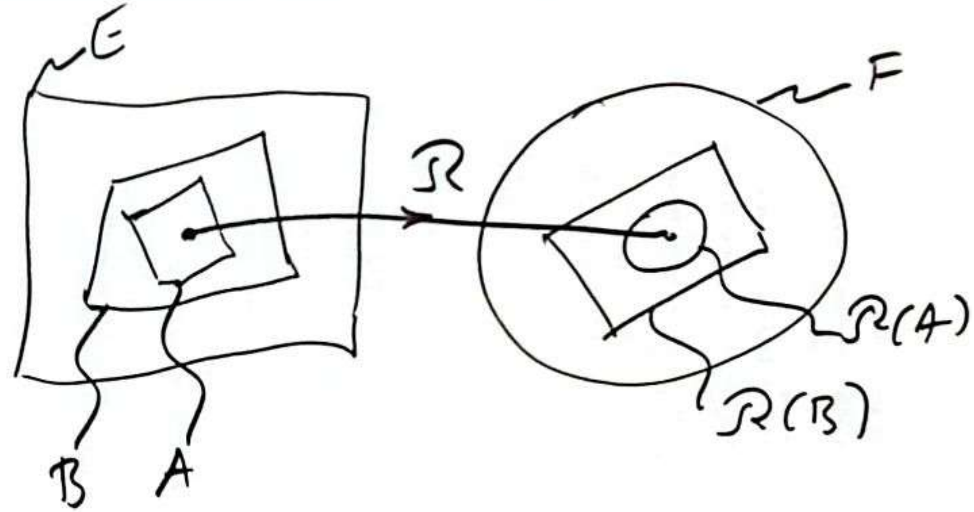


Ens elts de F auxquels aboutit
au moins une → partant de A
est appelé image (directe) de A par R

$= \{ y \, ; \, y \in F$ tels qu'il existe $x \in A, (x,y) \in \mathcal{R} \}$

$\subset F$

Not lorsq A est un singleton $A = \{a\}$
et S aucun risque possible de confusion
selon usage $\mathcal{R}(a)$ ou bien de $\mathcal{R}(\{a\})$



$A \subset B \Longrightarrow \mathcal{R}(A) \subset \mathcal{R}(B)$

- une R préserve $\subset$ ★
- dit aussi préserve $\cup$ ★

$\mathcal{R}(A \cup B) = \mathcal{R}(A) \cup \mathcal{R}(B)$

~~Mais~~ ~~règle générale~~

~~$\mathcal{R}(A \cap B) \subset \mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B)$~~

~~#P mesure ∩~~

$A \subset B \vdash \mathcal{R}(A) \subset \mathcal{R}(B)$ $\qquad \subset$

$\mathcal{R}(A \cup B) = \mathcal{R}(A) \cup \mathcal{R}(B)$ $\qquad \cup$

#P ~~pour~~ ~~mesure~~ ∩

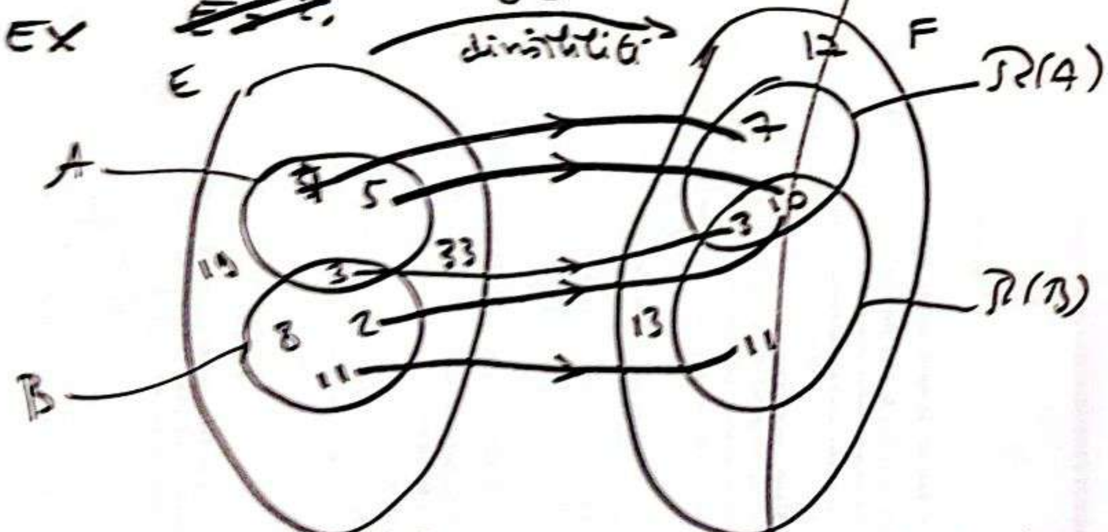
Image ∩ de deux ens n'est pas nécᵗ ∩ des images

En règle générale on a :

$$\mathcal{R}(A \cap B) \subset \mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B)$$

et il se peut que soit strictement

EX ~~...~~

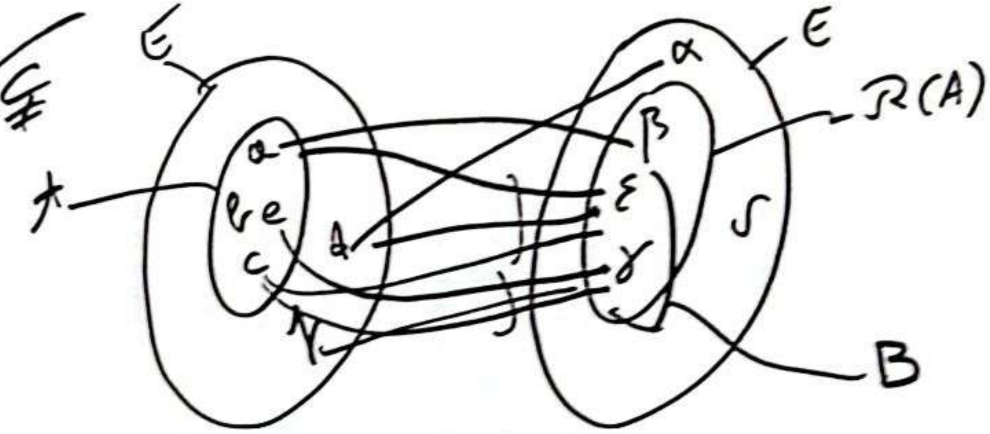


$A \cap B = \{3\}$ $\qquad$ $\mathcal{R}(A \cap B) = \mathcal{R}(3) = \{3\}$

Cpat $\mathcal{R}(A) = 3\ 10\ 7$

$\quad B \quad 3\ 11\ 10$

$\vdash \mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B) = 3\ 10$



x → 1 plus

→ aucune.

Sᵗ B partie de F

on appelle im rec de B par R

les elts de E d'où part

une flèche → 1 elt de B $\qquad \mathcal{R}^{-1}(B)$

im directe de B par $\mathcal{R}^{-1}$

$$\mathcal{R}^{-1}(B) = \{a\ e\ c\ d\}$$

$$\mathcal{R}^{-1}(\{\gamma\}) = \{e\ c\}$$

$$\{\delta\} = \emptyset$$

$y \in \mathcal{R}(x) \longmapsto x \in \mathcal{R}^{-1}(y)$

– Gusidecon $\mathcal{R}$ $E \to F$

Ten gén Im de E par $\mathcal{R}$

sor un SE de F

im de E par $\mathcal{R}$

de la m̄ façon

im réc de F par $\mathcal{R}$ sor un SE de E

= domaine d'existence de $\mathcal{R}$

$\mathcal{R}(E) \subset F$ et $\mathcal{R}^{-1}(F) \subset E$

$\mathcal{R}(E) = \alpha\, \beta\, \varepsilon\, \gamma$

$\mathcal{R}^{-1}(F) = a\, d\, c\, e\, f$

III RBIN ds un Ens

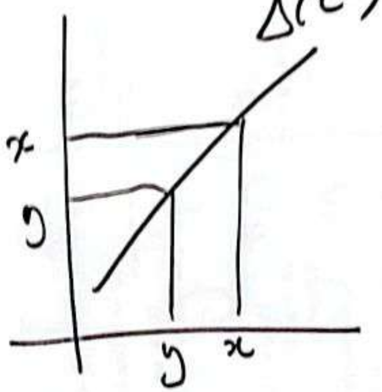
~~(1) Gen~~

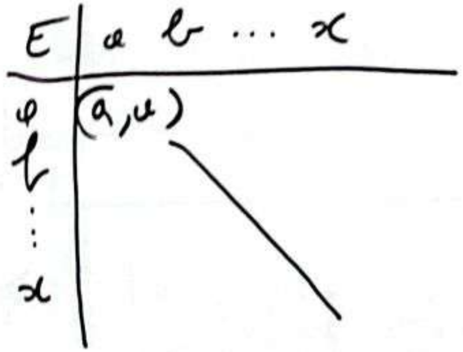
(1) Gén

Ve $\mathcal{R}$ $E \to E$

$= \neq \subset \subsetneq \parallel \uparrow\uparrow \perp \leq <$ |

$\mathcal{R} \subset E \times E$ ens RB ds $E = \mathcal{P}(E \times E)$





$((x,y) \in \Delta(E)) \iff (x=y)$

S^{+} $\mathcal{R}$ RB ds E

$\mathcal{R}^{-1}$

~~[illegible]~~ divisibilité multiple de

$\mathcal{R}^{-1}$ / sym sur le diag elle m̂

rec de $\geq$ sur !

$\mathcal{P}$ elt bouclé

· · ~~paire~~ paire inerte

paire unilat

— boomerang

② Réflexives

$\mathbb{N}$ | $<$ $\forall x \in \mathbb{N}$

$x | x$ $\quad x \not< x$

si ~~[illegible]~~ pr tt elt x de E ~~[illegible]~~ on a

$x\mathcal{R}x$

$\mathcal{R}$	$=$	$\subset$	$\leq$	$\parallel$	$\uparrow\uparrow$	$\mid$
$\neg\mathcal{R}$	$\neq$	$\subsetneq$	$<$	$\perp$		

$\mapsto \Delta(E) \subset \mathcal{R}$

③ Sym

$\mathbb{N}$ "a la m̂ parité"

$(x\mathcal{P}y) \Rightarrow (y\mathcal{P}x)$ $\quad$ | NON $\not\Rightarrow$

S $(x\mathcal{R}y) \Rightarrow (y\mathcal{R}x)$

S	$=$	$\neq$	$\parallel$	$\perp$	$\uparrow\uparrow$
$\neg$S	$\subset$	$\subsetneq$	$\leq$	$<$	$\mid$

$\mapsto \mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$

vérifions que si $\mathcal{R}$ sym $\Leftrightarrow \mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$

si $(x,y) \in \mathcal{R}$, or si $\mathcal{R}$ sym, ~~[illegible]~~ $(y,x) \in \mathcal{R}$

donc $(x,y) \in \mathcal{R}^{-1}$ ce qui prouve $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}^{-1}$

Alors $\mathcal{R}^{-1} \subset (\mathcal{R}^{-1})^{-1} = \mathcal{R}$

donc $\mathcal{R}^{-1} \subset \mathcal{R}$ et $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}^{-1} \longmapsto \mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$

tt elt sur G assuré m̂ symétrie / $\Delta(E)$

④ Antisym   RSA

$\mathbb{N}$ P $|$

si $x|y$ et $y|x$ A $x=y$

en effet $xa = y$ et $yb = x \Rightarrow x = xab$

ssi $x=0$ (et $y=0$)

ou $a=b=1$ et $x=y$

~~$(x|y$ et $y|x)$~~

$(x|y \text{ et } y|x) \Rightarrow (x=y)$

par contre $z \neq 4$ zPy et yPz

$(xRy \text{ et } yRx) \Rightarrow (x=y)$

ex $\quad * \quad = \quad \subset \quad \subsetneq \quad \leq \quad < \quad |$

$\neg A \quad \neq \quad \parallel \quad \perp \quad \uparrow\uparrow$

R 1) peut ? Sort = *

2) ni S ni S

1er ds $\mathbb{Z}$ $\quad -4 \; 4$ sont $\neq$ égaux

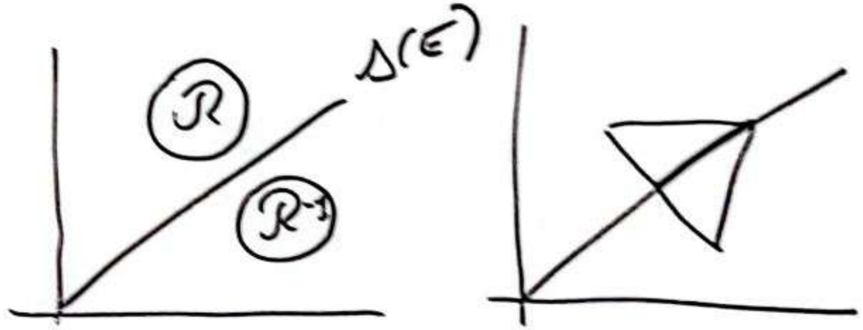
~~A~~

ssi $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} \subset \mathcal{E}$

càd G $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^{-1}$

sont — ou bien disjoints

\ ou bien elt com $\in$ diag



distinguent 2 sorts de R A

ⓐ Celles qui ne vérifient jamais simultanément

xRy et yRx

ex $<$ $\subsetneq$

ⓑ — éventuellement

xRy et yRx mais alors que $x=y$

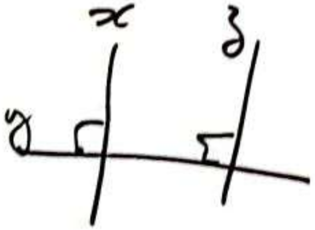
ex $\leq$ $\subset$

⑤ Transitive

$\mathbb{N}$ | $\perp$ 

~~Ex~~

~~$\forall (x|y)$~~ $(x|y$ et $y|z) \Rightarrow (x|z)$



$(xRy$ et $yRz) \Rightarrow (xRz)$

ex $\quad T = \subset\ \subsetneq\ \leq\ <\ \parallel\ \uparrow\uparrow\ |$

$\neg T \neq \perp$

ssi $\mathcal{R}\circ\mathcal{R} \subset \mathcal{R}$

R	$\Delta(E) \subset \mathcal{R}$
S	$\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$
A	$\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} \subset \Delta(E)$
T	$\mathcal{R}\circ\mathcal{R} \subset \mathcal{R}$

⑥ Algèbre des relations

$\mathcal{R}\ \mathcal{S}$ composables ssi

But = source

$\longrightarrow$ 2 RB sont Ass

DLC de $\mathcal{P}(E\times E)$

A $\mathcal{R}\circ(\mathcal{S}\circ\mathcal{T})$

( )

$\cancel{C}$

$\emptyset\circ\mathcal{R} = \mathcal{R}\circ\emptyset = \emptyset$

$\Delta(E)\circ\mathcal{R} = \mathcal{R}\circ\Delta(E) = \mathcal{R}$

puis succ

$\mathcal{R}^2 = \mathcal{R}\circ\mathcal{R}$

$\exists y \in E$ tq

$(x,y) \in \mathcal{R}$ et $(y,z) \in \mathcal{R}$

$\perp^2 = \perp\circ\perp = \parallel \qquad \parallel^2 = \parallel\circ\parallel = \parallel$

T ssi $\mathcal{R}^2 \subset \mathcal{R}$

réc

$n \geq 3$

$\mathcal{R}^n = \mathcal{R}^{n-1}\circ\mathcal{R}$

$\cancel{C}$

RO
RE

Pb

comparer des ≠ façons —
ou identifier entre eux —

T

III RO relation
RE d'équivalence

2
(A) |*

Dans un ens il y en a ∃ plus d'un ordre distinct

$\mathbb{N}$ $\leq$ $1_{\mathbb{N}}$

- $(E, \mathcal{R})$
ordonné par

$S(a, b) \in \mathcal{R}$
⟶ comparables au sens de l'O par $\mathcal{R}$ considéré

a et b sont comp si

ou si b et a —

càd si on a $(a, b) \in \mathcal{R}$ ou $(b, a) \in \mathcal{R}$

Not $<$ $\underset{\text{réc}}{>}$ — RO opposées

$a < b$
précède

$b > a$
suit

incomparables
$(\mathbb{N}, 1_{\mathbb{N}})$ 3 et 5

EX $\leq$ $\geq$

Gén ligne elts incomp par un RO $\mathbb{N}$ $\leq$
2 elts peuvent être incomp un ordre strict $\subsetneq$
$\not\subset$ $<$ $\mathbb{R}$

RO
RE

Pl

comparer de ≠ façons —
ou identifier entre eux —

I RO

1 Ds ou ordre   ORAT

R xRx
T $(xRy \text{ et } yRz) \Rightarrow (xRz)$
A — — — x — $x = y$

EX $\cancel{|_{\mathbb{Z}}}$ $|_{\mathbb{N}}$ $|_{\mathbb{Z}}$

① $= \subset \leq |_{\mathbb{N}}$
② ~~PAS~~ $\subsetneq <$ car $\cancel{R}$
PAS
③ $|_{\mathbb{Z}}$ $\parallel \uparrow\uparrow$ PAS car $\cancel{A}$
④ $\perp$ PAS $\leftarrow$ $\cancel{T}$ $\cancel{A}$

ssi $\Delta(E) \subset \mathcal{R}$ $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subset \mathcal{R}$
$\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} \subset \Delta(E)$ | *

- Ds un ens il peut ∃ plus O distinct
$\mathbb{N}$ $\leq$ $|_{\mathbb{N}}$

- $(E, \mathcal{R})$
ordonné par

S $(a, b) \in \mathcal{R}$
⟶ Comparables ds cet O par $\mathcal{R}$
considéré

a et b sont comp si
ou si b et a —
cas si on a $(a,b) \in \mathcal{R}$ ou $(b,a) \in \mathcal{R}$

Not $<$ $\underset{\text{réc}}{>}$ — RO opposées

$a < b$ précède $b > a$ suit
incomparables
$(\mathbb{N}, |_{\mathbb{N}})$ 3 et 5

EX $\leq$ $\geq$
Gén lignée elts incomp par un RO
2 elts peuvent ê incomp par une ou ont $\mathbb{N}$ $\leq$
et comp

$\cancel{\otimes}$ $<$ $\mathbb{R}$ ordre strict $\subsetneq$

② Diag Hasse

fini ou non dénombrable

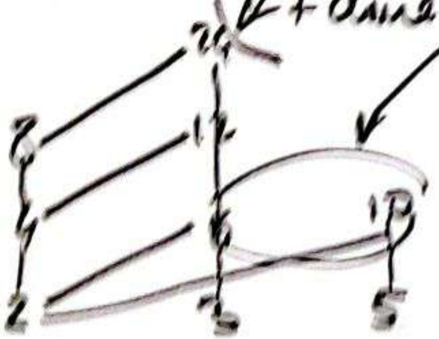
$\underrightarrow{x \text{ or } y}$ $\quad x < y \quad x \neq y$ $\quad$ y au dessus x

E 2 3 4 5 6 8 10 12 24

Comme RO T ~~Viproq~~ $x \to z$

Trans $x \to y$ $\quad y \to z$

+ claire



③ O partiel / total

• $(E, <)$

S ∃ au moins 2 elts incomp

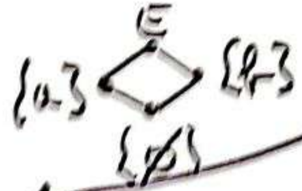
partiellement ordonné par <

• ex $\mathcal{P}(E)$ $\subset$

$E = \{a,b\}$ $\quad \mathcal{P}(E) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

puisque $\{a\}$ et $\{b\}$ sont incomp

$\{a\} \not\subset \{b\}$ $\quad \{b\} \not\subset \{a\}$

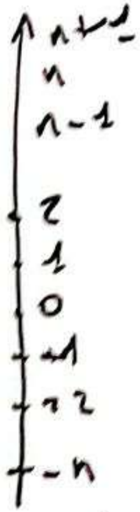


S 2 elts quelc sont comp

on trouve (a,b) $\quad a < b$ ou $b < a$

$\mathbb{N}\ \mathbb{Z}\ \mathbb{D}\ \mathbb{Q}\ \mathbb{R}$ o usuel tot O

= chaîne (cas fini ou dénom)



Tout SE $\in$ TO

est lui $\hat{m}$ TO

. E Partiel O $\exists$ SE tot^t ordonnés,

$\{4, 12, 24\}$

4) ET E ordonnés

1) $\leq$ $\mathbb{R}$

S^+ ~~a<b~~ $a \leq b$

SE part intervalles d'extrémités

a et b

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} ;\ a \leq x \leq b\}$

$]a, b]$ $<$

fermé   ouv 1 côté / semi ouvert

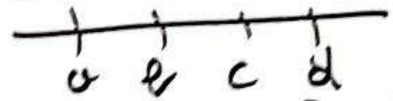
$[a, a] = \{a\}$ $]a, a[= \emptyset$

. Exemples usuels $a < b < c < d$

$[a, b] \cap [b, c] = \{b\}$

$[a, b[\cap]b, c] = \emptyset$

$[a, c] \cap]b, d] =]b, c]$



$\rightarrow$ partiel

2) $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ part d'ordre produit

posant $(a, b) < (c, d)$ ssi $a \leq c$ et $b \leq d$

$(-7, \sqrt{2}) < (-\pi, 5)$

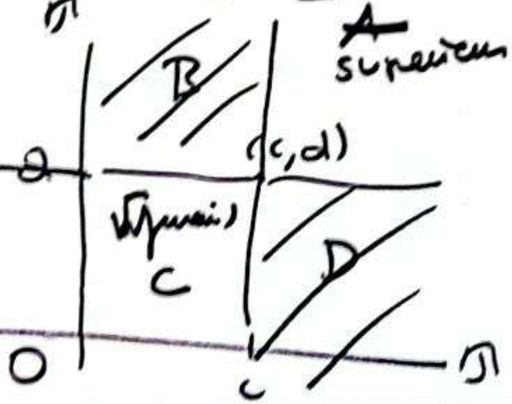
A supérieurs à (c, d)

C inf

B D incomparables

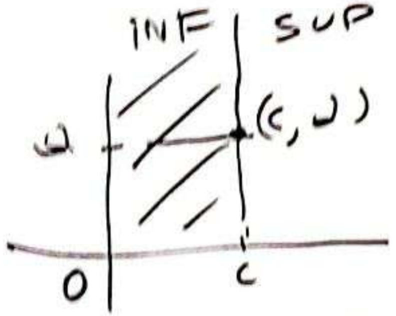
$(-1, 7)\ (2, 6)\ (3, -5)$

sont 2 à 2 incomparables



③ $\mathbb{R}^2$ OTOT $<$ lexicographique

$(a,b) < (c,d)$ ssi $(a<c)$ ou $(a=c$ et $b \leq d)$

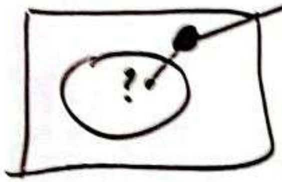


$\mathbb{R} \geq$ O procédants permettant ordonner ℂ en identifiant à $\mathbb{R}^2$

⑤ Elts remarquables d'un Ens Oé   NB

(A) MAJORANTS
(B) ~~+GD~~ PLUS GRAND ÉLÉMENT
(C) BORNE SUPÉRIEURE
(D) ÉLÉMENTS MAXIMAUX

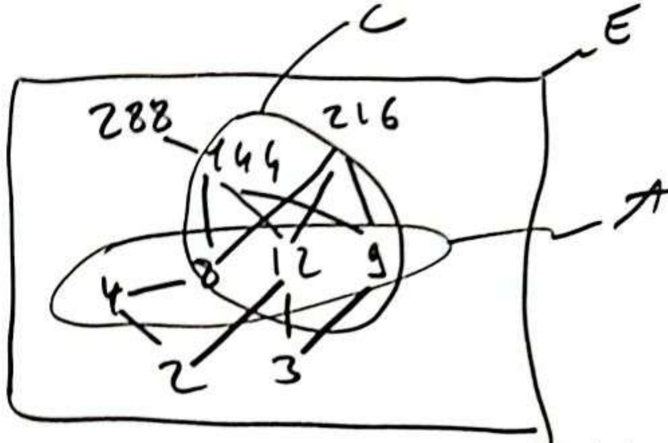
(A) MAJORANTS



m $\in E$ majorant de A si m suit ts les elts de A

$\boxed{m \in E \text{ et } x \in A \Rightarrow x < m}$

Ex 1é



144 car 4 8 12 9 div 144
~~#~~ 216 ou 288

Si A possède ~~#~~ un majorant
partie majorée

$[-2,3]$ ou $]-5,17[$
ens rat x ~~ty~~ tq $x^2 < 2$ partie majorée de ℚ

(B) + GD ELT

une partie majorée A contient au + un de ses majorants
∈

En effet

Si m et m' sont 2 majorants de A
et $\in$ l'un et l'autre à A

on peut écrire

$(m' \in A) \Rightarrow (m' < m)$

m $\qquad m < m'$ $\qquad$ donc $m = m'$

Si A une partie majorée de E

Si A contient l'un de ses majorants M
on dit que M est le + gd elt de A

Dc on peut

$$\boxed{M \in A \text{ et } x \in A \Rightarrow x < M}$$

Ex 144 est le + gd elt de C

| A majoré mais ne possède pas le
| + gd elt

D $[0,5[$ majoré
mais ne possède pas de + gd elt

$>$ 4,9 $\quad$ 4,98 etc..

de m

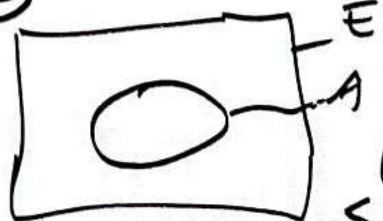
$\emptyset$ $x^2 < 2$ majorée pas de
+ gd elt

R

"le" + gd elt justifié
puisque nous avons montré
qu'une partie majorée contient
au + un de ses majorants

m posons $m \in E$ minorant
si m précède ts elts de A
et m est le plus petit elt
de A si et $m \in A$

© BORNE SUPÉRIEURE



$M(A)$ ens des
majorants de A

S possède un + pt elts
Borne sup

$$\boxed{s \in M(A) \text{ et } x \in M(A) \Rightarrow x > s}$$

S^+ ⇔ BS est

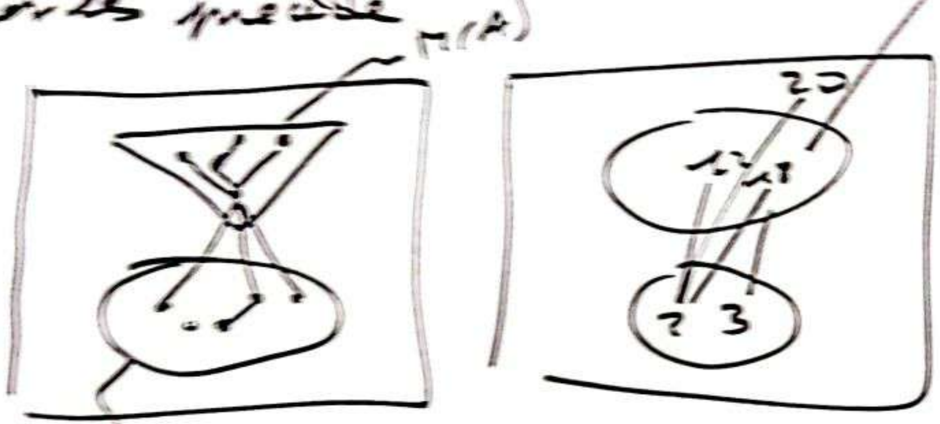
ens. et que majorant, ⇒ Gam

à ∃ élts est ∀ le min

——— + pt élt de M(A)

⇒ est Gam à ∃ les majorants

or les possible



A pas necT majoré ⇒ ne pos nec^T de BS

Mais une partie majorée de A

ne possède pas non plus nec^T de BS

Ex

① p n'a de + pt | é
élt pour
de A admet pas de BS

② ∅ $x^2 \le 2$

Bien que majoré possède pas de BS

BS + <u>générale</u> que celle de + GD élt

en effet S A possède une BS s,

A s est le + gd élt de A

ssi $s \in A$

BS peut de exister sans qu'il ∃ + gd élt

$[0,1[$ ~~+GD~~ élt
mais 1 BS

Bi partie minorée A ... + gd minorant

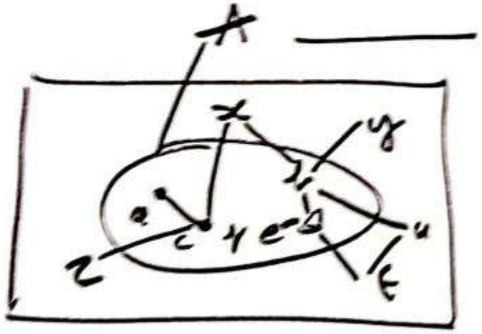
-3 Bi de $]-3,2]$ + ~~pt~~ ∈

① ELTS MAXIMAUX

~~u~~ $u \in A$ est maximal ds A

S $\nexists$ pas ds A d'elts qui le suivent

$u \in A$ et $x \in A$ et $x \geq u \Rightarrow x = u$



— 3 elts maximaux

a b f

$\nexists$ on a le suit

E $O^é$ ~~part~~ ne∃ EM

$(\mathbb{N}, \leq)$ $(\mathbb{N}^*, |)$

les possède pas celui ci pas

nec unique a f b

R enfin qu'un EM ds A peut être suivi par des elts de $E-A$

b

u minimal

Si $\nexists$ ds A elts qui le préc

c f e

Se peut qu'un elt soit mini et max (f) !

MAJ^T_S MIN^T_S

+GD ELT +PT ELT

BS Bi

ELTS MAXIMAUX MINIMAUX

A revoir

au DIG

+ minimum

Bornée = majorée + minorée

MAJORANT (1)

de

- elt a de E $\geq$ à ts les elts de A
- $\forall$ elt b de E $\geq$ a ssi qui est un majorant de A

PARTIE MAJORÉE d'un E <

Partie de E qui admet un MAJ

MIN <

[$m \in E$ ssi $x \in A \Rightarrow x \leq m$]

+ GD ELT = MAXIMUM de A

(2) elt de A $\geq$ ts elts de A

- toute partie majorée de $\mathbb{N}$ admet un + gd elt
- Par contre $]x, y[$ $\mathbb{R}$ bien que possédant une BS n'admet pas + GE

$\boxed{M \in A \text{ ssi } x \in A \Rightarrow x \leq M}$

(3) BS de A = + pt + GD E

+ petit elt s'il existe de l'Ens des majorants de A

sup x peut ne pas $\in A$

$x \in A$

- toute partie majorée de $\mathbb{R}$ admet une BS
- une de $\mathbb{Q}$ pas néc^t $\{x \in \mathbb{Q} ; x^2 \leq 2\}$

$s \in M(A)$ ssi $x \in M(A) \Rightarrow x \geq s$

(4) ELTS MAXIMAUX

un elt a de E ssi soit maximal s'il n'existe pas de E d'élément qui lui sont $>$ strict

Si E admet un + GD elt a alors a est le seul elt maximal de E

$u \in A$ ssi $x \in A$ ssi $x \geq u \Rightarrow x = u$

II (R)E

sur un Ens E ① D

E

R xRx

S $(xRy \text{ et } yRz) \Rightarrow (xRz)$

T $(xRy) \Rightarrow (yRx)$

②

phase

même"

nction

R

RE

EX

① Soit $n > 0$ entier donné

Considérons congruence modulo n

$x \equiv y \, (n)$ ssi $x - y$ est multiple de n

c'est $x - y = k \cdot n$, $k \in \mathbb{Z}$

cette R est une équiv sur $\mathbb{Z}$

"x congru à y modulo n"

② $\mathbb{N}^2$ Consid $\mathcal{R}$

$((a,b) \, \mathcal{R} \, (a',b'))$ ssi $(a + b' = a' + b)$

équiv sur $\mathbb{N}^2$

② **CLASSES E** CE

image $\mathcal{R}(x)$ de x par $\mathcal{R}$

c'est Ens des elts de E équiv à E

appelée CE de x modulo $\mathcal{R}$

$\bar{x}$ dc par D

$\boxed{y \in \bar{x} \text{ ssi } y \mathcal{R} x}$

II (R)E

sur un Ens E ① D

E

R $x\mathcal{R}x$

S $(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow (x\mathcal{R}z)$

T $(x\mathcal{R}y) \Rightarrow (y\mathcal{R}x)$

Ex ① $=$ // ↑↑

PAS ② $\leq$ $\subset$ $|_{\mathbb{N}}$ $|_{\mathbb{Z}}$ ✗

— ③ $\perp$ ✗

ssi $\Delta(E) \subset \mathcal{R}$

$\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subset \mathcal{R}$

$\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$

Très souvent préf à par phrase forme "a $\mathcal{R}$ b ssi a et b ont le même"

Ex $\mathbb{Z}$ "à la même parité que"

Ens Ds du plan // même direction

Not $a\mathcal{R}b$

$a \equiv b(\mathcal{R})$

a équiv à b modulo $\mathcal{R}$

Ex

① Si $n > 0$ est donné

Considérons congruence modulo n

$x \equiv y\,(n)$ ssi $x-y$ est multiple de n

c.à.d. $x-y = k \cdot n$, $k \in \mathbb{Z}$

cette $\mathcal{R}$ est une équiv sur $\mathbb{Z}$

"x congru à y modulo n"

② $\mathbb{N}^2$ Considérons $\mathcal{R}$

$((a,b)\,\mathcal{R}\,(a',b'))$ ssi $(a+b' = a'+b)$

équiv sur $\mathbb{N}^2$

② CLASSES E CE

image $\mathcal{R}(x)$ de x par $\mathcal{R}$

c'est Ens des elts de E équiv à E

appelée CE de x modulo $\mathcal{R}$

$\bar{x}$ déf par D

$\boxed{y \in \bar{x} \text{ ssi } y\mathcal{R}x}$

Ex

x et y sont congrus modulo 2
ssi ont mm parité
pour cette équiv

$\overline{1} = \{1, -1, 3, -3, 5, -5, 7, -7 \ldots\}$

$\overline{-4} = \{0, 2, -2, 4, -4, 6, -6 \ldots\} \subset \mathbb{Z}$

on considère maintenant une équiv R sur E et un elt x de E
$\overline{x}$ est une SE de E
donc $\overline{x} \in \mathcal{P}(E)$

Étudions maintenant
P_CE

① R étant R, pour tt elt x de E, on a
$x \in R(x) = \overline{x}$ donc $\overline{x} \neq \emptyset$

② S $(yRx) \Leftrightarrow (\overline{y} = \overline{x})$

$y \in R(x) \Leftrightarrow x \in R(y)$

cad $y \in \overline{x} \Leftrightarrow x \in \overline{y}$

Si $\overline{y} = \overline{x}$ il est clair que
on a yRx

Récipt montrons que yRx
entraîne $\overline{y} = \overline{x}$

*

...

pr connaître ~~tous~~ les elts d'une CE
il suffit d'en conn un = représentant

Ex Géom Euc

P // équi des Dm
D des droites du plan

$\overline{D}$ la classe de D modulo //
est appelée la direction de D
(cad tts Ds // à D)

Suffit effect de con n'importe quelle
laquelle de // à D

A intérieur d'une CE, ts elts
sont en R avec ts autres elts

(c) Si 2 CE sont dist

∄ d'élt de l'une qui soit en $\mathcal{R}$ avec des élt de autre

donc ces dist sont nécess disjointes :

$$(\bar x \neq \bar y) \Leftrightarrow (\bar x \cap \bar y = \emptyset)$$

En effet, supposons que $\bar x$ soit dist de $\bar y$ et que $z \in \bar x \cap \bar y$

on a alors $z \in \bar x \to \bar z = \bar x$ et $z \in \bar y \to \bar z = \bar y$ donc $\bar x = \bar y$ contrad.

Conclusion

S $\mathcal{R}$ RE sur E

"partage" E en SE non vides

= CE_s 2 à 2 disjoints (sans élt com)

et tq à intérieur de chacun entre eux tt élt sont équiv à ts les autres

(3) Ens quotient

Ens ~~des~~ CE modulo $\mathcal{R}$ est dc un SE de $\mathcal{P}(E)$

$E/\mathcal{R}$ de E par $\mathcal{R}$

par D $E/\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(E)$

S^t $x \in E$; ∃ $\bar x \in E/\mathcal{R}$

ex S^t $\mathcal{R}$ cong modulo 2 ds $\mathbb{Z}$

il y a 2 CE

$\bar 5 = \{1, -1, 3, -3$

$\overline{-4}$ 0,

Dans $\mathbb{Z}/\mathcal{R} = \{\bar 5, \overline{-4}\}$ comme $\bar 5 = \bar 1$

comme $\overline{-4} = \bar 0$ = $\{\bar 0, \bar 1\}$

Ens des entiers ~~modulo~~ modulo 2

noté $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

(5) EX CE

(1) $\mathbb{Z}$ est le quotient de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$
par $\mathcal{R}$ def par
équiv $(a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d)$ ssi $a+d=b+c$

(2) S^+ S ens quot de ...
D rels connues sur le quot de
$\mathbb{Z}\times S$ 1 $(a,s)\,\mathcal{R}\,(b,t) \iff at=bs$

(3) $\mathbb{Q}$ est le quot de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$
par equiv $\mathcal{R}$ def par
$(a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d) \iff ad=bc$

(4) $\mathbb{C}$ ——— $\mathbb{R}[X]$ ens quot de ~~degré~~ des polys
par $\mathcal{R}$ def par $f(X)\,\mathcal{R}\,g(X)$
ssi $f(X)-g(X)$ est divisible par
X^2+1 $\quad \mathbb{C}=\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$

analogue $\mathbb{Z}[i]=\mathbb{Z}[X]/(X^2+1)$

$\sqrt{2}$ $\quad X^2-2$

(5) Ens quot de $\mathbb{Z}$ par cong modulo
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ formé de n elts
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}=\{\overline{0},\overline{1},\overline{n-2},\overline{n-1}\}$ = ens cl modulo

(6) $\mathbb{R}^2$ plan géom

2 couples ~~de~~ de points (A,B) et
(C,D) sont équipol

Si segments AD et BC
ont m milieu

Ceci est une RE ~~---~~ sur la
classe de (A,B) est appelé un vecteur
du plan $\mathbb{R}^2$

(7) S^+ $\mathcal{R}$ ~~---~~ def sur $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$
$(a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d)$ ssi $\exists\ \alpha\in\mathbb{R}^*$ tq
$a=\alpha c$ et $b=\alpha d$
On quot devient $P_1(\mathbb{R})$
= droite projective réelle
+ gent on déf esp proj réels ou $\mathbb{C}$
$P_n(\mathbb{R})$ et $P_n(\mathbb{C})$

⑧ S^+ f, g $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

~~I~~ ne s'annulant pas sur un voisinage de 0, dit que f et g sont équiv au voisinage de 0 si $f(0) = g(0)$

et si $\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$ qd $x \neq 0 \to 0$

⑨ Sur Ens f° num Cont sur un voisinage de 0, on déf une équiv $\sim$ par $f \sim g$ ssi il existe un voisinage de 0 sur ~~lequel~~ lequel f et g ~~[illegible]~~ coïncident

⑤ R PRÉORDRE

O E
R R
A S
T T

$\frac{R}{T}$ ~~ante~~. O et E

par contre ≠ lorsque avoir été soit un PO ni E ni O

~~[illegible]~~ étant donc PO

$\sim$ — E
$\frac{R}{T}$ — $\mathcal{R}$

$x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x$

E = E associé au PO

$E/\sim$ peut être ordonné par $\mathcal{R}$ ≤ déf par $\bar{x} \leq \bar{y}$ ssi $x \mathcal{R} y$

ordre associé

Pour ordonner un Ens E on peut le faire apparaître comme un Ens quotient $F/\mathcal{R}$ d'un Ens préordonné

CHAP IV fs

(I) GÉN

(1) D

RB $\mathcal{R}$ $E \to F$

... $\mathcal{R}$ fonctionnelle

procède

★★

comme $\mathcal{R}$

1 pt et un

CHAP IV Fonctions

$f : E \to F$

$E \xrightarrow{f} F$ DANS

$f : \begin{cases} E \to F \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$

ex $I_E : E \to E$

$x \mapsto x$

"procédé" permettant associer à chaque elt E un elt ...

Rem

(1) $\mathcal{R}$ est une f ssi

peut une et une seule →

(2) $f = a$

un plus

a est ac une f dont le dom existence coïncide avec sa source

CHAP IV fs

(I) GÉN

(1) D

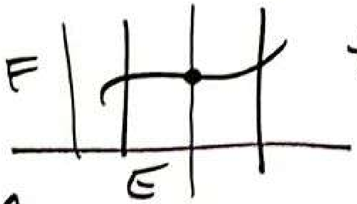
RB R $E \to F$

opp R fonctionnelle

| ou f

| ou a

- Si pr ∀ elt x de E l'image $R(x)$ de x par R possède exactement un elt ★★

=  tte ∥ à F coupe R en 1 pt et un seul.

- $y = f(x)$

unique

im de x par f

= valeur au pt x

$f : x \mapsto y$

$f : E \to F$ DANS

$E \xrightarrow{f} F$

$f : \begin{cases} E \to F \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$

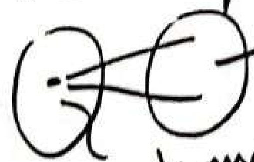
ex $I_E : E \to E$

$x \mapsto x$

"procédé" permettant associer à chaque elt E un elt ...

Rem

(1) R est une f ssi



jamais

peut une et une seule →

(2) f = a

un plus

a est ac une f dont le dom

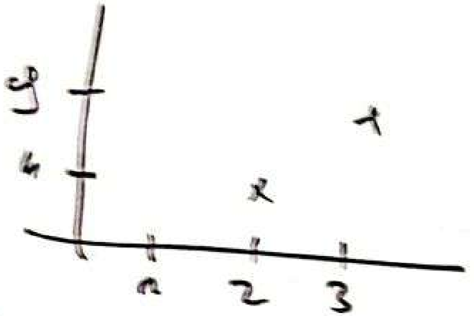
existence coïncide avec sa [illegible]

tableau val

E	a	b	c	d
f	f(a)			

Ex $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $x \mapsto x^2$

	0	1	2	3	4	5
F	0	1	4	9		



② = 2 fs $f = g$

ssi même source E &
même but F
même val en tt point de E

$f(x) = g(x)$
pr tt $x \in E$

ex

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin x \end{cases}$$

$$g : \begin{cases} [0, \pi/2] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin x \end{cases}$$

sont distinctes bien que $f(x) = \sin x$
et $g(x) = \sin x$

$E \xrightarrow{f} F$

$A \subset$

restriction de f à A

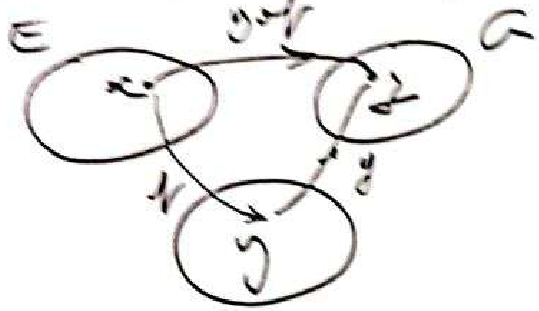
$g : A \to F$

$g(x) = f(x)$ pr $\forall x \in A$

clair que pr tte f $E \to F$
si on se donne partie A de E [illegible], il existe
une et une seule rest f à A

$f : E \to F$
$g : A \to F$ res de f à A

③ Composée 2 fs



Composée 2 f est une f

≃ R si $\underline{f\ g}$ surj

$\underline{g\ f}$ pas néc^t ~~surj~~ =

$f : E \to E$

$g : E \to E$

Ex $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

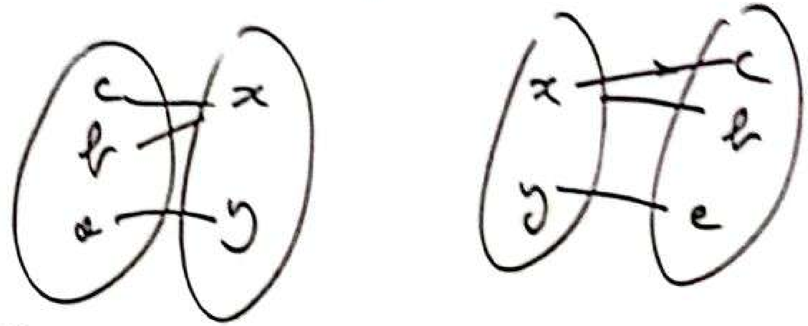
$\mapsto x^2+4x+1$ $\quad \sin 3x$

$g \circ f : x \mapsto \sin[3(x^2+4x+1)]$

$f \circ g :$ $\sin^2 3x + 4\sin 3x + 1$

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[r, "h"] & H \\ E \arrow[r, "f"] & F \arrow[u, "1x"] \arrow[d, "g"] & \\ & G \arrow[uur, "i"] \arrow[r, "k"] & K \end{tikzcd}$$

Rem f^{-1} pas néc^t une f $F \to E$



II EX

1 LCI lois int en E

loi a $E \times E \to E$

$(a,b) \mapsto a * b$ loi $*$

$x+y \quad x \times y \quad \text{pgcd}(x,y)$

$\mathbb{N}$ $-$ $\div$ PAS EX(3,5)

$\mathcal{P}(E)$ $\cup \cap \Delta$

~~2 Familles Suites~~

② Fam suites

Ens des indices de la fam

S^t E ; I

d'elts de E indexée par

ttes a/ $I \to E$

usage proscrire ... not

$$x : I \longrightarrow E \qquad i \longmapsto x(i)$$

$i \in$ indice

x_i au lieu de $x(i)$

$(x_i)_{i\in I}$ famille des x_i pour i courant $\in I$

Suite d'elts de E est une famille d'elts de E indexée par $\mathbb{N}$ ou partie de $\mathbb{N}$

$n \geq 1$ n-uplet fam d'elts de E indexée par $\{1, 2, 3, \dots, n\}$

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$n = 2$ couple

Rem

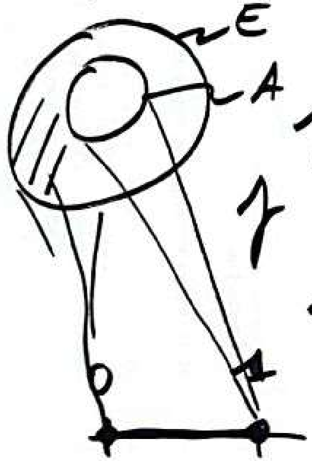
famille d'ens $(A_i)_{i\in I}$

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \,;\, \text{il existe } i \in I \text{ tq } x \in A_i\}$$

$\bigcap$ ~~il existe~~ pour tout $\times$ —

$\bigcap_{i=1}^{n}$ CP

③ fs caractéristiques



f caractéristique de A ~~⊂~~ ds E

$\mu_A : E \longrightarrow [0, 1]$

$\mu_A(x) = 1$ si $x \in A$

0 sinon

f ens $\wp \to \mathbb{R}$ de Dirichlet

A = B ssi leurs fc sont égales

- fc $\bar{A}$ $A \cap B$ $A \cup B$ $A - B$ $A \Delta B$

peuvent s'exprimer à partir des fc

de A et B.

pour cela on utilise

$E \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ $\quad E \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$g \to \mathbb{R}$ $\quad E \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

$\mathrm{Min}(f(x), g(x))$ le + petit 2 val.

Max ______ ______ gd

pr tout $x \in E$,

$\mu\bar{A}(x) = 1 - \mu A(x)$

$\mu A \cap B$ $\quad \mathrm{Min}\ \mu A(x), \mu B(x)$

$\cup$ $\quad$ Max

$-$ $\quad$ Min ($\quad$ 1 $-$

Δ

-2

def par notion

— SE flou

(4) Ens flous

E se nomme

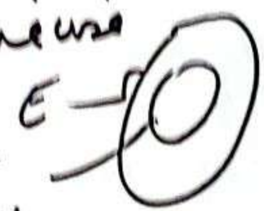
"homme de grande taille"

degré d'appartenance

def μ $\quad \mu A : E \to [0, 1]$

$\simeq$ Prob

précisé



SE flou A

alors Ens flou

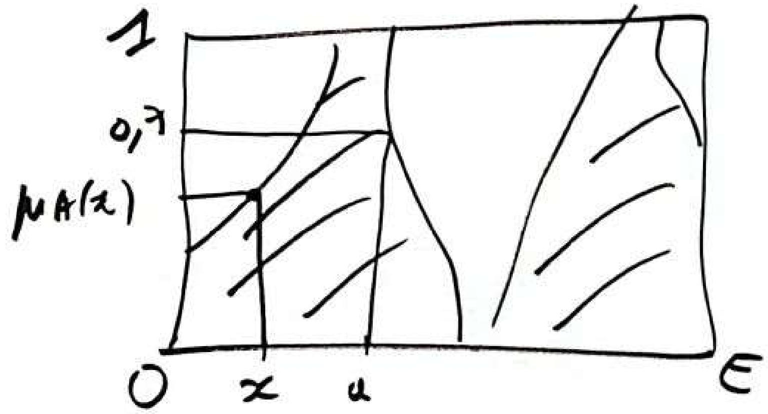
$x \longmapsto \mu A(x)$

de x à A

Par Def $A = B$

si $\mu A = \mu B$

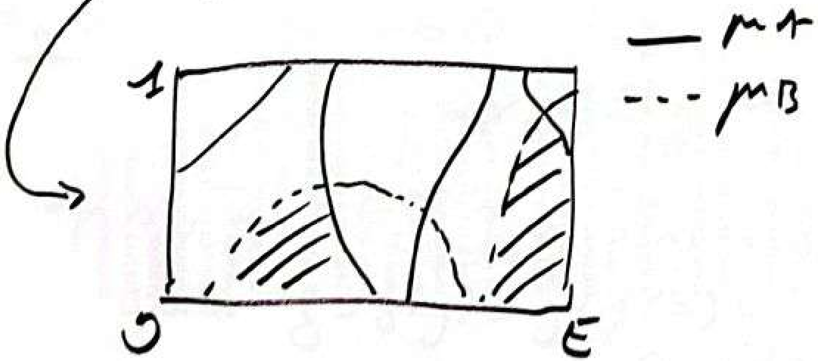
A hachurant région située sous la C de μA



$\bar{A}$ $\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$

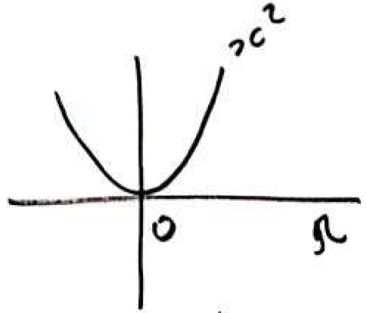
∩ min

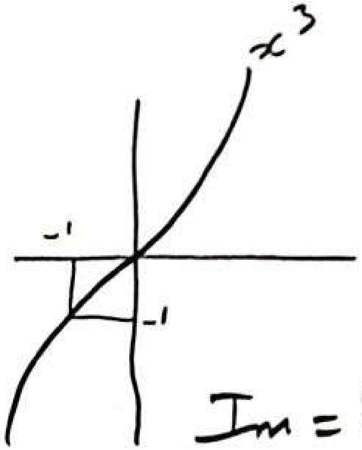
∪ max



III f^{o} particulières

① S





$Im = \mathbb{R}^+$ $Im = \mathbb{R}$

s ~~surj~~

$E \xrightarrow{s} F$ $f(E) = F$

Ds ce cas ts elts F atteints au moins une fois par f :

pr tt elt y de F

$\exists$ au moins 1 elt $x \in E$ tq $y = f(x)$

E sur F

Ex $I_E \begin{cases} E \to E \\ x \mapsto x \end{cases}$ $f : \begin{cases} \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^* \\ (x, y) \longmapsto xy \ \omega\ (x_y) \end{cases}$

$\sin x$ $[0, \pi/2]$ surj ← PAS

PAS

=

$\exists a \in F$ tq $a \notin f(E)$

Rem $f : E \to F$ on a une surj de $E \to f(E)$

- $\circ$ 2 s surjves

$f : E \to F$ $g : F \to G$

$g\circ f : E \to G$

En effet Soit $z \in G$

Comme g surj, $\exists y$ ds F tq $z = g(y)$

f s, $\exists$ $x \in E$ tq $y = f(x)$

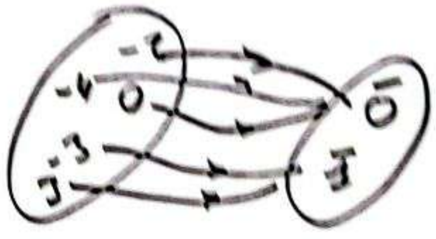
alors $z = g(y) = g(f(x)) = (g\circ f)(x)$

Ex FOND

① $\mathcal{R}$ RE E

$x \longmapsto \bar{x}$

$E \longrightarrow E/\mathcal{R}$ s canonique



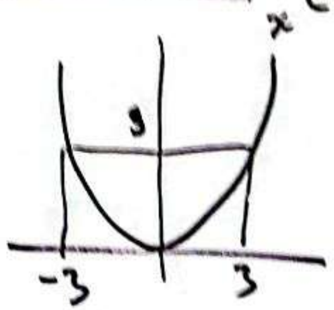
$\mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

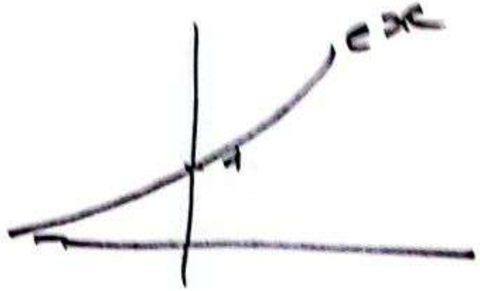
② Soit $n \geq 1$ ent

$x \longmapsto x^n$

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ s ssi n impair

③ INJECTIONS





EF

i

⊆ 2 elts distincts de E
ont par f des images
distincts de F

JAMAIS 

ssi 2 cond equiv

$f(x)=f(x')) \Rightarrow (x=x')$

$\neq \quad \Leftarrow \quad \neq$

EX $I_E : \begin{cases} E \to E \\ x \mapsto x \end{cases}$ $\quad f : \begin{cases} [0,\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R} \\ \sin x \end{cases}$

$\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$

$\sin x$ $\quad \to$ pgcd (x,y) PAS

O 2 is $\Rightarrow$ i

Supposons $(g\circ f)(x) = (g\circ f)(x')$

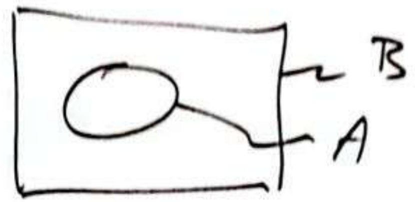
Posons $y = f(x)$
$y' = f(x')$

$i \to \quad g(y) = g(y') \Rightarrow y = y'$

f i $\quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

EX FOND

s om
i os
b os

1) 

$\left.\begin{array}{l} x \mapsto x \\ A \to B \end{array}\right\}$ i canonique
$A \hookrightarrow B$

2) $x \mapsto \{x\}$
$E \to \mathcal{P}(E)$

3) S^+ $n \geq 1$ ent
$x \mapsto x^n$
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad$ i $\Leftrightarrow$ ssi n impair

~~Clat~~ Clas^t f 4 types

1 $\not{i}$ $\not{s}$ $\boxed{\sin x}$ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

2 i $\not{s}$ $\quad [0,\pi/2] \to$

3 $\not{i}$ s $\quad \to [0,1]$

4 i s

3. B

$E \xrightarrow{f = i+1} F$

tt élt de F est l'image par f d'un moins un élt de E

élt ont img. au plus ——— i

Résumé

$E \to F$

tt élt a une image par cette a d'un élt de E et d'un seul

Ps

1) o b

2) réc $F \xrightarrow{b} E$

$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

$f^{-1} \circ f = I_E \quad f \circ f^{-1} = I_F$

Ex

1) E F

$(x, y) \longmapsto (y, x)$

$E \times F \longrightarrow F \times E$

2) $\forall n \geq 1$ ent

x^n b ssi n impair

3) ent $n \geq 1$

$\mathbb{Z} \to n\mathbb{Z}$

$x \longmapsto nx$

- E F sont nec^t disjoints

Somme directe = réunion directe

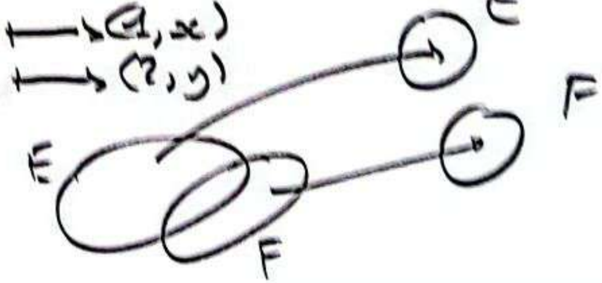
un EM $E' \cup F'$ disjoints en b avec E et F

$E' = \{1\} \times E \quad F' = \{2\} \times F$

$x \longmapsto (1, x)$

$y \longmapsto (2, y)$

$E' \amalg F$



4. Partition d'un Ens

- E

famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de E

réalise une partition de E ssi

a) aucune ~~partie~~ des Ens A_i n'est $\emptyset$

b) 2 ens dist de cette fam sont disjoints :

$$(i \neq j) \Rightarrow (A_i \cap A_j = \emptyset)$$

c) Ens $E = \cup$ ts elts de cette fam

$$E = \bigcup_{i \in I} A_i$$

- Ex E $\underbrace{1\ 2}_{A_1}\ \underbrace{3}_{A_2}\ \underbrace{4\ 5\ 6}_{A_3}$

- EX FOND

$\mathcal{R}$ RE E

CE modulo $\mathcal{R}$ formant une partition de E :

- $CE_{\bar{x}}$ n'est jamais vide puisque $x \in \bar{x}$

- 2 CE dist sont disj.

- Si $x \in E$ on a $x \in \bar{x}$;

donc $E \subset \bigcup_{x \in E} \bar{x}$

Comme $\bar{x}$ est un SE de E

on a $\bigcup_{x \in E} \bar{x} \subset E$ d'où finalement

$$E = \bigcup_{x \in E} \bar{x}$$

- En fait, allons montrer un T remarquable

$\exists 1$ b $\mathcal{R}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$

$\mathcal{R}(E)$: RE sur E ; $\mathcal{P}(E)$: Partitions sur E

...

Pour D une RE $\mathcal{R}$ sur un Ens E,

il revient au même de se donner

explicitement cette $\mathcal{R}$ ou Ens des CE

CARDINAUX CHAP V

I. D

E u v y s x t

F 1 2 3 4 5 6 — par convention implicite posséde 6 elts

$E \xrightarrow{b} F$

E = Card F

ε

E

V CARDINAUX

2) S

S EeqF, ∃ b f E→F

A f^{-1} b F→E

dc FeqE

(E eq F) => (F eq E)

3) T

S EeqF, ∃ b f E→F F→G

S FeqG

A gof b E→G

ce qui montre que EeqG;

dc (Eeq F) et (Feq G) => (EeqG)

Eq est une RE

- pb ordre logique posé par le cardinal

Eq n'est pas une RE ds un I Ens

~~Ens des Ens~~ ce qui exclut de considérer

les CE pour cette R

CARDINAUX CHAP V

I. D

E u v y s x ~~t~~ t

F 1 2 3 4 5 6 — par convention implicite possible 6 ets elts

$E \xrightarrow{b} F$

ont le m nb d'elts

peut importe b choisie

G a b c d e f

pour Ens infinis

→ seuil TE

1. Equipot

E eq F m. card Card E = Card F

puissance

si ∃ ~~b~~ 1 b E→F

indui Livement ~~m~~ m nb elts

Ceci a une RE

1) R IE est une b de E in E

dc E ~~E~~ eq E

2) S

si E eq F, ∃ b f E→F

∃ f^{-1} b F→E

dc F eq E

(E eq F) ⇒ (F eq E)

3) T

si E eq F, ∃ b f E→F

si F eq G F→G

∃ gof b E→G

ce qui montre que E eq G;

dc (E eq F) et (F eq G) ⇒ (E eq G)

Eq est une RE

- pls ortho logique pour qu'il continue

Eq n'est pas une RE ds un 1 Ens

"Ens ~~t~~ toi" ce qui exclut de considérer

les CE pour cette R

· Considérons

- $\emptyset$

$\{1\}$

$\{1,2\}$

$\{1,2,3\}$

$\vdots$

tt Ens fini est éq à un et un seul de ces ensembles

- De m̂ façon on pose comme Ax de TE (ou l'on montre à partir de la ordinaux) qu'il existe des Ens appelés (nbs) cardinaux

tq tt Ens E donné soit éq à un et un seul d'entre eux;

ce cardinal = card ou puissance de E

Card E $|E|$ $\# E$ $\overline{E}$ $\overline{\overline{E}}$

un card est de un Ens

Par contre démontrerons que les nbs cardinaux ne constituent pas un Ens

2) Comparaison de cardinaux

E a b c d

F x y

celui-ci - d'elts?

int + Rais^{+}

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] \arrow[d, "i"] & F \arrow[d, "h"'] \arrow[d, "k"] \\ E' \arrow[r] & F' \end{tikzcd}$$

a $F \to E$ $\overset{i}{\leq}$

D RO entre card $h \circ f \circ g^{-1}$

St $m = \text{Card } E$ et $n = \text{Card } F$

$m \leq n$ $\Leftrightarrow \exists\, i$ ~~$F \to E$~~ $E \to F$

est inférieur

$\Leftrightarrow$ E éq à une partie de F

Card $F \leq$ Card E

a) Cette a est indép. des Ens E et F

En effet $\Leftrightarrow \exists$ $E \xrightarrow{i} F$

si $m = \text{Card } E = \text{card } E'$

n F F'

A par D $\exists\, g$ $E \xrightarrow{g} E'$ h $F \xrightarrow{h} F'$

et a $h \circ f \circ g^{-1}$ est une i $E \to F'$

b) on vérifie aisément que $\leq$ RT

c) conclu(?) ... que Antisym

En fait c résultat difficile conjecturé par Cantor et Dm^e Bernstein "l'infini ... parle des mathés"

Th

Dm en utilisant Ax choix deux 2 cardinaux sont comparables

~~...~~ on a $m \leq n$ ou $n \leq m$

3). Arit des Card

1)

$A \cup B$ eq $A' \cup B'$

pose $\boxed{\text{Card } A + \text{Card } B = \text{Card}(A \cup B)}$

D + de 2 card

C $A \cup B = B \cup A$

$\text{Card } A + \text{Card } B = \text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(B \cup A)$
$= \text{Card } B + \text{Card } A$

A

$m + (n + p) = (m + n) + p$

2) Si A eq A'
B eq B'
peut voir que
$A \times B$ eq $A' \times B'$

pose $(\text{Card } A) . (\text{Card } B) = \text{Card}(A \times B)$

C A

Par D $(\text{Card } E)^2 = \text{Card}(E \times E) = \text{Card } E^2$

3) Gouverner

E^F $\quad F \xrightarrow{a} E$

montre que Si E eq E'
$F - F'$

A E^F eq $E'^{F'}$

pose $(\text{Card } E)^{\text{Card } F} = \text{Card}(E^F)$

4) $m\ n\ p$ 3 card

Si ~~...~~ $m \leq n$

A $m + p \leq n + p$ et $mp \leq np$]

II. Cards finis
— infinis

1. Card finis

∀ Ens eq à ∅ est vide

$\underline{0 = \mathrm{Card}\, \emptyset}$
zéro

- 2 singletons sont eq — jamais ∅

en effet

S^t $A = \{a\}$ et $B = \{b\}$

$a \mapsto b$ $\{0\}$ $\{\emptyset\}$ — bij ? ...

$1 = \mathrm{Card}\{0\} = \mathrm{Card}\{\emptyset\}$

$0 \neq 1$

- 2 paires sont tjs eq

A a b B c d

2 card 1 paire

$2 = \mathrm{Card}\{0, 1\} = \mathrm{Card}\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$2 \neq 0$ $2 \neq 1$

Par ce procédé

→ card finis (entiers nat)

ajoutés uns autres

$3 = \mathrm{Card}\{0, 1, 2\} = \mathrm{Card}\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

S^t n card fini quelc

par déf

$n + 1$ card de $A \cup B$

où A card n, B sing $+ y$, $A \cap B = \emptyset$

peut vérif que $n + 1 \neq n$

caractérise Ens finis

Rem

1) pétition de principe ?

puisque déf singleton réduit à 1 seul elt

puis 1 comme card d'un singleton

En fait peut déf ∅ sing paire

sans faire appel aux $\mathbb{N}$

par ex A est un sing

ssi $(x \in A \text{ et } y \in A) \Rightarrow (x = y)$

notion card pénétrée de $\mathbb{N}^*$

2) à partir d'ici

prend A dans

rigoureusement

$0+1=1$ or $1+1=2$

on a

$1+1 = \mathrm{Card}\{x\} + \mathrm{Card}\{y\}$

$= \mathrm{Card}\{x,y\}$

$= 2$

de même, puisque $x \xrightarrow{i} y$ $\{x\} \longrightarrow \{y,z\}$

on a $1<2$ on en déduit que

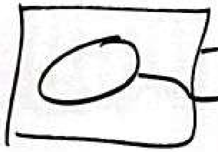
$0<1<2$ $<n<n+1<\dots$

• Etude Ens finis ~~Anal Combinatoire~~

Résultats paraissent souvent intuitifs,

mais dans (n≥2)

présentant parfois difficultés notables

1)  E fini, A fini $\mathrm{Card}\,A \le \mathrm{Card}\,E$

$\subsetneq$ partie propre

$\mathrm{Card}\,A < \mathrm{Card}\,E$

ont termes

$\nexists$ b $E \longrightarrow$ mais sa parties

Euclide tt entier que parti

$\top$ TE fini

2) $\subseteq$ $\mathrm{Card}\,E = n$

A $\boxed{\mathrm{Card}\,\mathcal{P}(E) = 2^n}$

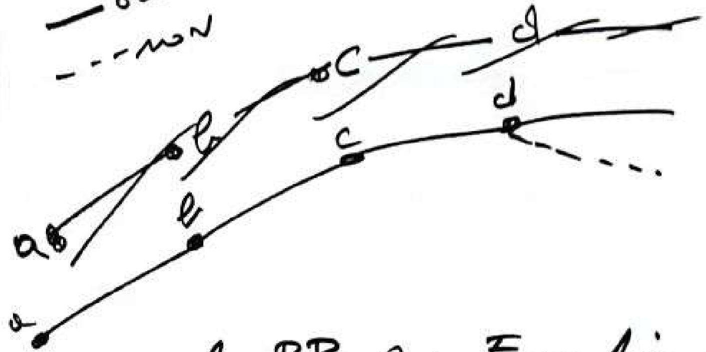
$\simeq \mu$

 A^E

E a b c d

— oui

- - - non



a b c d

a b c

a b d

$\to$ nb RB des Ens fini à n élts $= 2^n$ *

~~E_n~~ ~~F_n~~

E_m F_n

1 1
2 2
3 3
⋮
m n

· nb ($n!$) de b_s $E \to E$ $\underline{F}$?

- $\exists$ $m \leq n$ [sinon $m \geq n$]

nb i $\binom{n}{m}$ [surj $\Sigma(m,n)$]

so $\geq$

$0! = 1$ $n! = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ $n \geq 1$

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

+ Complexe

→ étudier nbs ~~de~~ Stirling

$$\boxed{\Sigma(m,n) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^{i+m} \binom{m}{i} i^n}$$

2. Card inf

Admettons que card fini ~~(DA)~~ entier nat

forment un Ens $\mathbb{N}$

Card cet Ens ~~fini~~

En effet ~~on~~ savons qu'1 Ens fini ne peut pas ê éq à l'un de ses parties propres

or $n \longmapsto$ ~~2~~ $2n$

$\mathbb{N} \xrightarrow{b} 2\mathbb{N}$

⊂ SE propre

$0 \leftrightarrow 0$, $1 \leftrightarrow 2$, $2 \leftrightarrow 4$, $n \leftrightarrow 2n$

inf où son card ~~qc~~ n'~~ter~~ pas un card fini

$\mathbb{N}$ card $\aleph_0$ aleph zéro

$$\boxed{\text{Card } \mathbb{N} = \aleph_0}$$

tt Ens éq à $\mathbb{N}$ ou $2\mathbb{N}$ infini dénombrable

on peut dénombrer, numéroter ses élts

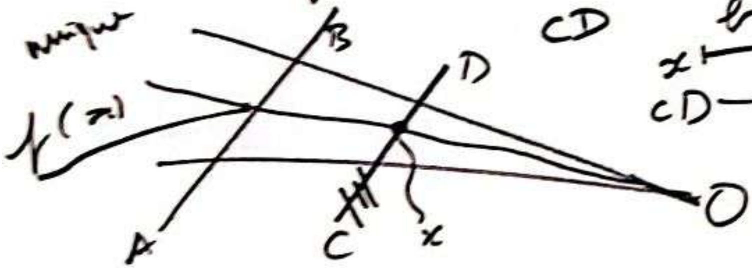
à l'aide des ent nat

+ gént Ens dénombrable tt Ens éq à une partie (finie ou non) de $\mathbb{N}$

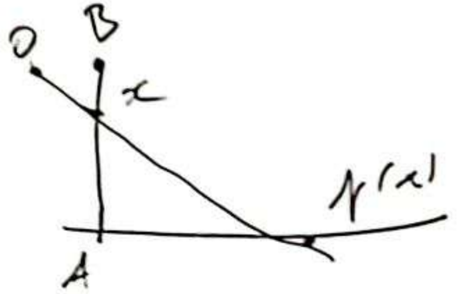
celles dégagées ce qui distingue
Ens fini des inf
Puis montrerons que ts Ens inf
ne ont pas nécest dénombrables

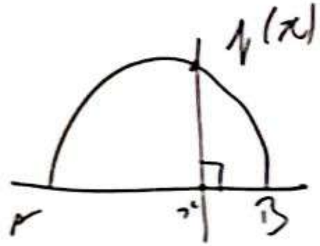
possibilité pour un Ens inf de pouvoir
ê ég à une de ses parties
(cas de N)
est une P caract des Ens inf
. T ou Ax Dedekind
| Ens E est inf ssi ég à une de
ses parties propres
Ps Ens inf sont ~~sont~~ pas tjs celles
qu'on ne sait pas attendre intuitivement

Exs
Deux segments de droite sont tjs ~~équiv~~ ég



CD $x \xrightarrow{f} f(x)$
CD $\to$ AB





Dm^{ons} 1er T de Cantor

pr tt Ens E   card E < card $\mathcal{P}$(E) *

puisque $x \mapsto \{x\}$ E $\to$ $\mathcal{P}$(E) est i
par D rel entre card
card E $\leq$ card $\mathcal{P}$(E)
stricte suffit prouver $\nexists$ s E $\to$ $\mathcal{P}$(E)
donc qu'1 e quelc f jamais s
... en part $n < 2^n$

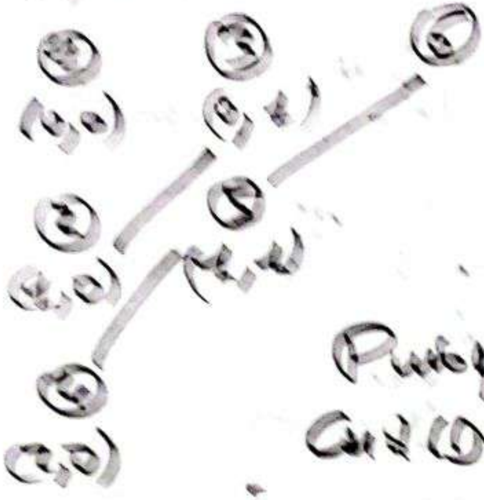
3. Ens inf dénombrables   Card $\mathbb{N} = \aleph_0$

ex $2\mathbb{N}$

1) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ il y montre que on peut ~~(0,0) (0,1) numéroter~~ effectivement numéroter les couples d'entiers nat. à l'aide d'entiers nat.

~~(0,0)~~

~~(1,0)~~



Puisque
$\mathrm{Card}(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) = \mathrm{Card}\,\mathbb{N}$ par déf ou ~~...~~ card d'un. card
on a $\aleph_0^2 = \aleph_0$

- $\mathbb{N}$ par $\forall$ ent $n \geq 1$
par réc sur n

$\aleph_0^n = \aleph_0$

- Par ailleurs
par $\forall$ ent $n \geq 1$ jusqu'à

$1 \leq n \leq \aleph_0$ ...

$\aleph_0 \leq n\aleph_0 \leq \aleph_0^2$

d'où ~~...~~ $\underline{n\aleph_0 = \aleph_0}$

Rem $(a,b) \longmapsto 2^a(2b+1)-1$

$\mathbb{N}\times\mathbb{N} \xrightarrow{} \mathbb{N}$ bij

B) $\cup$ 2 ens inf dénombrables

A B f_A $\mathbb{N} \xrightarrow{\text{bij}} A$
f_B $\mathbb{N} \xrightarrow{\text{bij}} B$

Généralement ~~A~~ ~~A, A∪B~~
~~A∪B~~ $\{1,2\}\times\mathbb{N} \longrightarrow A\cup B$

$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ ...

c) $\mathbb{Q}$ inf dén

Croissant $\mathbb{Q}$: $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}^+$

1 2 3 4 5

1/2 1/2 1/2 1/3

Dc Card $\mathbb{Q}^+ = \aleph_0 =$ Card $\mathbb{Q}^-$

Card $\mathbb{Q} =$ Card $(\mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^-) = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$

puisque $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ on a dc

$\aleph_0 =$ Card $\mathbb{N} \leq$ Card $\mathbb{Z} \leq$ Card $\mathbb{Q} = \aleph_0$

$\mathbb{Z}$ inf dén

Arithm Card inf opéré

fin

ex n tout $n \geq 1$

$n + \aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 = n\,\aleph_0 = \aleph_0^n = \aleph_0$

4.) Puissance du Continu

Puisq $\forall E$ Card $E <$ Card $\mathcal{P}(E)$,

on peut $\aleph_0 <$ Card $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

$\exists$ dc Ens ~~inf~~ inf NON DÉN

Prenons

un T cantor prouve que

$\forall E$ fini ou non

Card $\mathcal{P}(E) = 2^{\text{Card } E}$

dc Card $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = 2^{\aleph_0}$

= puissance du Continu c

1er pb

donner un ex Ens autre que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

ayant puis Cont

Cantor dm

Ens $\mathbb{R}$ a la puis du Cont

Card $\mathbb{R} = c = 2^{\aleph_0} = 2^{\text{Card } \mathbb{N}}$

montrons que $\mathbb{R}$ n'est pas dén

- # int de $\mathbb{R}$ non réduit à un pt

possède pc

$]0,1[$ éq $\mathbb{R}$

car $x \longmapsto 1/x + 1/(x-1)$ bij

$]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$

Voyons que $\mathbb{R}$ possède 2 types de SE

1) Ens dén fini ou non
   par ex $\{1,2,3\}$ $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$
2) Ens ayant puiss cont
   ex $]0,1]$

→ existe-t-il dans $\mathbb{R}$ des SE inf non dén et n'ayant pas la pc

nb c ∃? un card α tq
$\aleph_0 < \alpha < c$

hyp cont conjecture
eff non

Rem st $I = [0,1]$
peut montrer que le carré $I \times I$
est en cor bi univ sur $[0,1]$
∃ aucun tr cont ou carré ... ?!

5. Au delà de la pc

peut aussi que
étant donné un Ens inf E

∃ i $\mathbb{N} \to E$
donc $\aleph_0 \leq$ Card E

$\aleph_0$ est le plus petit des card inf

∃ card $> \aleph_0$ ou c

Mais T Cantor
$2^c > c$

pour tt card a il existe un card 2^a qui lui soit >

Hyp cont généralisée
∄ eff que pr tt card fini a
∄ α tq $a < \alpha < 2^a$

Cohen → indécidable
et que on peut prendre comme
Ax supp de TE
ou bien Hyp Cantor ou sa négation

$\aleph_1$ le plus pt card $> \aleph_0$

puis $\aleph_2$

Prendre Gme Ax hyp cont

revient dc à exiger que

$\aleph_1 = c = \text{card}\,\mathbb{R}$

$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ card 2^c $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ φc

$\varphi[x]$ dér

$\aleph_0$	$n\mathbb{N}$ $\mathbb{N}$ $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$ $\mathbb{N}^2$ φ^{-1} φ^- $n\mathbb{Z}$ $\varphi[x]$
$c = 2^{\aleph_0}$	$\mathbb{R}$ $\mathbb{R}[0,1]$ $\mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}^3$ $\mathbb{C}$ $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ . .
2^c	$\mathcal{P}(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ $[0,1]^{\mathbb{R}}$

⋮

Hyp C continuum

notamment existence mm infinité de

types Ens inf

Avant Cantor on pense

infini + ∪ ..

ALG Card inf

$n + a = a + a = a$

na ... ...

III ORDINAUX

m époque

bcp traités → D card

Card → "qté elts"

géné Ens inf ~~mdr~~ notion nb elts

Ord particulier ordre elts

que $3^{ème}$ = celui qui suit $2^{ème}$

- $E = \{\varnothing, \{\varnothing\},$ ~~$\{\varnothing, \varnothing$~~ $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\ \}$

$\in$ RO ← Bon

De + ~~D~~ remarquable

$x \in E \longleftarrow x \subset E$

$E = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

$x \in E \longmapsto$ ~~$x \in E$~~ $x \subset E$

+ gén^t Ens $\underline{\alpha \text{ ordinal}}$ $\Leftrightarrow$

- $R \in$ BON ordre ds α
- Si $x \in \alpha$, Alors $x \subset \alpha$

Ps remarquables

- ts elts d'un ordinal α sont aussi des ordinaux or $\alpha \notin \alpha$
- α $\quad \alpha \cup \{\alpha\}$ ord

  $\cup$) etc...

- $\alpha \quad \beta$

  $\alpha = \beta$ ou $\alpha \in \beta$ ou $\beta \in \alpha$ — 3 Ps exclusivement

- entre ord $\in$ R $\underline{BO}$

  or $\emptyset$ + pt ord

$\underbrace{\alpha+1}_{suc} = \alpha \cup \{\alpha\}$

Premiers...

0 ord $\emptyset$

1 succ

$n+1 = n \cup \{n\} = \{0, 1, 2, \dots, n\}$

Card unique à tt Ens ordonné

Dm

~~tt~~ Ens bien ordonné E

or $\underline{\text{isom}}$! à un ord α

= ordinal de E

- liens $\underline{\text{card ord}}$

Card = tt ord α qui n'est éq à aucun ord $\beta < \alpha$

...

VI ℰ NAÏVES →
ℰs FORMELLES

I. ORIGINES

1. PBs ANALYSE

DM ... ...antes

points

... systém

...onvergence
...és

...tinance"
...alyse"

VI THÉORIE NAÏVE →
→ s FORMELLES

2. Dedekind – Cantor AX

Euclide "tout tjs > sa partie"
Ax

Galilée incohérence pr Ens inf
"ligne + longue ⊅ plus de pts
contient"

~~~~ infinités = tjs + pt
~~ ~~ pr qtés inf seulement qtés finies

~~po~~ ~~si~~t

Cauchy nuance ∞

– Bolzano
Étude Eq [,] de ℝ
DM ∀ ... à ...t
éq à ℝ
puis énonce Gamma P carac

Ens inf pouvoir ê éq à une ss partie propre

1851 1888 1872
~~~~

~~VI~~ Ens naïves → Ens formelles

I. ORIGINES

1. PBs ANALYSE

- fin XVIII ~~[illegible]~~ DMs [illegible] ~~[illegible]~~
  [illegible] const^{n} précise $\mathbb{R}$

- ≠ Sol^{Ns}
  fallait utiliser certains $\boxed{\text{Ens points}}$
  et effectuer opé^{ns}
  considérer successions

- XIX étu systé
  ~~Part~~ φ? fs en ~~[illegible]~~ trigo
  (Riemann)
  liés à convergence séries

- → 1ers résultats
  Ens Ens points "indices substance d'analyse"

→ 1930 Topologie englobait la TE

2. Dedekind – Cantor AX

Euclide "tout tgd 1 sa partie"
Ax

Galilée inexactitude pr Ens inf
"ligne + longue ≠ plus de pts
compte"

~~≠~~ attributs = +gd + pt
~~[illegible]~~ pr qtés inf seulement qtés fini

~~[illegible]~~
Cauchy infini ∞

- Bolzano
Étu Eq [,] de $\mathbb{R}$
DM ~~∀~~ Irrdants à ~~[illegible]~~
éq à $\mathbb{R}$
puis énonça comme P correc
Ens inf pouvoir ê éq à une ss partie propres

1851 1888 1872

rec seuls trigo or $\mathbb{R}$
(Cant "suites cauchy"

Cantor

Dedekind

1er pb fond resoudre

éq $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$

non éq $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$

éq $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^{n+1}$

Car $\mathcal{P}(E) = 2^{\text{card } E}$

Card $E <$ Card $\mathcal{P}(E)$

"l'infini est Cantor"

T prouve qu'il existe plus "types" Ens inf et que l'on peut tjs trouver un Ens inf "+ gd" que n'importe quel Ens inf card ord et bien ordonné formulé par Cant

- Poincaré ~~utilisant~~ utilisèrent nouveau sans restric^n résultats aussi ← TE

3. Paradoxes

Burali Forti

Ens ordinaux déjà connus sans

Ens de ts les Ens

— Card ne peuvent $\exists^{er}$ sans conduire à des contradictions

1) S^t U Ens de ts les Ens elt ~~...~~ de $\mathcal{P}(U)$ sont des Ens de des elts de U cela montre que ~~...~~ (U) SE de U n'est Car $\mathcal{P}(U) \leq$ Card U Mais d'après T Cantor Card U < Card $\mathcal{P}(U)$

→ Contradic^n

2) S^t ∀ Ens ts card S^t A lun U Puisq $2^{\text{card } A}$ est un card c'est un SE de A on aurait donc $2^{\text{card } A} <$ Card A Cont à nouveau T Cantor

Russell

Ens des Ens qui ne sont pas élts d'eux-m.

$Z = \{X, X \notin X\}$

$Z \in$ ou non à lui-m.

Si $Z \in Z$ ... donc Z, ...

antinomie Barbier

Expressions établissant qu'étant donné une propriété P, élts vérifiant cette ne constituent pas néc. un Ens

d'où la nécessité des th. formalisés d'introduire un AX (compréhension) qui garantit que certaines P "raisonnables" déf des Ens

Frege ↓

. SEC pour → crise + lois maths

"Sélectionnés" rejet en bloc

~~...~~ antinomie

Ensuite crise ⟺ AX seule pas

mise en évidence AX choix

utilisé

→ polémiques → AX retenu

II. AX du choix

1. Présentation

→ Th. des ens. naïve comme antinomie pouvant permettre de la éliminer par utilisation formalisme adéquat

crise de nature différente

~~...~~ utilisé implicitement

Beppo-Levi 1902 → Zermelo 1904

← introduit pour DM T Borel

contesté, dégage multiples pas

utilisé en analyse des les rel. DM

Néanmoins rejeté par de nbx mathématiciens

Rejet → 2 tendances
AX C

Formalistes Hilbert Zermelo Frankel
von Neumann

Empiristes Poincaré Borel (mérite validité)
Baire (niant existence de Ens
partie d'un Ens infiniment)
Hadamard Lebesgue (existence Cantor)
~~surtout~~
* surtout Brouwer intuitionniste

. Début XX mirent parti $\Sigma \overset{F}{\underset{i}{\to}} E$
ou expectative Dedekind

Rejet car permet affirmer $\exists$ ence
Ens maths (Bon ordre sur $\mathbb{R}$)
que l'on ne peut construire explicitement
- ~~Auj~~ Auj nbx résultats sont prouvés
~~4~~ appel AX C, non seulement NE
pourrait ê DM sans cet AX

Mais en fait lui sont ~~eq~~ eq
equiv ★★

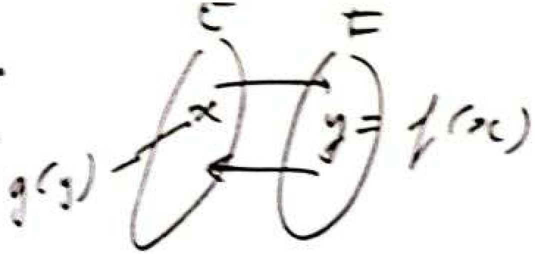
T Zorn Zermelo Tarski
Krull ∞
$a^2 = a$

On peut, bien sûr
décider de se passer de son usage
mais du coup
renoncer aux résultats, + =
math cont et tradi

~~2. Utilisation Pratique~~

~~T S^t $f : E \xrightarrow{s} F$~~
~~$\exists$ g $F \xrightarrow{g} E$ tq $f \circ g = I_F$~~
~~DM~~

2 Utilisa^n prat



T ∄

S^T $f : E \xrightarrow{s} F$

$\underline{\exists\, 1\, g}: F \longrightarrow E$ tq $f \circ g = I_F$

DM

S^t y 1 elt de F.

$\exists\, x \in E$ tq $y = f(x)$.

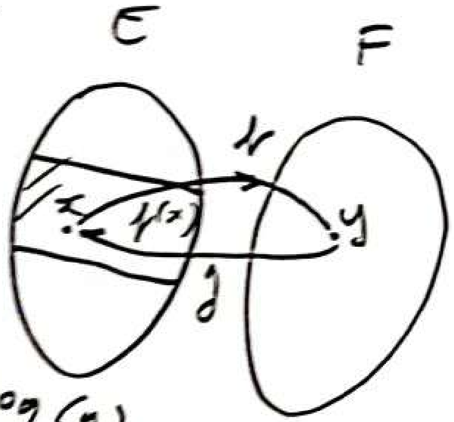
Posons $x = g(y)$.

Alors $y \longmapsto g(y)$

est une a^n f $F \to E$

car

$y = f(x) = f(g(y)) = f \circ g(y)$



- incomplet !

Lorsque nous affirmons
qu'il existe un elt x ds E tq ~~y(...)~~ $y = f(x)$
nous affirmons que
$\not\exists$ $f^{-1}(y) = \{x ; x \in E$ et $y = f(x)\}$
n'est pas vide

ms cet Ens peut ê extrem^t
inf ou non et pr construire
le g on prend $\exists\, x = g(y)$
il ne faut "extraire un elt et 1 seul"
de cet Ens ∞ ?
de ms ts Ens $f^{-1}(y)$

— Par ex

$f : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \xrightarrow{s} \mathbb{R}$

Comment trouver g ?
Faudrait pouvoir faire un choix simultané
~~de~~ d'un ~~seul~~ inf de fois.
niée Lebesgue

---

3 énoncés

~~1) Pr tt Ens $E \neq \emptyset$, $\exists$ a $f : \mathcal{P}(E) \to E$ tq~~

3 Énoncés   pas choix de E

① P. tt Ens $E \neq \emptyset$

$\exists$ a $f : \mathcal{P}(E) \to E$

tq

$\forall X \neq \emptyset,\ f(X) \in X$

② $\forall (A_i)_{i \in I}$ partition E

$\exists B \subset E$ tq

chaque A_i ait un seul elt commun avec B

Ens de choix

③ Produit ... inf alors $\neq \emptyset$ ...

equiv ...

3. T Zermelo T Zorn

Ens bien ordonné par $<$

$\forall$ partie $\neq \emptyset$ possède un plus petit elt

$\{x, y\}$

$x < y$ ou $y < x$ tot^t o

Ex $\mathbb{N}$ $<$

on |

R et T RO tot pas nat^T Th Banach

$\mathbb{R}$ $<$ O total ~~Th~~ O

$]0,1] \neq \emptyset$ pas de + pt elt

Conjecture DM Zermelo

$\forall$ tt Ens peut ê bien ordonné

+ délicat

Ens inductifs = Ens ordonné

où chaque tt chaîne est majorée

$\forall E$, $a \in E$, $\exists m$ = un elt maximal

ds $E \geq a$

maxi pour ... $\to$ T Krull

Rappel Reprise avec AoC

T Zorn T Zermelo AoC	log^t equiv

III Axiomatiques TE

1. ≠ écoles

- Euclide + intuitives parallèles
  → T as ses prédécesseurs
- début XX
  retrouver sans renoncer à rien
- moins AXique → supprime paradoxes
  ? fallait ensemble naturel
  ZF
  2 princ
  Neumann-Bernays-Gödel
  NBG
  fallait saisir
  ≃ int Cantor

Mais peut trouver ≠ modèles qui satisfont AX_s G_s

- // T tr formaliste Brouwer
  refus totale
  princ ~~tiers~~ exclu ~~AoC~~ DM
  → éclipsés

II ? mot conv ou suite

a.b = 0 → ?

∀ φ vrai ou ... cont

2. Gödel ~~Cohen~~ Cohen

Contradictoires ?

1938

≤ AX_s TE privées AoC

... Gödel

AoC (F) et hyp cont ... ... ajoutés

¬ cont ... → ¬ cont ...

1939 DM ... hc

1962 Cohen hc indécidable

= + ou ... !

3 $\mathcal{T}_s$ E (1982)

≃ XIX GNE

plus

$\mathcal{T}$ E Cantorien ZF NBG
y compris AC et HC

— 7 — Ax restreints
+ nég AC ou HC) nb 2

≠ mat as

- En fait AC
Ax P(E) Ax∞
- AUS Pragmatique
ZF+C → résultats essentiels → object
plo problèmes pas tous résolus
mais si suivant les cat → Ax
- Étu log + Ax iqa, cat mod ...
= métamath

4. Métamath TE inachevé

langage ordinaire si formalisable
assimiler ce qu'est une DM
bâtir $\mathcal{T}$ DM → règles mécaniques
symb alphanumériques et critère productif
Hilbert — fond ent géom ★

Etapes Dvpt	G	TE	
Bases et 1ers résultats	Thalès Pythagore Théétète	Bolzano Dedekind Cantor	(1)
Déc paradoxes	Zénon	Burali Forti Cantor Russell	(2)
Bases $\mathcal{T}$ Ax naïve	Euclide Eudoxe	ZF NB	(3)
Etu math Ax	Hilbert	Gödel	(4)
Déc $\mathcal{T}$ 7 clas	Gauss Riemann Lob	G ...	(5)
as Nelles $\mathcal{T}$s	Minkowski Einstein	?	(6)

25 siècles G Gélops !
150 ans TE

5. Ax^{ique} ZF   ZFC

ē sont ts des Ens
$x \in y$ ——— minuscules
est elt de

Axs donnent R_s entre certains ē$_s$
= règles fonctionnement

A) Extensionalité ①
Deux ensembles formés des mêmes elts sont égaux
$$(\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Rightarrow (a = b)$$

B) $\emptyset$ ②
$$(\exists x)(\forall y)(y \notin x)$$

C) Paire ③ ○○ il existe un Ens dont ils sont ens. elts
$$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall w)(w \in z \Leftrightarrow w = x \vee w = y)$$

D) $\cup$ ④
$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \Leftrightarrow (\exists t)(z \in t \wedge t \in x))$$

E) ∞ ⑤
$\exists$ Ens $\supset \emptyset \wedge$ tq
Si $y \in x$ alors $\cup$ $y \wedge \{y\}$ est aussi ds x
qu'on dit $\exists$
$(\exists x)(\emptyset \subset x / (\forall z)$

F) Parties ⑥

G) Régularité ⑦ ⑦ $\underline{x \in x}$

H) Choix ⑧

I) Remplacement ⑨ Délicat

10ème TEC $2^{\aleph_0} = \aleph_1$

— Ts Ens ts G_s — NB cont A^{ni}
Classes

Leray

Rigueur absolue peut ē qu'une illusion temporaire

Rigueur propre de génération